2023北京陈经纶中学高二12月月考

数　学

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.

1. 直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1$ 的倾斜角为（　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 120°　　D. 135°

2. 已知 $\vec{a}=(2,3,-1)$，$\vec{b}=(t,t+1,t-1)$ 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $t=$（　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，公差 $d\neq 0$，如果 a_1，a_2，a_5 成等比数列，那么 d 等于（　）

A. 2 或 -2　　B. -2　　C. 2　　D. 3

4. 已知圆 C 的圆心在直线 $y=x$ 上，且圆 C 经过坐标原点，则圆 C 的方程可以为（　）

A. $(x+1)^2+(y+1)^2=1$　　B. $x^2+y^2+2x-2y+1=0$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$　　D. $x^2+y^2+2x-2y=0$

5. 化简方程 $\left|\sqrt{(x+5)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2}\right|=8$ 的结果是（　）

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

C. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$　　D. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

6. 北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板(称为天心石)，环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加 9 块，下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块，向外每环依次也增加 9 块，已知每层环数相同，且下层比中层多 729 块，则三层共有扇面形石板(不含天心石)（ ）

A. 3699 块　　B. 3474 块　　C. 3402 块　　D. 3339 块

7. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=26n-n^2$，若数列$\{na_n\}$中第k 项最大，则k 等于（　）

A. 6

B. 7

C. 6 或 7

D. 8

8. 已知正三棱锥$P-ABC$ 的底面ABC 的边长为 2，M是空间中任意一点，则$\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$的最小值为（　）

A. $-\dfrac{3}{2}$

B. -1

C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D. $-\dfrac{1}{2}$

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 双曲线$C:\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$的渐近方程为________；若抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点是双曲线$C$的右焦点，则$p=$________.

10. 设数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\dfrac{1}{4}$，且$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_n,n\text{为偶数},\\ a_n+\dfrac{1}{4},n\text{为奇数},\end{cases}$ 则$a_2=$______.

11. 若等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=20$，$a_3+a_5=40$，则公比$q=$__________;前n项$S_n=$_____.

12. 直线l过点$(1,1)$且被圆C：$x^2+(y-2)^2=5$截得的弦长最短，则直线l的方程为________.

13. 已知抛物线C：$x^2=4y$的焦点为F，O为原点，点M是抛物线C准线上的一动点，点A在抛物线C上，且$|AF|=2$，则$|MA|+|MO|$的最小值为________.

14. 心脏线，也称心形线，是一个圆上的固定一点在该圆绕着与其相切且半径相同的另外一个圆周滚动时所形成的轨迹，因其形状像心形而得名.心脏线的平面直角坐标方程可以表示为

$x^2+y^2+ay=a\sqrt{x^2+y^2}$，$a>0$，则关于这条曲线的下列说法：

①曲线关于x轴对称；

②当$a=1$时，曲线上有 4 个整点（横纵坐标均为整数的点）；

③a越大，曲线围成的封闭图形的面积越大；

④与圆$(x+a)^2+y^2=a^2$始终有两个交点.

其中，所有正确结论的序号是__________.

三、解答题：本题共 2 小题，共 30 分.

15. 已知$\{a_n\}$是等差数列，满足$a_1=3$，$a_4=12$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=4$，$b_4=20$，且$\{b_n-a_n\}$是等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{b_n\}$的前n项和.

16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的长轴长是短轴长的 2 倍.

（1）求椭圆的离心率 e；

（2）直线 l 过点 $N(0,2)$ 且与椭圆有唯一公共点 M，O 为坐标原点，当 $\triangle OMN$ 的面积最大时，求椭圆的方程.

参考答案

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.

1.【答案】B

【分析】根据直线倾斜角与斜率的关系求解即可.

【详解】直线$\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1$化为$y=x+2$，

则斜率为 1，故其倾斜角为45°.

故选：B

2.【答案】A

【分析】根据向量数量积运算法则计算即可.

【详解】因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=2t+3t+3-t+1=0$，解得$t=-1$.

故选：A

3.【答案】C

【分析】利用等差数列的通项公式，进行基本量代换，求出公差 d 即可.

【详解】因为a_1，a_2，a_5成等比数列，所以$a_2^{\ 2}=a_1a_5$，即$\left(a_1+d\right)^2=a_1\left(a_1+4d\right)$，

因为$a_1=1$，所以$\left(1+d\right)^2=1\left(1+4d\right)$，解得：$d$=2（$d$=0 舍去）.

故选：C

4.【答案】C

【分析】圆心$C(a,a)$，半径$r=|OC|=\sqrt{2}|a|$，即可求解.

【详解】圆C的圆心在直线$y=x$上，且圆C经过坐标原点，

则圆心$C(a,a)$，半径$r=|OC|=\sqrt{2}|a|$，

对 A，圆心为$(-1,-1)$，半径为$r=1$，A 错误；

对 B，圆心为$(-1,1)$，，B 错误；

对 C，圆心为$(1,1)$，半径为$r=\sqrt{2}$，A 正确；

对 D，圆心为$(-1,1)$，D 错误；

故选：C

5.【答案】D

【分析】根据两点间距离公式化简条件，再根据双曲线定义求解即可.

【详解】设$P(x,y)$，$A(-5,0),B(5,0)$，则由已知得$\left||PA|-|PB|\right|=8$，

即动点 P 到两个定点 A、B 的距离之差的绝对值等于常数8，又$|AB|=10$，且$8<10$，

所以根据双曲线的定义知，动点 P 的轨迹是以 A,B 为焦点，实轴长为8的双曲线.

设双曲线方程为：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，则 $2a=8,2c=10$，所以 $a=4,c=5$，

所以 $b^2=c^2-a^2=9$，所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，

即化简方程 $\left|\sqrt{\left(x+5\right)^2+y^2}-\sqrt{\left(x-5\right)^2+y^2}\right|=8$ 的结果是 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

故选：D.

6.【答案】C

【分析】第 n 环天石心块数为 a_n，第一层共有 n 环，则 $\{a_n\}$ 是以 9 为首项，9 为公差的等差数列，

设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，由题意可得 $S_{3n}-S_{2n}=S_{2n}-S_n+729$，解方程即可得到 n，进一步得到 S_{3n}.

【详解】设第 n 环天石心块数为 a_n，第一层共有 n 环，

则 $\{a_n\}$ 是以 9 为首项，9 为公差的等差数列，$a_n=9+(n-1)\times 9=9n$，

设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则第一层、第二层、第三层的块数分

别为 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$，因为下层比中层多 729 块，

所以 $S_{3n}-S_{2n}=S_{2n}-S_n+729$，

即 $\frac{3n(9+27n)}{2}-\frac{2n(9+18n)}{2}=\frac{2n(9+18n)}{2}-\frac{n(9+9n)}{2}+729$

即 $9n^2=729$，解得 $\boldsymbol{n=9}$，

所以 $S_{3n}=S_{27}=\frac{27(9+9\times 27)}{2}=3402$.

故选：C

【点睛】本题主要考查等差数列前 n 项和有关的计算问题，考查学生数学运算能力，是一道容易题.

7.【答案】B

【分析】由 a_n,S_n 的关系得出通项公式，再结合二次函数的性质得出最大项.

【详解】当 $n=1$ 时，$a_1=26-1=25$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=26n-n^2-26(n-1)+(n-1)^2$

$=27-2n$，$n=1$ 也满足，故 $na_n=-2n^2+27n$，由 $-\frac{27}{2\times(-2)}=6.75$ 可知，当数列 $\{na_n\}$ 中第 7 项最大.

故选：B

8.【答案】A

【分析】利用转化法求向量数量积的最值即可.

【详解】解：设 BC 中点为 O，连接 MO，设 AO 中点为 H，则 $|HA|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2-1^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\overrightarrow{MA}\cdot\left(2\overrightarrow{MO}\right)=2\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HO}\right)$$

$$2\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{HA}\right)=2\left(\overrightarrow{MH}^2-\overrightarrow{HA}^2\right)=2\left(\overrightarrow{MH}^2-\frac{3}{4}\right),$$

当 M 与 H 重合时，$\overrightarrow{MH}^2$ 取最小值 0.此时 $\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$ 有最小值 $-\frac{3}{2}$，

故选：A

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【答案】 ①. $y=\pm\sqrt{2}x$ ②. 6

【分析】由条件利用双曲线、抛物线的简单性质，得出结论.

【详解】解：双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，

由于双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$ 的右焦点为 $(3,0)$，设此抛物线的标准方程为 $y^2=2px$，

则 $\frac{p}{2}=3$， $p=6$，

故答案为： $y=\pm\sqrt{2}x$; 6.

10.【答案】$\frac{1}{2}$

【分析】直接代入已知条件计算即可

【详解】$a_2=a_1+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$

11.【答案】2， $2\left(2^n-1\right)$

【详解】$q=\frac{a_3+a_5}{a_2+a_4}=\frac{40}{20}=2$，

由 $a_2+a_4=a_2\left(1+2^2\right)=20$，解得 $a_2=4$，则 $a_1=2$，

故 $S_n=\frac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}=2\left(2^n-1\right)$.

故答案为：2， $2\left(2^n-1\right)$

考点定位：本题考查了等比数列的通项公式、前 n 项公式和数列的性质.

12.【答案】$y=x$

【分析】当圆被直线截得的弦最短时，圆心到弦的距离最大，此时圆心与定点的连线垂直于弦，利用直线的点斜式方程即可得解.

【详解】由圆 C 的方程知圆心 $C(0,2)$，半径为 $\sqrt{5}$，

当圆被直线截得的弦最短时，圆心 $C(0,2)$ 与 $(1,1)$ 的连线垂直于弦，

由圆心 $C(0,2)$ 与 $(1,1)$ 的连线斜率为 -1，所以直线 l 的斜率为 1，

直线 l 的方程为 $y-1=x-1$ 即 $y=x$.

故答案为：$y=x$.

13.【答案】$\sqrt{13}$

【分析】根据条件先确定 A 点坐标和准线方程，然后通过作 A 关于准线的对称点结合三点共线求解出线段和的最小值.

【详解】因为 $|AF|=2$，所以 $y_A+\frac{p}{2}=2$，所以 $y_A=1$，所以 $x_A=\pm 2$，

不妨取 $A(2,1)$，$O(0,0)$，准线 $y=-1$，

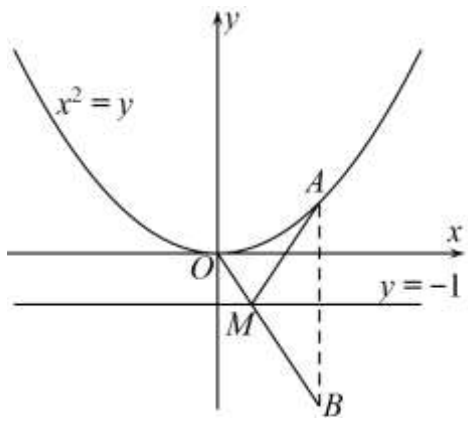
作 A 关于准线的对称点 B，则 $B(2,-3)$，

所以 $|MA|+|MO|$ 的最小值即为 $|OB|$，

当且仅当 O,M,B 三点共线时取最小值，

所以 $|MA|+|MO|$ 的最小值为 $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$，

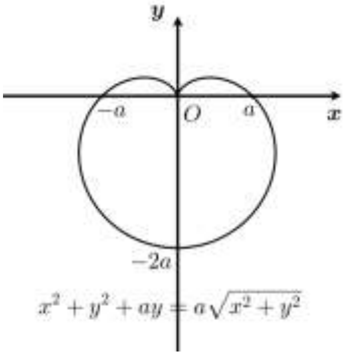
故答案为：$\sqrt{13}$.



14.【答案】②③④

【分析】根据曲线的方程结合图像分析其性质，再逐项验证得出结果.

【详解】根据曲线方程，可画图像，根据曲线的方程结合图形可知，曲线关于 y 轴对称，①错误；



当$a=1$时，曲线方程可写为$x^2+y^2+y=\sqrt{x^2+y^2}$

$x=0$时，$y=0$或$y=-2$

令$t=\sqrt{x^2+y^2}\,(t\geq 0)$，上述方程可化为$y=t-t^2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$

结合上图得，y的整数取值为0，-1，-2.

$y=0$时，$x=\pm1$或$x=0$；

$y=-1$时，上述曲线方程写为$x^2+1-1=\sqrt{x^2+1}$，解得$x^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，此时x不为整数；

$y=-2$时，$x=0$.

所以$a=1$时，曲线上有4个整点 分别为$(0,0),(0,-2),(-1,0),(1,0)$,②正确；

由图像可知曲线围成的封闭图形面积随$a(a>0)$的增大而增大，③正确；

由圆的方程可知，圆心坐标为$(-a,0)$，半径为a，且圆经过原点$(0,0)$

所以曲线与圆$(x+a)^2+y^2=a^2$恒有两个交点，④正确.

故答案为：②③④.

三、解答题：本题共2小题，共30分.

15.【答案】(1) $a_n=3n(n=1,2,\cdots)$，$b_n=3n+2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$；(2) $\frac{3}{2}n(n+1)+2^n-1$

【详解】试题分析：(1) 利用等差数列，等比数列的通项公式先求得公差和公比，即得到结论；(2) 利用分组求和法，由等差数列及等比数列的前n项和公式即可求得数列$\{b_n\}$前n项和.

试题解析：

(I) 设等差数列{an}的公差为d，由题意得

d=$\frac{a_4-a_1}{3}=\frac{12-3}{3}=3$. ∴$a_n=a_1+(n-1)d=3n$

设等比数列{bn - an}的公比为q，则

$q^3=\frac{b_4-a_4}{b_1-a_1}=\frac{20-12}{4-3}=8$，∴q=2，

∴$b_n-a_n=(b_1-a_1)q^{n-1}=2^n-1$， ∴$b_n=3n+2^{n-1}$

（II）由（I）知 $b_n=3n+2^{n-1}$， ∵数列{3n}的前 n 项和为$\frac{3}{2}n(n+1)$，

数列{2n - 1}的前 n 项和为 $1\times\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

∴数列{bn}的前 n 项和为；$S_n=\frac{3}{2}n(n+1)+2^n-1$

考点：1.等差数列性质的综合应用；2.等比数列性质的综合应用；3.数列求和.

16. 【答案】（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（2）$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$

【分析】（1）依题意可得 $2a=2\times 2b$，即可得到 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，从而求出离心率；

（2）由（1）可得椭圆方程为 $\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，设直线 l 为 $y=kx+2$，联立直线与椭圆方程，由 $\Delta=0$ 得到 k、b 的关系，再求出 x_M，由 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|ON||x_M|$ 利用基本不等式求出面积最大值，即可求出此时的 k，从而求出 b^2，即可得解.

【小问 1 详解】

依题意 $2a=2\times 2b$，即 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【小问 2 详解】

由（1）可得椭圆方程为 $\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，即 $x^2+4y^2=4b^2$，

直线 l 的斜率存在且不为 0，设斜率为 k，则直线 l 为 $y=kx+2$，

由 $\begin{cases} y=kx+2 \\ x^2+4y^2=4b^2 \end{cases}$，消去 y 整理得 $(1+4k^2)x^2+16kx+16-4b^2=0$，

所以 $\Delta=(16k)^2-4(1+4k^2)(16-4b^2)=0$，即 $4k^2b^2+b^2-4=0$，

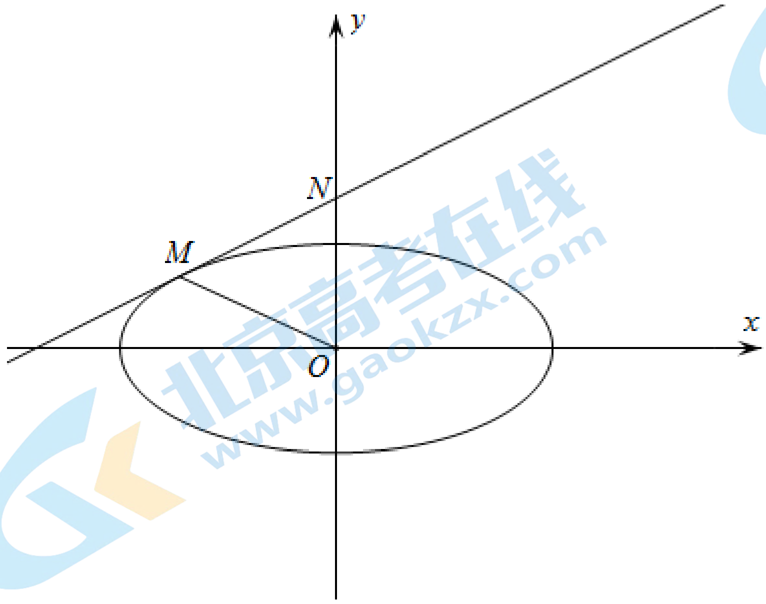
又 $x_M=\frac{-8k}{1+4k^2}$，

所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|ON||x_M|=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{|-8k|}{1+4k^2}=\frac{|8k|}{1+4k^2}=\frac{8}{\frac{1}{|k|}+4|k|}\le\frac{8}{2\sqrt{\frac{1}{|k|}\times 4|k|}}=2$，

当且仅当$\frac{1}{|k|}=4|k|$，即$k=\pm\frac{1}{2}$时取等号，

此时$4\times\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 b^2+b^2-4=0$，解得$b^2=2$，

所以椭圆方程为$x^2+4y^2=8$，即$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！