2023 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）暨 2023 年全国高中数学联合竞赛一试试题（模拟 4）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分．

1．已知$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3},\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$，则$\cos(2\alpha+2\beta)$的值为__________．

2．等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$S_4=-5,S_6=21S_2$，则$S_8=$__________．

3．从圆内接正八边形的 8 个顶点中任取 3 个顶点构成三角形，则所得的三角形是直角三角形的概率是__________．

4．已知定义域为$\mathbf{R}$的偶函数$f(x)$满足$f(x+2)=-f(x)$，若$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=-1$，则$f(0)$的值为__________．

5．已知 z 为复数，且关于 x 的方程$x^2+zx+4+3\mathrm{i}=0$有实数解，则$|z|$的最小值为__________．

6．在平面直角坐标系中，直线 l 与双曲线$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右两支交于$A,B$两点，与$\Gamma$的渐近线交于$C,D$两点，且$A,C,D,B$在 l 上顺次排列．若$OA\perp OB$，$|AC|,|CD|,|DB|$成等差数列，则Γ的离心率的取值范围是__________．

7．已知在四棱锥$P-ABCD$中，

$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD=\angle DPA=60^\circ,\angle APC=\angle BPD,PB=PD.$$

若该四棱锥存在半径为 1 的内切球，且$PA=\sqrt{6}$，则PC的长为__________．

8．令实数集$S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$，定义函数$f:S\to S$，使得

$$f(f(a_1))=f(f(a_2))=f(f(a_3))=f(f(a_4))=f(f(a_5))=f(f(a_6)),$$

则满足条件的f的个数为__________．

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9．（本题满分 16 分） 设实数x,y,z满足$0<x,y,z<1$，求S的最小值，其中

$$S=\frac{xyz(x+y+z)+(xy+yz+zx)(1-xyz)}{xyz\sqrt{1-xyz}}.$$

10．（本题满分 20 分） 已知函数$f(x)=2x^3-2x$，若正实数 a 使得存在三个两两不同的实数b,c,d，满足$(a,f(a)),(b,f(b)),(c,f(c)),(d,f(d))$恰好为一个矩形的四个顶点，求 a 的取值范围．

11．（本题满分 20 分） 在平面直角坐标系xOy中，抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，过点F的直线交C于A,B两点（其中点A在第一象限），过点A作C的切线交x轴于点P，直线PB交C于另一点Q，直线QA交x轴于点T．

(1) 证明：$|AF|\cdot|AT|=|BF|\cdot|QT|$；

(2) 记$\Delta AOP,\Delta AFT,\Delta BQT$的面积分别为$S_1,S_2,S_3$，当点$A$的横坐标大于 2 时，求$\dfrac{S_3}{S_2-S_1}$的最小值．

2023 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）暨 2023 年全国高中数学联合竞赛一试（模拟 4）参考答案及评分标准

说明：

1．评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分．

1．已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3},\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)$ 的值为__________．

答案：$\frac{1}{9}$．

解：因为 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，而 $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，因此 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$，所以

$$\cos(2\alpha+2\beta)=\cos2(\alpha+\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{9}.$$

2．等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_4=-5,S_6=21S_2$，则 $S_8=$__________．

答案：-85．

解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，首项为 a_1．

若 $q=1$，则 $S_6=6a_1=3\times2a_1=3S_2$，与题意不符，所以 $q\neq1$．

由 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$ 可得，$\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=-5$，$\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=21\times\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$，故

$1+q^2+q^4=21$，解得：$q^2=4$，所以 $S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}\times(1+q^4)=-5\times(1+16)=-85$．

3．从圆内接正八边形的 8 个顶点中任取 3 个顶点构成三角形，则所得的三角形是直角三角形的概率是__________．

答案：$\frac{3}{7}$．

解：从圆内接正八边形的 8 个顶点中任取两点连成线段，其中有 4 条为圆的直径，若从这 8 个顶点中任取 3 个顶点构成三角形，所得的三角形是直角三角形，则其中直角三角形的斜边为圆的直径，然后从剩余的 6 个顶点（除去直角三角形斜边的顶点）中任取一个点，与斜边的顶点可构成直角三角形，故所求事件的概

率为$P=\frac{4\times 6}{C_8^3}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$.

4．已知定义域为$\mathbf{R}$的偶函数$f(x)$满足$f(x+2)=-f(x)$，若$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=-1$，则$f(0)$的值为__________.

答案：1.

解：因为$f(x+2)=-f(x)$，所以$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以$f(x)$的周期为4，所以$f(2)=-f(0)$，$f(3)=-f(1)$，$f(4)=-f(2)=f(0)$，即

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=f(1)-f(0)-f(1)+f(0)=0.$$

若$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=-1$，则$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(2023)=-1$，

即$505\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+f(3)=-1$，

可得$f(1)+f(2)+f(3)=f(1)-f(0)-f(1)=-1$，所以$f(0)=1$.

5．已知z为复数，且关于x的方程$x^2+zx+4+3\mathrm{i}=0$有实数解，则$|z|$的最小值为__________.

答案：$3\sqrt{2}$.

解：由$x^2+zx+4+3\mathrm{i}=0$可得$zx=-(x^2+4+3\mathrm{i})$，显然$x=0$不是方程$x^2+zx+4+3\mathrm{i}=0$的实数根，所以$x\neq 0$，即$z=-\left(\frac{x^2+4}{x}+\frac{3}{x}\mathrm{i}\right)$.

若关于x的方程$x^2+zx+4+3\mathrm{i}=0$有实数根，则$z=-\left(x+\frac{4}{x}\right)-\frac{3}{x}\mathrm{i}$，$x\in\mathbf{R}$，所以

$|z|=\sqrt{\left[-\left(x+\frac{4}{x}\right)\right]^2+\left(-\frac{3}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{25}{x^2}+8}\geq\sqrt{2\sqrt{x^2\cdot\frac{25}{x^2}}+8}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，当且仅当$x=\pm\sqrt{5}$时等号成立，故$|z|$的最小值为$3\sqrt{2}$.

6．在平面直角坐标系中，直线l与双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右两支交于$A,B$两点，与$\Gamma$的渐近线交于$C,D$两点，且$A,C,D,B$在$l$上顺次排列.若$OA\perp OB$，$|AC|,|CD|,|DB|$成等差数列，则$\Gamma$的离心率的取值范围是__________.

答案：$[\sqrt{10},+\infty)$.

解：设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，直线$AB:y=kx+m$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，可得$(b^2-a^2k^2)x^2-2ka^2mx-a^2m^2-a^2b^2=0$，则$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-2a^2km}{a^2k^2-b^2}\\ x_1x_2=\frac{a^2m^2+a^2b^2}{a^2k^2-b^2}\end{cases}$ ①

联立$\begin{cases} y = kx + m \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \end{cases}$，可得$\left(b^2 - a^2k^2\right)x^2 - 2ka^2mx - a^2m^2 = 0$，则$\begin{cases} x_3 + x_4 = x_1 + x_2 = \dfrac{-2a^2km}{a^2k^2 - b^2} \\ x_3x_4 = \dfrac{a^2m^2}{a^2k^2 - b^2} \end{cases}$②

因为$OA \perp OB$，所以$x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0$，所以$m^2 = \dfrac{a^2b^2\left(k^2 + 1\right)}{b^2 - a^2} > 0$③

因为$m^2 > 0$，所以$b^2 > a^2$，所以$e^2 > 2$，即得$e > \sqrt{2}$④

因为$x_3 + x_4 = x_1 + x_2$，所以CD中点为AB的中点，所以$|AC| = |BD|$，因为$|AC|,|CD|,|BD|$成等差数列，所以$|AC| = |CD| = |BD|$，又因为A，C，D，B从左到右依次排列，所以$|AB| = 3|CD|$，所以$|x_1 - x_2| = 3|x_3 - x_4|$，代入①②③有$k^2 = \dfrac{b^2\left(b^2 - 9a^2\right)}{a^2\left(9b^2 - a^2\right)}$.

因为$k^2 \geq 0$且$e^2 > 2$，又因为$b^2 > a^2$，则$9b^2 > a^2$所以$b^2 \geq 9a^2$，所以$e^2 - 1 \geq 9$，即$e \geq \sqrt{10}$.

综上所述，Γ的离心率的取值范围是$[\sqrt{10}, +\infty)$.

7. 已知在四棱锥$P-ABCD$中，

$\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = \angle DPA = 60^\circ$，$\angle APC = \angle BPD, PB = PD$.

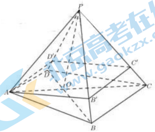
若该四棱锥存在半径为 1 的内切球，且$PA = \sqrt{6}$，则PC的长为__________.

答案：$3\sqrt{6} + 4\sqrt{3}$.

解：如图，$\because \angle APB = \angle BPC = \angle CPD = \angle DPA = 60^\circ$，且$\angle APC = \angle BPD$，

$\therefore$可以在四棱锥上截取一个正四棱锥$P-AB'C'D'$，

此时四边形$AB'C'D'$为正方形，且边长为$\sqrt{6}$，



$\therefore AC' = \sqrt{AB'^2 + B'C'^2} = 2\sqrt{3}$，$\therefore PA^2 + PC'^2 = 12 = AC'^2$

$\therefore \angle APC = \angle BPD = 90^\circ$.

设$PB = PD = t > 0, AC \cap BD = O, PC = x > 0$，

$\because \angle APB = \angle BPC = \angle CPD = \angle DPA = 60^\circ$，且$PB = PD$，

$\therefore AB = AD, BC = CD$，$\therefore AC \perp BD$，$O$为$BD$中点，

$\because PB = PD$，$\therefore PO \perp BD$.

又$\because PO \cap AC = O$，$\therefore BD \perp$平面PAC，

$\because \angle BPD = 90^\circ$，$\therefore BD = \sqrt{PB^2 + PD^2} = \sqrt{2}t$，

$\therefore V_{P-ABCD} = V_{B-PAC} + V_{D-PAC} = \dfrac{1}{3}BD \cdot S_{\triangle PAC} = \dfrac{1}{3}\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{6}x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}tx$.

又因为四棱锥$P-ABCD$存在半径为 1 的内切球，

$\therefore V_{P-ABCD} = \dfrac{1}{3}\left(S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAD} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCD} + S_{四边形ABCD}\right)$

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} \cdot PA \cdot PB \cdot \sin 60^\circ + \dfrac{1}{2} \cdot PA \cdot PD \cdot \sin 60^\circ + \dfrac{1}{2} \cdot PC \cdot PB \cdot \sin 60^\circ + \dfrac{1}{2} \cdot PC \cdot PD \cdot \sin 60^\circ + \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD\right)$

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{6}t \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{6}t \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot tx \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot tx \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2}t \cdot \sqrt{6 + x^2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}tx$，

即$\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{6+x^2}=\sqrt{3}x$，即$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{6+x^2}$，$\therefore x^2-6\sqrt{6}x+6=0$，解得$x=3\sqrt{6}\pm4\sqrt{3}$.

因为四棱锥$P-ABCD$存在半径为1的内切球，直径为2，$\therefore PC>2$，而$3\sqrt{6}-4\sqrt{3}<2$，故$PC=3\sqrt{6}+4\sqrt{3}$，来源：高三答案公众号

8. 令实数集$S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$，定义函数$f:S\to S$，使得

$$f(f(a_1))=f(f(a_2))=f(f(a_3))=f(f(a_4))=f(f(a_5))=f(f(a_6)),$$

则满足条件的f的个数为__________.

答案：1176.

解：

不妨设$f(f(a_1))=\ldots=f(f(a_6))=a_1$，易知$a_1=f(f(f(a_1)))=f(a_1)$.

设除了a_1之外还有k个元素被f映到a_1，则这k个元素是那几个有$\binom{5}{k}$种可能，而剩下的$5-k$个元素只需映到这k个元素中的任意元素，共k^{5-k}种可能. 故此时共$\binom{5}{k}k^{5-k}$种.

因此共有

$$6\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}k^{5-k}=1176$$

种.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分16分） 设实数x,y,z满足$0<x,y,z<1$，求

$$\frac{xyz(x+y+z)+(xy+yz+zx)(1-xyz)}{xyz\sqrt{1-xyz}}$$

的最小值.

解 记原题表达式为f. 由$0<x,y,z<1$知$1-xyz>0$. 从而由均值不等式知

$$f\geqslant\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)(xy+yz+zx)(1-xyz)}}{xyz\sqrt{1-xyz}}$$

$$=2\sqrt{\frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{xyz}}\geqslant2\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{xyz}\cdot3\sqrt[3]{(xyz)^2}}{xyz}}=6.$$ …………12分

另一方面，令$x=y=z=t$，其中$t\in(0,1)$，$t^3+t^2=1$（由于$t=0$时，$t^3+t^2=0$，$t=1$时，$t^3+t^2=2$，故由介值定理知这样的t存在），此时$f=\frac{t^3\cdot3t+3t^2\cdot(1-t^3)}{t^3\cdot\sqrt{1-t^3}}=\frac{t^3\cdot3t+3t^2\cdot t^2}{t^3\cdot\sqrt{t^2}}=6$可以取到.

故$f_{\min}=6$. …………16分

10.（本题满分20分） 已知函数$f(x)=2x^3-2x$，若正实数a使得存在三个两两不同的实数b,c,d，满足$(a,f(a)),(b,f(b)),(c,f(c)),(d,f(d))$恰好为一个矩形的四个顶点，求$a$的取值范围.

解：已知$f(x)=2x^3-2x$，若正实数a使得存在三个两两不同的实数b，c，d，满足$(a,f(a))$，$(b,f(b))$，$(c,f(c))$，$(d,f(d))$恰好为一个矩形的四个顶点，因为$f(x)=2x^3-2x$是奇函数，所以若存在一个矩形，则矩形的中心在原点，则

$x^2+(2x^3-2x)^2=a^2+(2a^3-2a)^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上至少有两个根. …………5 分

设 $g(x)=x^2+(2x^3-2x)^2=4x^6-8x^4+5x^2$，则 $g'(x)=24x^5-32x^3+10x=2x(2x^2-1)(6x^2-5)$，在 $(0,+\infty)$ 上 $g'(x)=0$ 时，$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，在 $(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 和 $(\dfrac{\sqrt{30}}{6},+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，在 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{30}}{6})$ 上 $g'(x)<0$，所以在 $(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 和 $(\dfrac{\sqrt{30}}{6},+\infty)$ 上，$g(x)$ 单调递增，在 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{30}}{6})$ 上，$g(x)$ 单调递减，则 $g(x)_{极大值}=g(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=1$，$g(x)_{极小值}=g(\dfrac{\sqrt{30}}{6})=\dfrac{25}{27}$. …………10 分

根据题意 $\dfrac{25}{27}\le a^2+(2a^3-2a)^2\le 1$，当 $a^2+(2a^3-2a)^2=1$ 时，有 $(2a^2-1)^2(a^2-1)=0$，解得 $a=1$ 或 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时 $a\in[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1]$；当 $a^2+(2a^3-2a)^2=\dfrac{25}{27}$ 时，有 $(6a^2-5)^2(3a^2-1)=0$，解得 $a=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ 或 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，此时 $a\in[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{30}}{6}]$.来源：高三答案公众号 …………15 分

综上所述，当 $a\in[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1]$ 时，根据对称性存在三个两两不同的实数 b，c，d，满足 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$，$(c,f(c))$，$(d,f(d))$ 恰好为一个矩形的四个顶点.

…………20 分

11.（本题满分 20 分） 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的直线交 C 于 A、B 两点（其中点 A 在第一象限），过点 A 作 C 的切线交 x 轴于点 P，直线 PB 交 C 于另一点 Q，直线 QA 交 x 轴于点 T.

(1) 证明：$|AF|\cdot|AT|=|BF|\cdot|QT|$；

(2) 记 $\Delta AOP,\Delta AFT,\Delta BQT$ 的面积分别为 S_1,S_2,S_3，当点 A 的横坐标大于 2 时，求 $\dfrac{S_3}{S_2-S_1}$ 的最小值.

解: (1) 设点 $A(x_0,y_0)$，则 $y_0^2=4x_0$，直线 AP 方程为 $y-y_0=\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$，令 $y=0$，则 $x_P=-x_0$，即点 $P(-x_0,0)$. 设直线 $AB:x=my+t$，与 C 联立得 $y^2-4my-4t=0$，所以 $y_A\cdot y_B=-4x_F$，同理 $y_A\cdot y_Q=-4x_T$.

因为 $F(1,0)$，$A(x_0,y_0)$，所以 $y_B=\dfrac{-4}{y_0}$，则 $B\left(\dfrac{1}{x_0},\dfrac{-4}{y_0}\right)$，设直线 $PB:y=k(x+x_0)$，与 C 联立得 $k^2x^2+(2k^2x_0-4)x+k^2x_0^2=0$，又因为直线 PB 与抛物线交于 B、Q 两点，所以 $x_B\cdot x_Q=x_0^2$.

因为点 $B\left(\dfrac{1}{x_0},\dfrac{-4}{y_0}\right)$，所以 $x_Q=x_0^3$，代入抛物线 $C:y^2=4x$，又因为 Q 在第四象限，可知 $Q\left(x_0^3,-\dfrac{y_0^3}{4}\right)$.

因为$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|y_0|}{|y_B|}=\left|\frac{y_0^2}{-4}\right|=x_0$，$\frac{|QT|}{|AT|}=\frac{|y_Q|}{|y_0|}=\left|-\frac{y_0^2}{4}\right|=x_0$，所以$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|QT|}{|AT|}$，即$|AF|\cdot|AT|=|BF|\cdot|QT|$，原命题得证. …………10 分

(2) 由 (1) 知$y_A\cdot y_Q=-4x_T$，所以$-\frac{y_0^4}{4}=-4x_T$，得$x_T=\frac{y_0^4}{16}=x_0^2$，即$T\left(x_0^2,0\right)$.

所以$S_1=\frac{1}{2}x_0y_0$，$S_2=\frac{1}{2}\left(x_0^2-1\right)y_0$.

另由 (1) 知$P\left(-x_0,0\right)$，$B\left(\frac{1}{x_0},\frac{-4}{y_0}\right)$，$Q\left(x_0^3,-\frac{y_0^3}{4}\right)$，所以$S_3=S_{\triangle BQT}=S_{\triangle PQT}-S_{\triangle PBT}$，

即$S_3=\frac{1}{2}\left(x_0^2+x_0\right)\cdot\left(\frac{y_0^3}{4}-\frac{4}{y_0}\right)=2\left(x_0^2+x_0\right)\cdot\frac{x_0^2-1}{y_0}$.

所以$\frac{S_3}{S_2-S_1}=\frac{2\left(x_0^2+x_0\right)\cdot\frac{x_0^2-1}{y_0}}{\frac{1}{2}\left(x_0^2-1\right)\cdot y_0-\frac{1}{2}x_0\cdot y_0}=\frac{\left(x_0+1\right)\left(x_0^2-1\right)}{x_0^2-x_0-1}$，$x_0\in(2,+\infty)$. …………15 分

设函数$g(x)=\frac{(x+1)\left(x^2-1\right)}{x^2-x-1}=\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-x-1}=\frac{x^3}{x^2-x-1}+1$，$x\in(2,+\infty)$，则

$g'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-x-1\right)-x^3(2x-1)}{\left(x^2-x-1\right)^2}=\frac{x^2(x+1)(x-3)}{\left(x^2-x-1\right)^2}$. 当$x\in(2,3)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当$x\in(3,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增. 所以当$x_0=3$时，$\frac{S_3}{S_2-S_1}$取得最小值$\frac{32}{5}$. …………20 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。