

2023 高考临考信息卷

数学试卷

班级 _____ 姓名 _____

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级和考号填写在答题卡上.
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

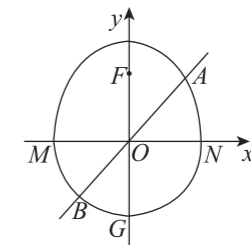
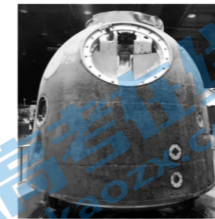
一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

- 已知集合 $M = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, $N = \{x | y = \sqrt{1 - \ln x}\}$, 则 $M \cup N =$
 A. $(-\infty, e]$ B. $(0, 2)$ C. $(-1, e]$ D. $(-1, 2)$
- 已知复数 z 满足 $(1 - 2i)z = |3 - 4i|$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$
 A. $-1 - 2i$ B. $-1 + 2i$ C. $1 - 2i$ D. $1 + 2i$
- 2023 年 3 月 24 日是第 28 个“世界防治结核病日”,我国的宣传主题是“你我共同努力,终结结核流行”,呼吁社会各界广泛参与,共同终结结核流行,维护人民群众的身体健康.已知某种传染疾病的患病率为 5%,通过验血诊断该病的误诊率为 2%,即非患者中有 2%的人诊断为阳性,患者中有 2%的人诊断为阴性.若随机抽取一人进行验血,则其诊断结果为阳性的概率为
 A. 0.46 B. 0.046 C. 0.68 D. 0.068
- 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 焦点 F 的直线交抛物线 C 于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点,以线段 AB 为直径的圆的圆心为 O_1 ,半径为 r ,点 O_1 到 C 的准线 l 的距离与 r 的积为 25,则 $r(x_1 + x_2) =$
 A. 40 B. 30 C. 25 D. 20
- 根据《民用建筑工程室内环境污染控制标准》,文化娱乐场所室内甲醛浓度 $\leq 0.1 \text{ mg/m}^3$ 为安全范围.已知某新建文化娱乐场所施工中使用了甲醛喷剂,处于良好的通风环境下时,竣工 1 周后室内甲醛浓度为 6.25 mg/m^3 ,3 周后室内甲醛浓度为 1 mg/m^3 ,且室内甲醛浓度 $\rho(t)$ (单位: mg/m^3) 与竣工后保持良好通风的时间 $t (t \in \mathbf{N}^*)$ (单位:周) 近似满足函数关系式 $\rho(t) = e^{at+b}$,则该文化娱乐场所的甲醛浓度若要达到安全开放标准,竣工后至少需要放置的时间为
 A. 5 周 B. 6 周 C. 7 周 D. 8 周
- 在轴截面顶角为直角的圆锥内,作一内接圆柱,若圆柱的表面积等于圆锥的侧面积,则圆柱的底面半径与圆锥的底面半径的比值为
 A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

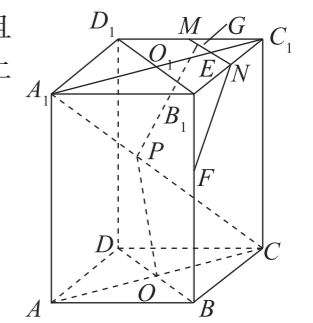
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,点 M 是双曲线右支上一点,且 $MF_1 \perp MF_2$,延长 MF_2 交双曲线 C 于点 P .若 $|MF_1| = |PF_2|$,则双曲线 C 的离心率为
 A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{6}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 90^\circ, AB = 4, AC = 4\sqrt{3}$, P, Q 是平面 ABC 上的动点,且 $AP = AQ = PQ = 2$, M 是边 BC 上一点,则 $\vec{MP} \cdot \vec{MQ}$ 的最小值为
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

- 下列结论正确的有
 A. 若随机变量 ξ, η 满足 $\eta = 2\xi + 1$, 则 $D(\eta) = 2D(\xi) + 1$
 B. 若随机变量 $\xi \sim N(3, \sigma^2)$, 且 $P(\xi < 6) = 0.84$, 则 $P(3 < \xi < 6) = 0.34$
 C. 若样本相关系数 r 的绝对值越接近 1, 则成对样本数据的线性相关程度越强
 D. 按从小到大顺序排列的两组数据:甲组: 27, 30, 37, m , 40, 50; 乙组: 24, n , 33, 44, 48, 52. 若这两组数据的第 30 百分位数、第 50 百分位数都分别对应相等, 则 $m + n = 67$
- 2022 年 12 月,神舟十四号返回舱成功着陆,返回舱是宇航员返回地球的座舱,返回舱的轴截面可近似看作是由半圆和半椭圆(都包含 M, N 点)组成的“曲圆”,半圆的圆心在坐标原点,半圆所在的圆过椭圆的焦点 $F(0, 3)$, 椭圆的短轴长等于半圆的直径,如图,在平面直角坐标系中,下半圆与 y 轴交于点 G .若过原点 O 的直线与上半椭圆交于点 A , 与下半圆交于点 B , 则



- 椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$ B. $\triangle AFG$ 的周长为 $6 + 6\sqrt{2}$
 C. $\triangle ABF$ 面积的最大值是 $\frac{9}{2}$ D. 线段 AB 长度的取值范围是 $[6, 3 + 3\sqrt{2}]$
- 如图,四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形,侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$,三棱锥 $A_1 - BCD$ 的体积是 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$,底面 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心分别是 O 和 O_1 , E 是 O_1C_1 的中点,过点 E 的平面 α 分别交 BB_1, B_1C_1, C_1D_1 于点 F, N, M ,且 $BD \parallel$ 平面 α , G 是线段 MN 上任意一点(含端点), P 是线段 A_1C 上任意一点(含端点), 则
 A. 侧棱 AA_1 的长为 $\sqrt{6}$
 B. 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的表面积是 40π
 C. 当 $\frac{B_1F}{BB_1} = \frac{2}{5}$ 时,平面 α 截四棱柱所得的截面是六边形
 D. $PO + PG$ 的最小值是 5



12. 已知 $a > b, c > d, \frac{e^a}{a+1} = \frac{e^b}{b+1} = 1.01, (1-c)e^c = (1-d)e^d = 0.99$, 则

- A. $a+b > 0$ B. $c+d > 0$ C. $a+d > 0$ D. $b+c > 0$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 的顶点为 O , 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边与圆 $x^2 + y^2 = 9$

相交于点 $(\frac{3\sqrt{5}}{5}, t)$, 则 $\sin(\frac{\pi}{2} + 2\alpha) =$ _____.

14. 已知多项式 $(x-2)^5 + (x-1)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_5x^5 + a_6x^6$, 则 $a_1 =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} + k(2\ln x - x)$ 和 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 若 $g(x)$ 的极小值点是 $f(x)$ 的唯一极值点, 则实数 k 的最大值为 _____.

16. “0,1 数列”是每一项均为 0 或 1 的数列, 在通信技术中应用广泛. 设 A 是一个“0,1 数列”, 定义数列 $f(A)$: 数列 A 中每个 0 都变为“1,0,1”, A 中每个 1 都变为“0,1,0”, 所得到的新数列. 例如数列 $A: 1,0$, 则数列 $f(A): 0,1,0,1,0,1$. 已知数列 $A_1: 1,0,1,0,1$, 且数列 $A_{k+1} = f(A_k), k=1,2,3,\dots$, 记数列 A_k 的所有项之和为 S_k , 则 $S_k + S_{k+1} =$ _____.

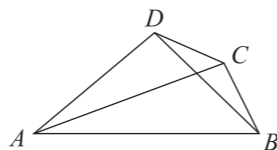
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AC = \sqrt{7}, AB = 3, \angle DAC = \angle BAC, \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

(1) 求边 BC ;

(2) 若 $\angle CDA = \frac{2\pi}{3}$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.



18. (本小题满分 12 分)

在各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1}^2 = a_n(a_{n+1} + 2a_n)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_n \cdot \sqrt{\log_2 a_{n+1}} + \log_2 a_{n+1} \cdot \sqrt{\log_2 a_n}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq S_n < 1.$$

19. (本小题满分 12 分)

2023 年 3 月某学校举行了普通高中体育与健康学业水平合格性考试, 考试分为体能测试和技能测试, 其中技能测试要求每个学生选择篮球运球上篮、羽毛球对拉高远球和游泳 3 个项目中任意选择一个参加. 某男生为了在此次体育学业考试中取得优异成绩, 决定每天训练一个技能项目. 第一天在 3 个项目中任意选一项开始训练, 从第二天起, 每天都是从前一天没有训练的 2 个项目中任意选一项训练.

(1) 若该男生进行了 3 天训练, 求第三天训练的是“篮球运球上篮”的概率;

(2) 设该男生在考前最后 6 天训练中选择“羽毛球对拉高远球”的天数为 X , 求 X 的分布列及数学期望.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2, P 是椭圆上一动点(与左、右

顶点不重合), $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 椭圆的离心率是 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过 $H(4,0)$ 作斜率不为 0 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 过 B 作垂直于 x 轴的直线交椭圆

于另一点 Q , 连接 AQ , 设 $\triangle ABQ$ 的外心为 G , 求证: $\frac{|AQ|}{|GF_2|}$ 为定值.

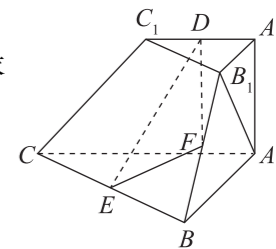
21. (本小题满分 12 分)

在三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 $ABC, AB = AC = 2, AA_1 = A_1B_1 = 1, AB_1 \perp A_1C_1,$

E, F 分别是 BC, BB_1 的中点, D 是棱 A_1C_1 上的动点.

(1) 求证: $AB_1 \perp DE$;

(2) 若 D 是线段 A_1C_1 的中点, 平面 DEF 与 A_1B_1 的交点记为 M , 求平面 AMC 与平面 AME 夹角的余弦值.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 > 2x_2$.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: $e \cdot \left(\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2}\right) > 4\sqrt{2}$.

2023 高考临考信息卷

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	D	A	B	D	D	B	BC	BD	BCD	AD

1. C 解析: $M = \{x \mid x^2 - x - 2 < 0\} = (-1, 2)$, 由 $1 - \ln x \geq 0$, 得 $0 < x \leq e$, 则 $N = \{x \mid y = \sqrt{1 - \ln x}\} = (0, e]$, 所以 $M \cup N = (-1, e]$. 故选 C.

2. C 解析: 因为 $(1-2i)z = |3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, 可得 $z = \frac{5}{1-2i} = \frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = 1+2i$, 所以 $\bar{z} = 1-2i$. 故选 C.

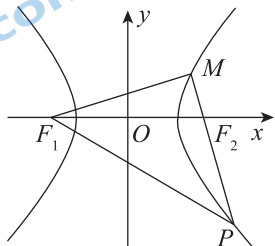
3. D 解析: 设随机抽取一人进行验血, 其诊断结果为阳性为事件 A, 设随机抽取一人为患者为事件 B, 随机抽取一人为非患者为事件 \bar{B} , 则 $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) = 0.98 \times 0.05 + 0.02 \times 0.95 = 0.068$. 故选 D.

4. A 解析: 由抛物线的性质知, 点 O_1 到 C 的准线 l 的距离为 $\frac{1}{2}|AB| = r$, 依题意得 $r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$, 又点 O_1 到 C 的准线 l 的距离为 $\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 2) = r = 5$, 则有 $x_1 + x_2 = 8$, 故 $r(x_1 + x_2) = 40$. 故选 A.

5. B 解析: 由题意可知, $\rho(1) = e^{a+b} = 6.25$, $\rho(3) = e^{3a+b} = 1$, $\frac{\rho(3)}{\rho(1)} = e^{2a} = \frac{4}{25}$, 解得 $e^a = \frac{2}{5}$. 设该文化娱乐场所竣工后放置 t_0 周后甲醛浓度达到安全开放标准, 则 $\rho(t_0) = e^{at_0+b} = e^{a+b} \cdot e^{a(t_0-1)} = 6.25 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{t_0-1} \leq 0.1$, 整理得 $62.5 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{t_0-1}$. 设 $62.5 = \left(\frac{5}{2}\right)^{m-1}$, 因为 $\left(\frac{5}{2}\right)^4 < 62.5 < \left(\frac{5}{2}\right)^5$, 所以 $4 < m-1 < 5$, 即 $5 < m < 6$, 则 $t_0 - 1 \geq m - 1$, 即 $t_0 \geq m$, 故竣工后至少需要放置的时间为 6 周. 故选 B.

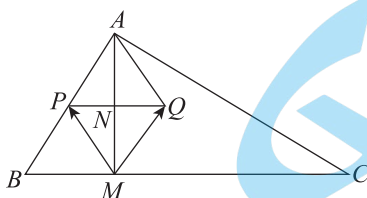
6. D 解析: 设圆柱和圆锥底面半径分别为 r, R , 因为圆锥轴截面的顶角为直角, 所以圆锥母线长为 $\sqrt{2}R$, 设圆柱高为 h , 则 $\frac{h}{R} = \frac{R-r}{R}$, $h = R - r$, 由题意得 $\pi \times R \times \sqrt{2}R = 2\pi r^2 + 2\pi r \times (R - r)$, 解得 $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 D.

7. D 解析: 设 $|MF_1| = t (t > 2a)$, 由双曲线的定义可得 $|MF_2| = t - 2a$, 又 $|PF_2| = |MF_1| = t$, 则 $|PF_1| = t + 2a$, 由 $MF_1 \perp MF_2$, 可得 $|MF_1|^2 + |MP|^2 = |PF_1|^2$, 即 $t^2 + (2t - 2a)^2 = (t + 2a)^2$, 解得 $t = 3a$. 又 $|MF_1|^2 + |MF_2|^2 = |F_2F_1|^2$, 即 $(3a)^2 + a^2 = 4c^2$, 即 $c = \frac{\sqrt{10}}{2}a$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 D.



8. B 解析: 取 PQ 的中点 N , 则 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NP}$, 可得 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}) \cdot (\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NP}) = \overrightarrow{MN}^2 - \overrightarrow{NP}^2 = \overrightarrow{MN}^2 - 1$, $\therefore |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}| \geq |\overrightarrow{MA}| - |\overrightarrow{AN}|$, 当

且仅当点 N 在线段 AM 上时, 等号成立, 故 $|\overrightarrow{MN}| \geq ||\overrightarrow{MA}| - |\overrightarrow{AN}|| = ||\overrightarrow{MA}| - \sqrt{3}|$, 显然当 $AM \perp BC$ 时, $|\overrightarrow{MA}|$ 取到最小值 $2\sqrt{3}$, $\therefore |\overrightarrow{MN}| \geq ||\overrightarrow{MA}| - \sqrt{3}| \geq |2\sqrt{3} - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$, 故 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = |\overrightarrow{MN}|^2 - 1 \geq 3 - 1 = 2$. 故选 B.



9. BC 解析: 对于 A, 由方差的性质可得 $D(\eta) = 2^2 D(\xi) = 4D(\xi)$, 故 A 错误; 对于 B, 由正态密度曲线的对称性可得 $P(3 < \xi < 6) = P(\xi < 6) - 0.5 = 0.34$, 故 B 正确; 对于 C, 由样本相关系数知识可得, 样本相关系数 r 的绝对值越接近 1, 则成对样本数据的线性相关程度越强, 故 C 正确; 对于 D, 甲组: 第 30 百分位数为

30, 第 50 百分位数为 $\frac{37+m}{2}$, 乙组: 第 30 百分位数为 n , 第 50 百分位数为 $\frac{33+44}{2} = \frac{77}{2}$, 则 $\begin{cases} n=30, \\ \frac{37+m}{2} = \frac{77}{2}, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} n=30, \\ m=40, \end{cases}$ 故 $m+n=70$, 故 D 错误. 故选 BC.

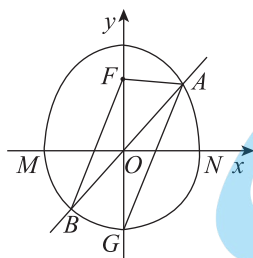
10. BD 解析: 由题知, 椭圆中的几何量 $b=c=3$, 所以 $a = \sqrt{c^2 + b^2} = 3\sqrt{2}$, 则离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故

A 不正确; 因为 $|AB| = |OB| + |OA| = 3 + |OA|$, 由椭圆性质可知 $3 \leq |OA| \leq 3\sqrt{2}$, 所以 $6 \leq |AB| \leq$

$3 + 3\sqrt{2}$, 故 D 正确; 设 A, B 到 y 轴的距离分别为 d_1, d_2 , 则 $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle AOF} + S_{\triangle BOF} = \frac{1}{2} d_1 \cdot |OF| +$

$\frac{1}{2} d_2 \cdot |OF| = \frac{3}{2} (d_1 + d_2)$, 当点 A 在短轴的端点处时, d_1, d_2 同时取得最大值 3, 故 $\triangle ABF$ 面积的最

大值是 9, 故 C 不正确; 由椭圆定义知, $|AF| + |AG| = 2a = 6\sqrt{2}$, 所以 $\triangle AFG$ 的周长 $C_{\triangle AFG} = |FG| + 6\sqrt{2} = 6 + 6\sqrt{2}$, 故 B 正确. 故选 BD.



11. BCD 解析: 对于选项 A, 因为三棱锥 A_1-BCD 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times AA_1 = \frac{8\sqrt{6}}{3}$, 解得 $AA_1 =$

$2\sqrt{6}$, 故选项 A 错误; 对于选项 B, 外接球的半径满足 $4R^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2 = 40$, 故外接球的表面积

$S = 4\pi R^2 = 40\pi$, 故选项 B 正确; 对于选项 D, 因为 $BD \parallel$ 平面 $\alpha, BD \parallel B_1D_1, B_1D_1 \not\subset$ 平面 α , 所以 $B_1D_1 \parallel$

平面 α , 又平面 $A_1B_1C_1D_1 \cap$ 平面 $\alpha = MN, B_1D_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $B_1D_1 \parallel MN$, 又因为四边形

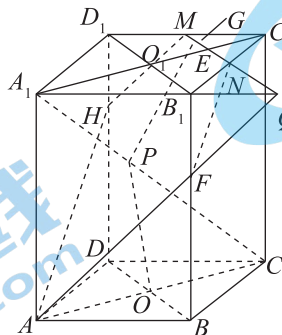
$A_1B_1C_1D_1$ 是正方形, $A_1C_1 \perp B_1D_1$, 所以 $A_1C_1 \perp MN$, 因为侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1, MN \subset$ 底面

$A_1B_1C_1D_1$, 所以 $AA_1 \perp MN$, 又 $A_1C_1 \cap AA_1 = A_1$, 所以 $MN \perp$ 平面 AA_1C_1C , 垂足是 E , 故对任意的

G , 都有 $PG \geq PE$, 又因为 $OO_1 = 2\sqrt{6}, O_1E = \frac{1}{4} A_1C_1 = 1$, 故 $PO + PG \geq PO + PE \geq OE =$

$\sqrt{OO_1^2 + O_1E^2} = 5$, 故选项 D 正确; 对于选项 C, 如图, 延长 MN 交 A_1B_1 的延长线于点 Q , 连接 AQ 交

BB_1 于点 F , 在平面 CC_1D_1D 内作 $MH \parallel AF$ 交 DD_1 于点 H , 连接 AH , 则平面 α 截四棱柱所得的截面是五边形 $AFNMH$, 因为 $B_1Q = B_1N = \frac{1}{2}AB$, 所以此时 $\frac{B_1F}{BB_1} = \frac{1}{3}$, 故 $\frac{1}{3} < \frac{B_1F}{BB_1} < 1$ 时截面是六边形, $0 < \frac{B_1F}{BB_1} \leq \frac{1}{3}$ 时截面是五边形, 故选项 C 正确. 故选 BCD.



12. AD 解析: 对于 A, $\because \frac{e^a}{a+1} = \frac{e^b}{b+1} = 1.01 > 0, \therefore a > -1, b > -1$, 令 $f(x) = \frac{e^x}{1+x} (x > -1)$, 则 $f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0) = 1$, 又 $f(1) > 1.01$, 故 $0 < a < 1, -1 < b < 0$. 令 $h(x) = \ln f(x) - \ln f(-x) = 2x - \ln(x+1) + \ln(-x+1), x \in (-1, 1)$, 则 $h'(x) = 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{-x+1} = 2 - \frac{2}{1-x^2} < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 且 $h(0) = 0, \therefore b \in (-1, 0), \therefore \ln f(b) - \ln f(-b) > 0, \therefore f(b) > f(-b), \therefore f(a) > f(-b), \therefore a > -b$, 即 $a+b > 0$, 故选项 A 正确; 对于 B, $\because (1-c)^e = (1-d)^d = 0.99 > 0, \therefore c < 1, d < 1$, 令 $g(x) = (1-x)e^x (x < 1)$, 则 $g'(x) = -xe^x$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 且 $g(0) = 1$, 又 $g(-1) < 0.99$, 故 $0 < c < 1, -1 < d < 0$. 令 $m(x) = \ln g(x) - \ln g(-x) = 2x - \ln(x+1) + \ln(-x+1) = h(x), x \in (-1, 1)$, 所以 $m(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 且 $m(0) = 0, \therefore c \in (0, 1), \therefore \ln g(c) - \ln g(-c) < 0, \therefore g(c) < g(-c), \therefore g(d) < g(-c), \therefore d < -c$, 即 $c+d < 0$, 故选项 B 错误; 对于 C, $\because f(x) = \frac{1}{g(-x)}, \therefore g(-a) = \frac{1}{f(a)} = \frac{100}{101} > 0.99, -a \in (-1, 0), \therefore g(-a) > g(d)$, 又 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $\therefore -a > d, \therefore a+d < 0$, 故选项 C 错误; 对于 D, 由 C 可知, $g(-b) > g(c), -b \in (0, 1)$, 又 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $\therefore -b < c$, 即 $b+c > 0$, 故选项 D 正确. 故选 AD.

13. $-\frac{3}{5}$ 解析: 因为角 α 的终边与圆 $x^2 + y^2 = 9$ 相交于点 $(\frac{3\sqrt{5}}{5}, t)$, 所以 $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{5} \div 3 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{5}.$$

14. 74 解析: 对于 $(x-2)^5$, 其二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} (-2)^r$, 令 $5-r=1$, 得 $r=4$, 故 $T_5 = C_5^4 x (-2)^4 = 80x$, 对于 $(x-1)^6$, 其二项展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} (-1)^k$, 令 $6-k=1$, 得 $k=5$, 故 $T_6 = C_6^5 x (-1)^5 = -6x$, 所以 $a_1 = 80 - 6 = 74$.

15. $\frac{e^2}{4}$ 解析: 由 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 可得 $g'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x^4}$, 当 $x < 0$ 或 $x > 2$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 的极小值点是 2. 由 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} + k(2\ln x - x)$ 可得 $f'(x) = \frac{x(x-2)e^x}{x^4} +$

$k\left(\frac{2}{x}-1\right)=(x-2)\left(\frac{e^x}{x^3}-\frac{k}{x}\right)$, $x \in (0, +\infty)$, 因为 $f(x)$ 的唯一极值点为 2, 所以 $\frac{e^x}{x^3}-\frac{k}{x} \geq 0$ 或 $\frac{e^x}{x^3}-\frac{k}{x} \leq 0$ 恒成立, 所以 $k \leq \frac{e^x}{x^2}$ 或 $k \geq \frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 因为 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, 所以 $k \leq \frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 则 $k \leq g(x)_{\min} = g(2) = \frac{e^2}{4}$.

16. $10 \times 3^{k-1}$ 解析: 设数列 A_k 中, 0 的个数为 a_k , 1 的个数为 b_k , 则 $a_{k+1} = a_k + 2b_k$, $b_{k+1} = 2a_k + b_k$, 两式相加, 得 $a_{k+1} + b_{k+1} = 3(a_k + b_k)$, 又 $a_1 + b_1 = 5$, \therefore 数列 $\{a_k + b_k\}$ 是以 5 为首项, 3 为公比的等比数列, $\therefore a_k + b_k = 5 \times 3^{k-1}$; 两式相减, 得 $a_{k+1} - b_{k+1} = -(a_k - b_k)$, 又 $a_1 - b_1 = -1$, \therefore 数列 $\{a_k - b_k\}$ 是以 -1 为首项, -1 为公比的等比数列, $\therefore a_k - b_k = (-1)^k$, $\therefore a_k = \frac{5 \times 3^{k-1} + (-1)^k}{2}$, $b_k = \frac{5 \times 3^{k-1} - (-1)^k}{2}$, $\therefore S_k = 0 \times a_k + 1 \times b_k = b_k$, $\therefore S_k + S_{k+1} = \frac{5 \times 3^{k-1} - (-1)^k}{2} + \frac{5 \times 3^k - (-1)^{k+1}}{2} = \frac{5 \times 3^{k-1} + 5 \times 3^k}{2} = 10 \times 3^{k-1}$.

17. 解: (1) 因为 $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{21}}{14}$, $\angle BAC$ 为锐角, 所以 $\cos \angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ (2 分)

因为 $AC = \sqrt{7}$, $AB = 3$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC$, (3 分)

即 $BC^2 = 7 + 9 - 2 \times \sqrt{7} \times 3 \times \frac{5\sqrt{7}}{14} = 1$, 得 $BC = 1$ (4 分)

(2) 在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin \angle DAC} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$, 即 $\frac{CD}{\frac{\sqrt{21}}{14}} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, 所以 $CD = 1$ (6 分)

在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD}$, 即 $-\frac{1}{2} = \frac{AD^2 + 1 - 7}{2AD}$, 解得 $AD = 2$ (8 分)

因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times 3 \times \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ (10 分)

18. 解: (1) $\because a_{n+1}^2 = a_n(a_{n+1} + 2a_n)$, $\therefore (a_{n+1} - 2a_n)(a_{n+1} + a_n) = 0$, 则 $a_{n+1} - 2a_n = 0$ 或 $a_{n+1} + a_n = 0$, $\because a_n > 0$, $\therefore a_{n+1} = 2a_n$, (2 分)

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 公比为 2, $a_1 = 2$, \therefore 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$ (4 分)

(2) 证明: 由 (1) 得 $a_n = 2^n$, $a_{n+1} = 2^{n+1}$,

则 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_n \cdot \sqrt{\log_2 a_{n+1}} + \log_2 a_{n+1} \cdot \sqrt{\log_2 a_n}} = \frac{1}{\log_2 2^n \cdot \sqrt{\log_2 2^{n+1}} + \log_2 2^{n+1} \cdot \sqrt{\log_2 2^n}}$
 $= \frac{1}{n \cdot \sqrt{n+1} + (n+1) \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, (7 分)

\therefore 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, (9 分)

$\therefore S_n < 1$, (10 分)

∵ 当 $n \geq 2$ 时, $S_n - S_{n-1} = b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} > 0$, ∴ 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $\{S_n\}$ 为递增数列,
 ∴ $S_1 \leq S_n$, 即 $\frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq S_n$,
 ∴ $\frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq S_n < 1$ (12分)

19. 解: (1) 当第一天训练的是“篮球运球上篮”且第三天训练的也是“篮球运球上篮”为事件 A;
 当第一天训练的不是“篮球运球上篮”且第三天训练的是“篮球运球上篮”为事件 B.
 由题知, 3 天的训练过程中, 总共的可能情况为 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 种,

所以, $P(A) = \frac{1 \times 2 \times 1}{12} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2 \times 1 \times 1}{12} = \frac{1}{6}$,

所以, 第三天训练的是“篮球运球上篮”的概率 $P = P(A) + P(B) = \frac{1}{3}$ (4分)

(2) 由题知, X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, (5分)

考前最后 6 天训练中, 所有可能的结果有 $3 \times 2^5 = 96$ 种, (6分)

当 $X=0$ 时, 第一天有两种选择, 之后每天都有 1 种选择, 所以, $P(X=0) = \frac{2 \times 1^5}{3 \times 2^5} = \frac{2}{96} = \frac{1}{48}$;

当 $X=1$ 时, 共有 $2+4+4+4+4+2=20$ 种选择, 所以, $P(X=1) = \frac{20}{96} = \frac{5}{24}$;

当 $X=3$ 时, 共有 $8+4+4+8=24$ 种选择, 所以, $P(X=3) = \frac{24}{96} = \frac{1}{4}$;

所以, $P(X=2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=3) = \frac{50}{96} = \frac{25}{48}$, (10分)

所以, X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{48}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{1}{4}$

所以, $E(X) = 0 \times \frac{1}{48} + 1 \times \frac{5}{24} + 2 \times \frac{25}{48} + 3 \times \frac{1}{4} = 2$ (12分)

20. 解: (1) 由题意知 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, ∴ $a = 2c$, 又 $b^2 = a^2 - c^2$, 则 $b = \sqrt{3}c$, (1分)

设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r, 则 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} (|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2|) \cdot r = \frac{1}{2} (2a + 2c) \cdot r = (a+c) \cdot r$.

故当 $\triangle PF_1F_2$ 面积最大时, r 最大, 即点 P 位于椭圆短轴顶点时 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$, (3分)

所以 $\frac{\sqrt{3}}{3} (a+c) = bc$, 把 $a = 2c, b = \sqrt{3}c$ 代入, 解得 $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (5分)

(2) 由题意知, 直线 AB 的斜率存在且不为 0, 设直线 AB 的方程为 $x = ty + 4$,

代入椭圆方程得 $(3t^2 + 4)y^2 + 24ty + 36 = 0, \Delta = (24t)^2 - 144(3t^2 + 4) = 144(t^2 - 4) > 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-24t}{3t^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{36}{3t^2 + 4}$, (7分)

因此可得 $x_1 + x_2 = \frac{32}{3t^2 + 4}$, 所以 AB 中点的坐标为 $(\frac{16}{3t^2 + 4}, \frac{-12t}{3t^2 + 4})$, (8分)

因为 G 是 $\triangle ABQ$ 的外心, 所以 G 是线段 AB 的垂直平分线与线段 BQ 的垂直平分线的交点, 由题意可知 B, Q 关于 x 轴对称, 故 $Q(x_2, -y_2)$,

AB 的垂直平分线方程为 $-t(x - \frac{16}{3t^2 + 4}) = y + \frac{12t}{3t^2 + 4}$, (9分)

令 $y=0$, 得 $x = \frac{4}{3t^2 + 4}$, 即 $G(\frac{4}{3t^2 + 4}, 0)$, 所以 $|GF_2| = |\frac{4}{3t^2 + 4} - 1| = \frac{3t^2}{3t^2 + 4}$, (10分)

又 $|AQ| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} = \sqrt{t^2(y_1 - y_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} = \sqrt{(t^2 + 1)(y_1 + y_2)^2 - 4t^2 y_1 y_2} = \frac{12t^2}{3t^2 + 4}$, (11分)

故 $\frac{|AQ|}{|GF_2|} = 4$, 所以 $\frac{|AQ|}{|GF_2|}$ 为定值, 定值为 4. (12分)

21. 解: (1) 证明: 取线段 AB 的中点 G , 连接 A_1G, EG , 如图所示,

因为 E, G 分别为 BC, AB 的中点, 所以 $EG \parallel AC$,

在三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 中, $A_1C_1 \parallel AC$, 所以, $EG \parallel A_1C_1$, 且 $D \in A_1C_1$,

故 E, G, A_1, D 四点共面. (2分)

因为 $AA_1 \perp$ 平面 $ABC, AG \subset$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp AG$,

因为 $AA_1 = A_1B_1 = AG = 1, AG \parallel A_1B_1, AA_1 \perp AG$,

所以四边形 AA_1B_1G 是正方形, 所以 $AB_1 \perp A_1G$.

又 $AB_1 \perp A_1C_1, A_1C_1 \cap A_1G = A_1, A_1C_1, A_1G \subset$ 平面 A_1DEG , 所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1DEG .

因为 $DE \subset$ 平面 A_1DEG , 所以 $AB_1 \perp DE$ (4分)

(2) 延长 EF 与 C_1B_1 相交于点 Q , 连接 DQ , 则 $DQ \cap A_1B_1 = M$.

因为 F, E 分别为 BB_1 和 BC 的中点, $B_1Q \parallel BE$, 所以 $\frac{B_1Q}{BE} = \frac{B_1F}{BF} = 1$,

则 $B_1Q = BE = \frac{1}{2}BC = B_1C_1$, 所以, B_1 为 C_1Q 的中点.

又因为 D 为 A_1C_1 的中点, 且 $A_1B_1 \cap DQ = M$, 则 M 为 $\triangle A_1C_1Q$ 的重心,

所以 $A_1M = \frac{2}{3}A_1B_1 = \frac{2}{3}$, (7分)

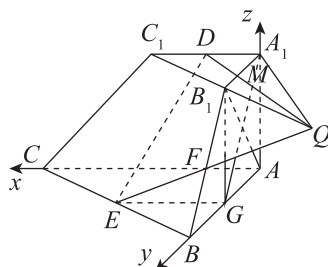
因为 $AA_1 \perp$ 平面 $ABC, AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp AC$.

因为 $AB_1 \perp A_1C_1, A_1C_1 \parallel AC$, 所以 $AB_1 \perp AC$.

又因为 $AA_1 \cap AB_1 = A, AA_1, AB_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B ,

所以 $AC \perp$ 平面 AA_1B_1B , 所以 AC, AB, AA_1 两两垂直,

以 A 为原点, AC, AB, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0), B(0,2,0), C(2,0,0), E(1,1,0), M\left(0, \frac{2}{3}, 1\right)$,

所以, $\vec{AC}=(2,0,0), \vec{AM}=\left(0, \frac{2}{3}, 1\right), \vec{AE}=(1,1,0)$ (9分)

设平面 AMC 的法向量为 $\mathbf{n}_1=(a,b,c)$, 则
$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AC}=2a=0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AM}=\frac{2}{3}b+c=0, \end{cases}$$

取 $b=-3$, 则 $\mathbf{n}_1=(0,-3,2)$ (10分)

设平面 AME 的法向量为 $\mathbf{n}_2=(x,y,z)$, 则
$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \vec{AE}=x+y=0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \vec{AM}=\frac{2}{3}y+z=0, \end{cases}$$

取 $y=-3$, 可得 $\mathbf{n}_2=(3,-3,2)$ (11分)

所以, $\cos\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{13}{\sqrt{13} \times \sqrt{22}} = \frac{\sqrt{286}}{22}$,

故平面 AMC 与平面 AME 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{286}}{22}$ (12分)

22. 解: (1) $f(x)=\ln x-ax+1$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$, (1分)

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 不可能有两个零点, 故舍去; ...

..... (2分)

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < \frac{1}{a}$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > \frac{1}{a}$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a}$.

要使 $f(x)$ 有两个零点, 则 $f(x)_{\max} = \ln \frac{1}{a} > 0$, 解得 $0 < a < 1$ (3分)

又 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} - a \cdot \frac{1}{e} + 1 = -\frac{a}{e} < 0$, $f\left(\frac{4}{a^2}\right) = \ln \frac{4}{a^2} - \frac{4}{a} + 1 < \frac{2}{a} - \frac{4}{a} + 1 = 1 - \frac{2}{a} < 0$,

所以当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{a}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{a}, \frac{4}{a^2}\right)$ 上各有一个零点 x_2, x_1 , (4分)

且 $x_1 > 2x_2$, 所以
$$\begin{cases} \ln x_1 - ax_1 + 1 = 0, \\ \ln x_2 - ax_2 + 1 = 0, \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的单调性知, 当 $x \in (x_2, x_1)$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$.

因为 $x_2 < 2x_2 < x_1$, 所以 $f(2x_2) > 0$, 即 $\ln(2x_2) - 2ax_2 + 1 > \ln x_2 - ax_2 + 1$,

所以 $ax_2 < \ln 2$, 而 $\ln x_2 + 1 = ax_2$, 即 $\ln x_2 + 1 < \ln 2$, 所以 $0 < x_2 < \frac{2}{e}$, 而 $a = \frac{\ln x_2 + 1}{x_2}$.

令 $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$, $x \in \left(0, \frac{2}{e}\right)$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$,

因为 $x \in \left(0, \frac{2}{e}\right)$, 所以 $-\ln x > -\ln \frac{2}{e} > 0$, 所以 $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{2}{e}\right)$ 上单调递增,
 所以 $h(x) < h\left(\frac{2}{e}\right) = \frac{\ln 2}{\frac{2}{e}} = \frac{e \ln 2}{2}$, 所以 $a \in \left(0, \frac{e \ln 2}{2}\right)$ (6分)

(2) 因为 $x_1 > 2x_2 > 0$, 所以 $e \cdot \left(\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2}\right) \geq e \cdot 2\sqrt{x_1 x_2}$, 当且仅当 $x_1 = x_2$ 时取等号,
 而 $x_1 > 2x_2 > 0$, 故 $e \cdot \left(\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2}\right) > e \cdot 2\sqrt{x_1 x_2}$, (7分)

要证 $e \cdot \left(\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2}\right) > 4\sqrt{2}$, 即证 $e \cdot 2\sqrt{x_1 x_2} \geq 4\sqrt{2}$, 即证 $x_1 x_2 \geq \frac{8}{e^2}$, 即证 $\ln x_1 x_2 \geq \ln \frac{8}{e^2}$,
 即证 $\ln x_1 + \ln x_2 \geq 3\ln 2 - 2$ (8分)

设 $t = \frac{x_1}{x_2}$, 因为 $x_1 > 2x_2 > 0$, 所以 $t > 2$,

由(1)得 $\begin{cases} \ln x_1 + 1 = a x_1, \\ \ln x_2 + 1 = a x_2, \end{cases}$ 两式作差, 化简得 $\ln x_2 = \frac{\ln t}{t-1} - 1$, $\ln x_1 = \frac{\ln t}{t-1} - 1 + \ln t$,

所以 $\ln x_1 + \ln x_2 = \frac{2\ln t}{t-1} + \ln t - 2$ (9分)

令 $g(t) = \frac{2\ln t}{t-1} + \ln t - 2, t > 2$, 则 $g'(t) = \frac{t^2 - 1 - 2t \ln t}{t(t-1)^2}$.

令 $\varphi(t) = t^2 - 1 - 2t \ln t$, 则 $\varphi'(t) = 2t - 2 - 2\ln t, \varphi''(t) = 2 - \frac{2}{t} > 0$, 易知 $\varphi'(t)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

故 $\varphi'(t) > \varphi'(2) = 2 - 2\ln 2 > 0$, 所以 $\varphi(t)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\varphi(t) > \varphi(2) = 3 - 4\ln 2 > 0$,

所以 $g(t)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(t) > g(2) = 3\ln 2 - 2$, 即 $\ln x_1 + \ln x_2 > 3\ln 2 - 2$ 得证.

所以不等式 $e \cdot \left(\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2}\right) > 4\sqrt{2}$ 得证. (12分)