2023—2024 学年度上学期高三年级四调考试

数　学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。共 4 页,总分 150 分,考试时间120 分钟。

第Ⅰ卷(选择题　共 60 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1<x<1\}$,$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$,则 $A\cap B=$

A. $[0,1)$　　B. $(-1,2]$　　C. $(1,2]$　　D. $(0,1)$

2. 已知直线 $l_1:ax+y-3=0$ 和直线 $l_2:3x-2y+3=0$ 垂直,则 $a=$

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

3. 已知圆锥的底面半径为 2,高为 $4\sqrt{2}$,则该圆锥的侧面积为

A. 4π　　B. 12π　　C. 16π　　D. $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi$

4. 已知函数 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=x(1+x)$,则 $f(-1)=$

A. -1　　B. -2　　C. 2　　D. 0

5. 已知 α 是第一象限角,$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,则 $\cos 2\alpha-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$

A. $-\dfrac{13}{5}$　　B. $-\dfrac{7}{5}$　　C. $\dfrac{13}{5}$　　D. $\dfrac{1}{10}$

6. 记 S_n 为等比数列$\{a_n\}(a_n>0)$的前 n 项和,且 $a_1a_3=16$,S_1,$\dfrac{3}{4}S_2$,$\dfrac{1}{2}S_3$ 成等差数列,则 $S_6=$

A. 126　　B. 128　　C. 254　　D. 256

7. 已知直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴,y 轴交于 A,B 两点,点 P 在圆$(x-2)^2+y^2=2$ 上,则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是

A. $[2,6]$　　B. $[4,8]$　　C. $[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$　　D. $[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

8. 设 $a=2\ln 0.99$,$b=\ln 0.98$,$c=\sqrt{0.96}-1$,则

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,已知 $S_n=-n^2+7n$,则下列说法正确的是

A. $\{a_n\}$是递增数列　　B. $a_{10}=-14$

C. 当 $n>4$ 时,$a_n<0$　　D. 当 $n=3$ 或 4 时,S_n 取得最大值

10. 已知函数 $f(x)=(2-x)e^x$,则下列说法错误的是

A. $f(x)$的图象在 $x=2$ 处的切线斜率大于 0

B. $f(x)$的最大值为 e

C. $f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增

D. 若 $f(x)=a$ 有两个零点,则 $a<e$

11. 已知 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$为偶函数,$g(x)=\sin(\omega x+\varphi)$,则下列结论正确的是

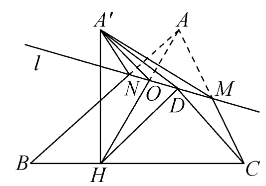
A. $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$

B. 若 $g(x)$的最小正周期为 3π,则 $\omega=\dfrac{2}{3}$

C. 若 $g(x)$在区间$(0,\pi)$上有且仅有 3 个最值点,则 ω 的取值范围为$\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{10}{3}\right]$

D. 若 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,则 ω 的最小值为 2

12. 如图,在$\triangle ABC$ 中,$\angle B=\dfrac{\pi}{2}$,$AB=\sqrt{3}$,$BC=1$,过 AC 中点 M 的直线 l 与线段 AB 交于点 N.将$\triangle AMN$ 沿直线 l 翻折至$\triangle A'MN$,且点 A'在平面 $BCMN$ 内的射影 H 在线段 BC 上,连接 AH 交 l 于点 O,D 是直线 l 上异于 O 的任意一点,则



A. $\angle A'DH\geqslant\angle A'DC$

B. $\angle A'DH\leqslant\angle A'OH$

C. 点 O 的轨迹的长度为$\dfrac{\pi}{6}$

D. 直线 $A'O$ 与平面 $BCMN$ 所成角的余弦值的最小值为 $8\sqrt{3}-13$

第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$,$\boldsymbol{b}=\left(k,\dfrac{5}{2}\right)$,若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $k=$_______.

14. 写出一个圆心在 $y=x$ 上,且与直线 $y=-x$ 和圆$(x-3)^2+(y-3)^2=2$ 都相切的圆的方程_______.

15. 已知表面积为 100π 的球面上有 S,A,B,C 四点,$\triangle ABC$ 是等边三角形,球心 O 到平面 ABC 的距离为 3,若平面 $SAB\perp$平面 ABC,则三棱锥 S-ABC 体积的最大值为_______.

16. 若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\dfrac{4}{3}$,$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$,则$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2017}}$的整数部分是_______.

班级

姓名

得分

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且 $c\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin C$.

(1)求 B；

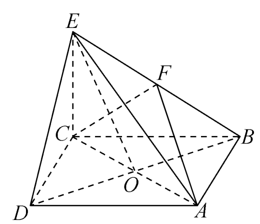
(2)若 BD 是 AC 边上的高，且 $BD=1$，$b=\sqrt{3}$，求△ABC 的周长.

18.（12 分）

如图，在四棱锥 E-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle ADC=60^\circ$，AC 与 BD 交于点 O，$EC\perp$底面 $ABCD$，F 为 BE 的中点，$AB=CE$.

(1)证明：DE∥平面 ACF；

(2)求 AF 与平面 EBD 所成角的正弦值.



19.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$是各项都为正整数的等比数列，$a_1=3$，且 a_3 是 a_2 与 $\dfrac{3}{4}a_4$ 的等差中项，数列$\{b_n\}$满足 $b_1=1$，$b_{n+1}=2b_n+1$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若 $k\cdot\dfrac{b_n+5}{2}-a_n\geqslant 8n+2k-24$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

20.（12 分）

已知点 P 到 $A(-2,0)$的距离是点 P 到 $B(1,0)$的距离的 2 倍.

(1)求点 P 的轨迹方程；

(2)若点 P 与点 Q 关于点 B 对称，过 B 的直线与点 Q 的轨迹 Γ 交于 E，F 两点，则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-a\sin x-1(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$上的单调性；

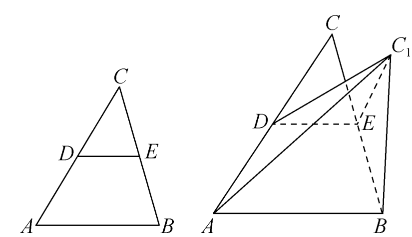
(2)当 $a=-3$ 时，证明：对 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)<e^x+x+1-2e^{-2x}$.

22.（12 分）

如图①，在△ABC 中，$BC=4$，$AB=\sqrt{13}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，$E$，$D$ 分别为 BC，AC 的中点，以 DE 为折痕，将△DCE 折起，使点 C 到 C_1 的位置，且 $BC_1=2$，如图②.

(1)设平面 $C_1AD\cap$平面 $BEC_1=l$，证明：$l\perp$平面 ABC_1；

(2)若 P 是棱 C_1D 上一点(不含端点)，过 P，B，E 三点作该四棱锥的截面与平面 BEC_1 所成的锐二面角的正切值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求该截面将四棱锥分成上下两部分的体积之比.



①　　②