高三数学试卷

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x|-3\leqslant x<4\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{1\}$　　B. $\{1,4\}$

C. $\{-2,1\}$　　D. $\{-2,1,4\}$

2. $(\frac{3^{\sqrt{7}}}{27})^{\sqrt{7}+3}=$

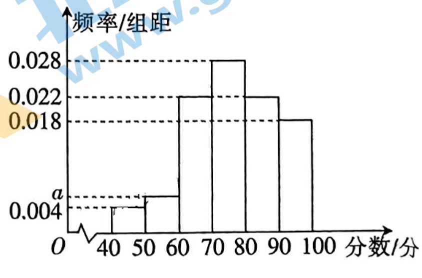
A. 9　　B. $\frac{1}{9}$　　C. 3　　D. $\frac{\sqrt{3}}{9}$

3. 若圆 C 与 y 轴相切,则圆 C 的方程可以为

A. $x^2+y^2=1$　　B. $x^2+(y-1)^2=1$

C. $(x-1)^2+y^2=1$　　D. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

4. 某单位组织开展党史知识竞赛活动,现把 100 名人员的成绩(单位:分)绘制成频率分布直方图(每组数据均左闭右开),则



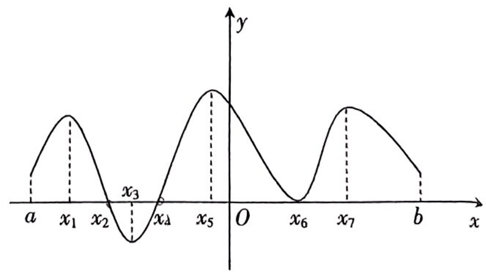
A. $a=0.006$

B. 估计这 100 名人员成绩的中位数为 76.6

C. 估计这 100 名人员成绩的平均数为 76.2(同一组数据用该区间的中点值作代表)

D. 若成绩在[80,100)内为优秀,则这 100 名人员中成绩优秀的有 50 人

5. 已知定义在区间 (a,b) 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,$f'(x)$的图象如图所示,则



A. $f(x)$在(x_4,b)上有增也有减

B. $f(x)$有 2 个极小值点

C. $f(x)\leqslant f(x_5)$

D. $f(x)$有 1 个极大值点

6. 一百零八塔始建于西夏时期，是中国现存最大且排列最整齐的塔群之一，塔群随山势凿石分阶而建，自上而下一共 12 层，第 1 层有 1 座塔，从第 2 层开始每层的塔数均不少于上一层的塔数，总计 108 座塔. 已知包括第 1 层在内的其中 10 层的塔数可以构成等差数列$\{a_n\}$，剩下的 2 层的塔数分别与上一层的塔数相等，第 1 层与第 2 层的塔数不同，则下列结论错误的是

A. 第 3 层的塔数为 3

B. 第 6 层的塔数为 9

C. 第 4 层与第 5 层的塔数相等

D. 等差数列$\{a_n\}$的公差为 2

7. 住房的许多建材都会释放甲醛. 甲醛是一种无色、有着刺激性气味的气体，对人体健康有着极大的危害. 新房入住时，空气中甲醛浓度不能超过 0.08 mg/m^3，否则，该新房达不到安全入住的标准. 若某套住房自装修完成后，通风 $x(x=1,2,3,\cdots,50)$ 周与室内甲醛浓度 y（单位：mg/m^3）之间近似满足函数关系式 $y=0.48-0.1f(x)(x\in\mathbf{N}^*)$，其中 $f(x)=\log_a[k(x^2+2x+1)](k>0,x=1,2,3,\cdots,50)$，且 $f(2)=2$，$f(8)=3$，则该住房装修完成后要达到安全入住的标准，至少需要通风

A. 17 周　　B. 24 周　　C. 28 周　　D. 26 周

8. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的每个顶点都在球 O 的球面上，球 O 的表面积为 125π，$AP\perp$平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是等腰梯形，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$AB=AD=AP=m$，$BC=2m$，则 $m=$

A. 4　　B. 5　　C. $2\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{5}$

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 某圆柱的侧面展开图是长为 4 cm、宽为 2 cm 的矩形，则该圆柱的体积可能为

A. $\frac{4}{\pi}$ cm^3　　B. $\frac{6}{\pi}$ cm^3　　C. $\frac{8}{\pi}$ cm^3　　D. $\frac{12}{\pi}$ cm^3

10. 设符号函数 $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}-1,x<0,\\0,x=0,\\1,x>0.\end{cases}$ 已知函数 $f(x)=\mathrm{sgn}(-\sin x)\sin 2x$，则

A. $f(x)$是偶函数

B. $f(x)$在$[\frac{\pi}{2},\pi]$上先增后减

C. $f(x)$的最小正周期为 π

D. $f(x)$的图象关于点$(-\frac{\pi}{2},0)$对称

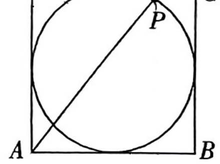
11. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，P 是正方形 $ABCD$ 的内切圆上任意一点，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则

A. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$的最大值为 4

B. $\lambda-\mu$ 的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}$的最大值为 2

D. $\lambda+\mu$ 的最大值为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$



12. 已知双曲线 $C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的上焦点为 F，过焦点 F 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 A，并与另一条渐近线交于点 B，若 $|FB|=4|AF|$，则 C 的离心率可能为

A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 复数 $\frac{5-i}{5+2i}$ 的实部与虚部之和为___▲___.

14. 若抛物线 C 的焦点到准线的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，且 C 的开口朝上，则 C 的标准方程为___▲___.

15. 2023 年 2 月 6 日，土耳其发生 7.8 级地震，我国在第一时间派出救援队进行救援. 已知某救援队共有 8 人，根据救灾安排，该救援队需要安排救援人员到三个地区实施救援，每个地区至少安排 2 人，每人只去一个地区，则共有___▲___种安排方案.

16. 当 $x,y\in(0,+\infty)$ 时，$x^2+\frac{5}{4}y^2-4y+\frac{4}{xy}$ 的最小值为___▲___.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 a,b,c 是公差为 2 的等差数列.

(1)若 $2\sin C=3\sin A$，求△ABC 的面积.

(2)是否存在正整数 b，使得△ABC 的外心在△ABC 的外部？若存在，求 b 的取值集合；若不存在，请说明理由.

18. (12 分)

国产科幻电影《流浪地球 2》在给观众带来视觉震撼的同时，也引领观众对天文、航天、数字科技等领域展开了无限遐想. 某校为激发学生对天文、航天、数字科技三类相关知识的兴趣，举行了一次知识竞赛(竞赛试题中天文、航天、数字科技三类相关知识题量占比分别为 40%，40%，20%). 某同学回答天文、航天、数字科技这三类问题中每个题的正确率分别为 $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3}$.

(1)若该同学在该题库中任选一题作答，求他回答正确的概率；

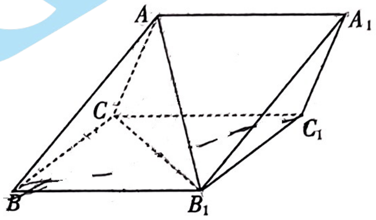
(2)若该同学从这三类题中各任选一题作答，每回答正确一题得 2 分，回答错误不得分，设该同学回答三题后的总得分为 X 分，求 X 的分布列及数学期望.

19.(12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 BB_1C_1C 为菱形,$AC=AB_1$.

(1)证明:$AB\perp B_1C$.

(2)若 $AC\perp AB_1$,$\angle CBB_1=\frac{\pi}{3}$,$AB=BC$,求平面 AB_1C 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值.



20.(12 分)

已知两个正项数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足$\frac{1}{a_n-b_n}=b_n$,$\frac{1}{a_n}=\frac{b_n}{n^2+1}$.

(1)求$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2)用$[x]$表示不超过 x 的最大整数,求数列$\{[a_n+a_{n+1}]\cdot 2^{b_n}\}$的前 n 项和 S_n.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-\ln x-a-1$.

(1)若$(1,e+1)$为曲线 $y=f(x)$上一点,求曲线 $y=f(x)$在该点处的切线方程;

(2)若 $a>0$,证明:$f(x)\geqslant(1-a)\ln a$.

22.(12 分)

设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$A(-2,0)$,$B(2,0)$分别是椭圆的左、右顶点,动直线 l 过点 $C(6,0)$,当直线 l 经过点 $D(-2,\sqrt{2})$时,直线 l 与椭圆相切.

(1)求椭圆的方程;

(2)若直线 l 与椭圆交于 P,Q(异于 A,B)两点,且直线 AP 与 BQ 的斜率之和为$-\frac{1}{2}$,求直线 l 的方程.

密 封 线 内 不 要 答 题

高三数学试卷参考答案

1. C　因为 $A=\{x|x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|-3\leqslant x<4\}$，所以 $A\cap B=\{-2,1\}$.

2. B　$(\frac{3^{\sqrt{7}}}{27})^{\sqrt{7}+3}=(\frac{3^{\sqrt{7}}}{3^3})^{\sqrt{7}+3}=(3^{\sqrt{7}-3})^{\sqrt{7}+3}=3^{(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)}=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

3. C　依题意可得圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$，故选 C.

4. C　由直方图可得 $(0.004+a+0.018+0.022\times2+0.028)\times10=1$，所以 $a=0.005$，故 A 错误.

因为前 3 组的频率之和为 $(0.004+0.006+0.022)\times10=0.32$，前 4 组的频率之和为 $(0.004+0.006+0.022+0.028)\times10=0.6$，所以中位数在 $[70,80)$ 内，设中位数为 x，则 $0.32+\frac{x-70}{10}\times0.28=0.5$，所以 $x=\frac{535}{7}\approx76.4$，故 B 错误.

由直方图可得平均数为 $(0.004\times45+0.006\times55+0.018\times95+0.022\times65+0.022\times85+0.028\times75)\times10=76.2$，所以 C 正确.

因为成绩在 $[80,100)$ 内的频率为 0.4，所以这 100 名人员中成绩优秀的有 40 人，故 D 错误.

5. D　由图可得，当 $x\in(a,x_2)$，(x_4,b) 时，$f'(x)\geqslant0$，当 $x\in(x_2,x_4)$ 时，$f'(x)<0$.

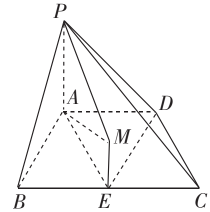
所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 (a,x_2)，(x_4,b)，单调递减区间为 (x_2,x_4)，

所以 $f(x)$ 有 1 个极大值点，1 个极小值点.

6. B　设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 若 $d=1$，则这 10 层的塔数之和为 $10\times1+\frac{10\times9}{2}=55$，则最多有 $55+10+10=75$ 座塔，不符合题意；若 $d\geqslant3$，则这 10 层的塔数之和不少于 $10\times1+\frac{10\times9}{2}\times3>108$，不符合题意. 所以 $d=2$，这 10 层的塔数之和为 $10\times1+\frac{10\times9}{2}\times2=100$，塔数依次是 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19，依题意剩下 2 层的塔数为 3 与 5. 所以这 12 层塔的塔数分别为 1,3,3,5,5,7,9,11,13,15,17,19，因此 A,C,D 正确，B 错误.

7. D　$f(x)=\log_a[k(x+1)^2]=\log_a k+2\log_a(x+1)$，由 $f(2)=2$，$f(8)=3$，得 $\log_a k+2\log_a(2+1)=2$，$\log_a k+2\log_a(8+1)=3$，两式相减得 $\log_a 9=1$，则 $a=9$，所以 $\log_a k+2=3$，$k=9$. 该住房装修完成后要达到安全入住的标准，则 $0.48-0.1f(x)\leqslant0.08$，则 $f(x)\geqslant4$，即 $1+2\log_9(x+1)\geqslant4$，解得 $x\geqslant26$，故至少需要通风 26 周.

8. B　如图，取 BC 的中点 E，过 E 作 $ME\parallel AP$，使得 $2ME=AP$，连接 AE，DE，AM，PM. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，由 $BE=AB$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，可得 $\triangle ABE$ 为正三角形. 因为底面 $ABCD$ 是等腰梯形，所以 $\triangle CDE$ 为正三角形，所以 $BE=AE=DE=EC=m$. 由 $AP\perp$ 平面 $ABCD$，得 $ME\perp$ 平面

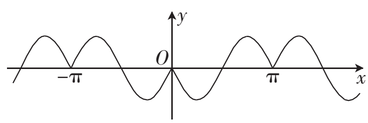


$ABCD$. 又 $2ME=AP$，所以 M 到 A,B,C,D,P 的距离相等，则 M 为球 O 的球心. 在 $\mathrm{Rt}\triangle MAE$ 中，$AM=\sqrt{AE^2+ME^2}=\sqrt{m^2+(\frac{1}{2}m)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}m$，所以球 O 的表面积为 $4\pi\times(\frac{\sqrt{5}}{2}m)^2=5\pi m^2=125\pi$，解得 $m=5$.

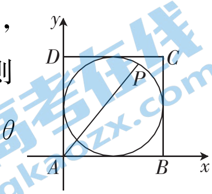
9. AC　设该圆柱的底面半径为 r cm. 若该圆柱的高为 2 cm，则 $2\pi r=4$，即 $r=\frac{2}{\pi}$，该圆柱的体积 $V=2\pi r^2=\frac{8}{\pi}\ \mathrm{cm}^3$；若该圆柱的高为 4 cm，则 $2\pi r=2$，即 $r=\frac{1}{\pi}$，该圆柱的体积 $V=4\pi r^2=\frac{4}{\pi}\ \mathrm{cm}^3$.

10. ABD　$f(x)=\mathrm{sgn}(-\sin x)\sin 2x=\begin{cases}\sin 2x,\sin x<0,\\0,\sin x=0,\\-\sin 2x,\sin x>0.\end{cases}$

作出 $f(x)$ 的部分图象，如图所示，由图可知，$f(x)$ 是偶函数，$f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上先增后减，$f(x)$ 的最小正周期为 2π，$f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 对称.



11. ABD　以 A 为坐标原点建立直角坐标系，如图所示，则 $B(2,0)$，$D(0,2)$，内切圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，可设 $P(1+\cos\theta,1+\sin\theta)$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2+2\cos\theta$ 的最大值为 4，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}=2\sin\theta-2\cos\theta=2\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.



由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，得 $\lambda=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$，$\mu=\frac{1}{2}(1+\sin\theta)$，$\lambda-\mu=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$，$\lambda+\mu=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，所以 $\lambda-\mu$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\lambda+\mu$ 的最大值为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. BD　当 $a=b$ 时，直线 AF 与另一条渐近线平行，所以 $a\neq b$.

当 $a>b$ 时，如图 1，过 F 作另一条渐近线的垂线，垂足为 P，则 $|AF|=|PF|$，由 $|FB|=4|AF|$，得 $\sin\angle PBF=\frac{|PF|}{|BF|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$，则 $\cos\angle AOP=\frac{1}{4}$，所以 $2\cos^2\angle AOF-1=\frac{1}{4}$，则 $\cos\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{8}}$，$\sin\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{8}}$，所以 $\tan\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{5}}$，则 $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{3}{5}}$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\frac{3}{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

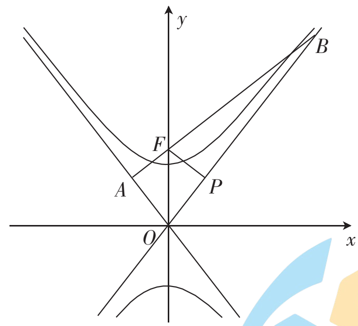


图 1

当 $a<b$ 时，如图 2，过 F 作另一条渐近线的垂线，垂足为 Q，则 $|AF|=|QF|$，由 $|FB|=4|AF|$，得 $\sin\angle QBF=\frac{|QF|}{|BF|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$，则 $\cos\angle AOB=\frac{1}{4}$，则 $\cos\angle AOQ=-\frac{1}{4}$，所以 $2\cos^2\angle AOF-1=-\frac{1}{4}$，则 $\cos\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{8}}$，$\sin\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{8}}$，所以 $\tan\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{3}}$，则 $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{5}{3}}$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\frac{5}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

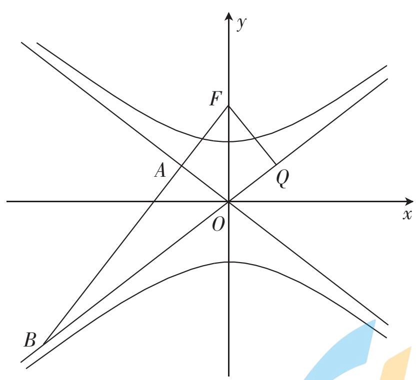


图 2

综上，C 的离心率为 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

13. $\frac{8}{29}$　因为 $\frac{5-\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}=\frac{(5-\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{5^2+2^2}=\frac{23-15\mathrm{i}}{29}=\frac{23}{29}-\frac{15}{29}\mathrm{i}$，所以 $\frac{5-\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$ 的实部与虚部之和为 $\frac{23}{29}-\frac{15}{29}=\frac{8}{29}$.

14. $x^2=\sqrt{5}y$　依题意可设 C 的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$，因为 C 的焦点到准线的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $p=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 C 的标准方程为 $x^2=\sqrt{5}y$.

15. 2940　人数分配有 2，2，4 和 3，3，2 两种情形，所以共有 $(\frac{C_8^4C_4^2C_2^2}{A_2^2}+\frac{C_8^3C_5^3C_2^2}{A_2^2})A_3^3=490\times6=2940$ 种安排方案.

16. 0　$x^2+\frac{5}{4}y^2-4y+\frac{4}{xy}=x^2-xy+\frac{1}{4}y^2+y^2-4y+xy+\frac{4}{xy}\geqslant(x-\frac{1}{2}y)^2+(y-2)^2-4+2\sqrt{xy\cdot\frac{4}{xy}}=(x-\frac{1}{2}y)^2+(y-2)^2\geqslant0$，当且仅当 $x=1,y=2$ 时，$x^2+\frac{5}{4}y^2-4y+\frac{4}{xy}=0$，所以 $x^2+\frac{5}{4}y^2-4y+\frac{4}{xy}$ 的最小值为 0.

17. 解：(1) $\because 2\sin C=3\sin A$，$\therefore$ 由正弦定理得 $2c=3a$，………………………… 1 分

$\because a,b,c$ 是公差为 2 的等差数列，$\therefore a=b-2,c=b+2$，………………………… 2 分

$\therefore 2(b+2)=3(b-2)$，$\therefore b=10$，$\therefore a=8,c=12$，………………………… 3 分

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{64+100-144}{2\times8\times10}=\frac{1}{8}$，………………………… 4 分

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

故△ABC 的面积为 $\frac{1}{2}\times8\times10\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=15\sqrt{7}$. ………………………… 5 分

(2) 假设存在正整数 b，使得△ABC 的外心在△ABC 的外部，则△ABC 为钝角三角形，………………………… 6 分

依题意可知 $c>b>a$，则 C 为钝角，………………………… 7 分

则 $\cos C=\frac{(b-2)^2+b^2-(b+2)^2}{2b(b-2)}=\frac{b-8}{2(b-2)}<0$，

解得 $2<b<8$，………………………… 8 分

$\because b+b-2>b+2$，$\therefore b>4$，………………………… 9 分

$\therefore 4<b<8$，

$\therefore$ 存在正整数 b，使得△ABC 的外心在△ABC 的外部，此时整数 b 的取值集合为 $\{5,6,7\}$.
………………………… 10 分

18. 解：(1) 设所选的题目为天文、航天、数字科技相关知识的题目分别为事件 A_1,A_2,A_3，所选的题目回答正确为事件 B，则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.4\times\frac{2}{3}+0.4\times\frac{1}{2}+0.2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$. ………………………… 4 分

(2) X 的可能取值为 0,2,4,6，………………………… 5 分

$P(X=0)=(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{9}$，………………………… 6 分

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}=\frac{7}{18}$，………………………… 7 分

$P(X=4)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}=\frac{7}{18}$，………… 8 分

$P(X=6)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，………………………… 9 分

则 X 的分布列为

X	0	2	4	6
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$

………………………………………………………………………… 10 分

$E(X)=0\times\frac{1}{9}+2\times\frac{7}{18}+4\times\frac{7}{18}+6\times\frac{1}{9}=3$. ………………………… 12 分

19. (1)证明：连接 BC_1，交 B_1C 于 O，连接 AO. ………………………… 1 分

因为侧面 BB_1C_1C 为菱形，所以 $B_1C\perp BC_1$. ………………………… 2 分

因为 $AC=AB_1$，O 为 B_1C 的中点，所以 $AO\perp B_1C$. ………………………… 3 分

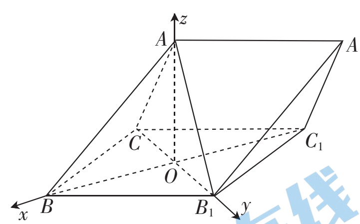
因为 $AO\cap BC_1=O$，且 $AO,BC_1\subset$平面 AOB，所以 $B_1C\perp$平面 AOB. ………… 4 分

因为 $AB\subset$平面 AOB，所以 $AB\perp B_1C$. ………………………… 5 分

(2)解：设 $AB=BC=2$，因为$\angle CBB_1=\frac{\pi}{3}$，所以 $B_1C=2$，$OB=\sqrt{3}$. ………… 6 分

因为 $AC\perp AB_1$，所以 $AO=1$.

因为 $AO^2+OB^2=AB^2$，所以 $AO\perp OB$，所以 OA,OB,OB_1 两两垂直. ………………… 7 分



以 O 为坐标原点，分别以$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{OA}$的方向为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B_1(0,1,0)$，$C_1(-\sqrt{3},0,0)$，$A_1(-\sqrt{3},1,1)$，所以$\overrightarrow{B_1C_1}=(-\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{C_1A_1}=(0,1,1)$. ………………………… 8 分

设平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=-\sqrt{3}x-y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=y+z=0,\end{cases}$令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$. ………… 9 分

取平面 AB_1C 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，………………………… 10 分

因为 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{7}\times1}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，………………………… 11 分

所以平面 AB_1C 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$. ………………………… 12 分

20. 解：(1)由$\frac{1}{a_n}=\frac{b_n}{n^2+1}$，得 $a_nb_n=n^2+1$，………………………… 1 分

由$\frac{1}{a_n-b_n}=b_n$，得 $a_nb_n=1+b_n^2$，………………………… 2 分

两式相减得 $b_n^2=n^2$，因为$\{b_n\}$是正项数列，所以 $b_n=n$，………………………… 4 分

所以 $a_n=\frac{n^2+1}{b_n}=n+\frac{1}{n}$. ………………………… 5 分

(2)$[a_n+a_{n+1}]=[n+\frac{1}{n}+n+1+\frac{1}{n+1}]=[2n+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}]=\begin{cases}4,n=1,\\2n+1,n\geq2,\end{cases}$ ……… 6 分

则当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=4\times2+5\times2^2+7\times2^3+\cdots+(2n+1)\times2^n$，…………………………………… 7 分

所以 $2S_n=16+5\times2^3+7\times2^4+\cdots+(2n+1)\times2^{n+1}$，………………………………………… 8 分

两式相减得 $-S_n=12+2\times(2^3+2^4+\cdots+2^n)-(2n+1)\times2^{n+1}$ ……………………………… 9 分

$=12+2\times\dfrac{2^3-2^n\times2}{1-2}-(2n+1)\times2^{n+1}=(1-2n)\times2^{n+1}-4$，…………………………… 10 分

即 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$. ………………………………………………………………………… 11 分

因为 $S_1=8$ 满足 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$，所以 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$. …………………………… 12 分

21.(1)解：因为点 $(1,e+1)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，所以 $f(1)=e-a-1=e+1$，所以 $a=-2$，……
……………………………………………………………………………………………………… 2 分

则 $f(x)=e^x-\ln x+1$，$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=e-1$，…………………………………………… 3 分

故过点 $(1,e+1)$ 的切线 l 的方程为 $y-(e+1)=(e-1)(x-1)$，即 $y=(e-1)x+2$. ………
……………………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：要证明 $f(x)\geqslant(1-a)\ln a$，即要证 $e^x-\ln x-a-1\geqslant(1-a)\ln a$，

即证 $e^x-\ln x\geqslant(1-a)\ln a+a+1$. 设 $h(x)=e^x-\ln x$，则 $h'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$. …………… 5 分

当 $h'(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$ 时，$e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，则 $h(x)=e^x-\ln x$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=e^{x_0}-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0$. ……………………………………… 6 分

令 $g(a)=(1-a)\ln a+a+1$，则 $g'(a)=-\ln a+\dfrac{1}{a}$，

当 $g'(a_0)=-\ln a_0+\dfrac{1}{a_0}=0$ 时，$\dfrac{1}{a_0}=\ln a_0$，易知 $g(a)=(1-a)\ln a+a+1$ 在 $(0,a_0)$ 上单调递增，在 $(a_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(a)_{\max}=(1-a_0)\ln a_0+a_0+1=\dfrac{1-a_0}{a_0}+a_0+1=\dfrac{1}{a_0}+a_0$. ………………………… 8 分

又因为 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 互为反函数，两函数的图象均与函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象相交，设两交点分别为 $A(x_0,e^{x_0})$，$B(a_0,\ln a_0)$，则它们关于直线 $y=x$ 对称，所以 $x_0=\ln a_0$，$a_0=e^{x_0}$. ……
……………………………………………………………………………………………………… 10 分

又因为 $\dfrac{1}{a_0}=\ln a_0=x_0$，且 $\dfrac{1}{x_0}=e^{x_0}$，所以 $\ln\dfrac{1}{x_0}=x_0=\dfrac{1}{a_0}$，

$h(x)_{\min}-g(a)_{\max}=\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0-\dfrac{1}{a_0}-a_0=a_0+\dfrac{1}{a_0}-\dfrac{1}{a_0}-a_0=0$，所以 $f(x)\geqslant(1-a)\ln a$ 成立.
……………………………………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)依题意可得 $a=2$. ………………………………………………………………………… 1 分

当直线 l 经过点 $D(-2,\sqrt{2})$ 时，l 的方程为 $x=-4\sqrt{2}y+6$，…………………………………… 2 分

代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，整理得 $(8b^2+1)y^2-12\sqrt{2}b^2y+8b^2=0$，……………………………… 3 分

$\Delta=(-12\sqrt{2}b^2)^2-4(8b^2+1)\times 8b^2=32b^2(b^2-1)=0$， …………………………………… 4 分

解得 $b^2=1$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………… 5 分

(2)依题意可得直线 l 的斜率不为 0，可设 l：$x=my+6$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} x=my+6, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+12my+32=0$，

则 $\begin{cases} y_1+y_2=-\frac{12m}{m^2+4}, \\ y_1y_2=\frac{32}{m^2+4}, \end{cases}$ …………………………………………………………………………… 6 分

则 $k_{BP}k_{BQ}=\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2}{(my_1+4)(my_2+4)}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16}$

$=\frac{\frac{32}{m^2+4}}{\frac{32m^2}{m^2+4}-\frac{48m^2}{m^2+4}+16}=\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………… 8 分

因为 $k_{AP}k_{BP}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{1-\frac{x_1^2}{4}}{x_1^2-4}=-\frac{1}{4}$， ………………………………………………… 9 分

所以 $k_{AP}=-\frac{1}{2}k_{BQ}$. 又因为 $k_{AP}+k_{BQ}=-\frac{1}{2}$，所以 $k_{BQ}=-1$， …………………………… 10 分

则直线 BQ 的方程为 $y=-x+2$，与 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立得 $Q(\frac{6}{5},\frac{4}{5})$， ………………………… 11 分

所以 l 的方程为 $y=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}-6}(x-6)$，即 $y=-\frac{1}{6}x+1$. ……………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯