10.6 (2022 年南京大学基础学科拔尖人才培养计划·科研训练营数学试题)

1. 设 i, j 为非负整数，k 为正整数.

(1) 证明：

$$(k+1)i^k < (i+1)^{k+1} - i^{k+1} < (k+1)(i+1)^k.$$

(2) 当 $k \geqslant 3$ 时，证明：

$$\frac{k}{2}j^{\frac{k}{2}-1} < (j+1)^{\frac{k}{2}} - j^{\frac{k}{2}} < \frac{k}{2}(j+1)^{\frac{k}{2}-1}.$$

(25 分)

解：不妨设

$$f(x) = x^\alpha - A^\alpha - [(A+1)^\alpha - A^\alpha](x-A),$$

其中 $A, x > 0, \alpha > 1$. 注意到

$$f(A) = f(A+1) = 0,$$

则 $f'(x)$ 在区间 $(A, A+1)$ 上不可能恒正或恒负，则由零点存在性定理知：存在 $\xi \in (A, A+1)$，使得 $f'(\xi) = 0$，即

$$\alpha\xi^{\alpha-1} = (A+1)^\alpha - A^\alpha.$$

于是可得

$$\alpha A^{\alpha-1} < (A+1)^\alpha - A^\alpha < \alpha(A+1)^{\alpha-1}. \qquad (*)$$

所以在 $(*)$ 式取 $\alpha = k+1, A = i$，即得

$$(k+1)i^k < (i+1)^{k+1} - i^{k+1} < (k+1)(i+1)^k.$$

在 $(*)$ 式取 $\alpha = \frac{k}{2}, A = j$，即得

$$\frac{k}{2}j^{\frac{k}{2}-1} < (j+1)^{\frac{k}{2}} - j^{\frac{k}{2}} < \frac{k}{2}(j+1)^{\frac{k}{2}-1}.$$

注 本题实质上是考察了拉格朗日中值定理，当然用二项式展开也可得结论.

2. 已知 $f(x)$ 是一个系数为有理数的多项式，且对任意大于 2022 的整数 m，$f(m)$ 都是整数，求证：对任意整数 n，$f(n)$ 都是整数. (25 分)

解：不妨设 $\deg f(x) = k$，且令 $g(x) = f(x+2023)$，则由题意 $g(0), g(1), \cdots, g(k)$ 均为整数. 对任意 $x \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}^*$，我们记

$$\binom{x}{i} = \frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}, \qquad \binom{x}{0} = 1.$$

不失一般性，我们令

$$g(x) = a_0\binom{x}{0} + a_1\binom{x}{1} + \cdots + a_k\binom{x}{k},$$

从而 $a_0 = g(0) \in \mathbb{Z}$. 注意到

$$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x) = a_1 + a_2\binom{x}{1} + \cdots + a_k\binom{x}{k-1}$$

从而 $a_1=\Delta g(0)\in\mathbb{Z}$. 又由于

$$\Delta^2 g(x)=\Delta[\Delta g(x)]=[g(x+2)-g(x+1)]-[g(x+1)-g(x)]=a_2+a_3\binom{x}{1}+\cdots+a_k\binom{x}{k-2},$$

从而 $a_2=\Delta^2 g(0)\in\mathbb{Z}$. 以此类推，可得

$$a_j=\Delta^j g(0)\in\mathbb{Z},\ 0\leqslant j\leqslant k.$$

同时我们熟知对任意 $x\in\mathbb{Z}$，有

$$\binom{x}{i}=\frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}\in\mathbb{Z}.$$

这说明对任意整数 n，$g(n)$ 都是整数，而

$$f(n)=g(n-2023),$$

故 $f(n)$ 也是整数.

注 解答本题用了两个结论，其一是

$$\binom{x}{0},\binom{x}{1},\cdots,\binom{x}{k}$$

恰好是 k 次实系数多项式 $\mathbb{R}[x]_k$ 的一组基；其二是对任意 $n\in\mathbb{Z}$，有

$$k!\left|\binom{n}{k}\right.,$$

即 k 个连续整数相乘，一定是 $k!$ 的倍数.

3. 已知 ΔABC 的三边长都是有理数，求证：对于任意的正整数 n，$\cos(nA)$ 都是有理数. (25 分)

解：设 ΔABC 对应的三边长分别为 a, b, c. 注意到有理数对四则运算封闭，由余弦定理

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\in\mathbb{Q}.$$

因为

$$\cos(nA)=\mathrm{Re}\left[\cos(nA)+\mathrm{i}\sin(nA)\right]=\mathrm{Re}\left[(\cos A+\mathrm{i}\sin A)^n\right]$$

且

$$(\cos A+\mathrm{i}\sin A)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^k\sin^k A\cos^{n-k}A.$$

由于 $\mathrm{i}^{2m}=(-1)^m$, $\mathrm{i}^{2m+1}=(-1)^m\mathrm{i}$，故

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left[(\cos A+\mathrm{i}\sin A)^n\right]&=\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^k\sin^k A\cos^{n-k}A\right]\\&=\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\left[\binom{n}{2m}(-1)^m\sin^{2m}A\cos^{n-2m}A\right]\\&=\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\left[\binom{n}{2m}(-1)^m(1-\cos^2A)^m\cos^{n-2m}A\right],\end{aligned}$$

即

$$\cos(nA)=\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\left[\binom{n}{2m}(-1)^m(1-\cos^2A)^m\cos^{n-2m}A\right]\in\mathbb{Q}.$$

注 本题考查了 n 倍角公式，事实上我们还有

$$\cos(n\theta)=\begin{vmatrix}\cos\theta & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}_{n\times n}$$

由行列式的定义可知：$\cos(n\theta)$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次整系数多项式函数.

当然如果能注意到

$$\cos(n\theta)=2\cos\theta\cos[(n-1)\theta]-\cos[(n-2)\theta],$$

则由 $\cos 0=1\in\mathbb{Q}$，$\cos\theta\in\mathbb{Q}$ 及上述递推式，可得 $\cos(n\theta)\in\mathbb{Q}$，$n\in\mathbb{N}$.

4. 利用凸多面体的 Euler 公式：

$$V-E+F=2,$$

证明：凸的正多面体的每个面只可能是正三角形，正方形或者正五边形，并且其顶点数 V，边数 E 和面数 F 只有如下五种可能：

$$(V,E,F)=(4,6,4),\ (8,12,6),\ (6,12,8),\ (20,30,12),\ (12,30,20).$$

（提示：可以利用如下条件——如果每个顶点处有 m 条边，相邻两边夹角为 α，则 $m\alpha<2\pi$）　(15 分)

解：注意到凸正多面体的每个顶点处至少有 3 条边，若凸正多面体的每个面为正 n 边形，则其中 $n\leqslant 5$. 若不然，设 $n\geqslant 6$，则同一个顶点处的相邻两边夹角 $\alpha\geqslant\frac{2\pi}{3}$，而此时每个顶点处夹角和 $A\geqslant 3\times\frac{2\pi}{3}=2\pi$，这是不可能的. 从而凸正多面体的每个面为只可能是正三角形，正方形或者正五边形. 进一步我们考虑凸正多面体的每条边与两个面相接，每个面有 x 条边，则有

$$F:E=1:\frac{x}{2},$$

同时每条边与两个顶点相接，每个顶点处有 y 条边，则有

$$E:V=1:\frac{2}{y},$$

即我们有

$$V:E:F=\frac{2}{y}:1:\frac{2}{x}.$$

不妨设 $V=\dfrac{2k}{y}$，$E=k$，$F=\dfrac{2k}{x}$，则由 Euler 公式

$$V-E+F=\frac{2}{y}k-k+\frac{2}{x}k=2,$$

即

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{k}>\frac{1}{2}\Rightarrow\min\{x,y\}\leqslant 3.$$

而我们显然有 $x\geqslant 3$，$y\geqslant 3$，从而在 x,y 中必有一个是 3. 经过简单讨论可得

$$(x,y,k)=(3,3,6),\ (3,4,12),\ (3,5,30),\ (4,3,12),\ (4,5,30).$$

于是对应的有

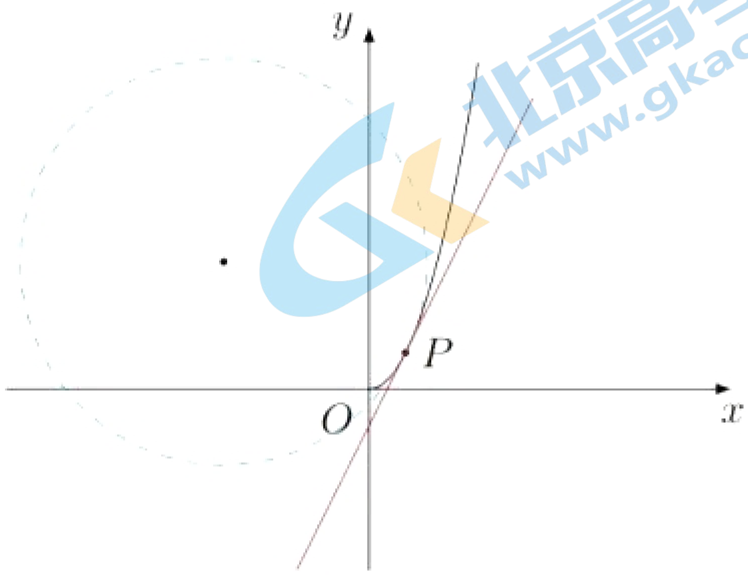
$$(V,E,F)=(4,6,4),\ (8,12,6),\ (6,12,8),\ (20,30,12),\ (12,30,20),$$

分别为正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体及正二十面体.

注 这个题目在考前，看了老吴的数学小课堂备课资料，我正好做了，老吴押题绝了.

5. 抛物线 $y = x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率半径是多少？请给出理由（可用解析几何或物理的方式解释你的结果，不需要严格证明）. (15 分)

解: [解析几何法] 不妨设点 $P(1,1)$ 处的曲率圆方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，由于抛物线 $y=x^2$ 是下凸的，我们只需考虑下半圆周



$$y = -\sqrt{r^2-(x-a)^2}+b,$$

同时我们有

$$y' = \frac{x-a}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}},\quad y'' = \frac{\sqrt{r^2-(x-a)^2}+\frac{(1-a)^2}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}}{r^2-(x-a)^2}.$$

而我们注意到 P 点的曲率圆应与抛物线在 P 有相同的切线，同时凹凸程度相同. 话句话说，就是两者在 P 点的一阶导数和二阶导数都应该相等，故

$$y'|_{x=1} = \frac{x-a}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}} = 2,\qquad y''|_{x=1} = \frac{\sqrt{r^2-(x-a)^2}+\frac{(1-a)^2}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}}{r^2-(x-a)^2} = 2,$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{1-a}{\sqrt{r^2-(1-a)^2}} = 2 \\ \dfrac{\sqrt{r^2-(1-a)^2}+\frac{(1-a)^2}{\sqrt{r^2-(1-a)^2}}}{r^2-(1-a)^2} = 2 \end{cases}.$$

容易得到

$$r = \frac{5\sqrt{5}}{2},$$

即抛物线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率半径为 $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

注 本题也可利用平抛运动的法向加速度求解.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。