第十九届中国东南地区数学奥林匹克

参考答案

江西·吉安

高一年级 第一天

2022 年 8 月 2 日 上午 8: 00—12: 00

1．设正数数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1+\sqrt{2}$ 且 $(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1}-2\sqrt{n})=2\ (n\geq 2)$．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求满足 $[a_n]=2022$的所有正整数 n 构成的集合($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)．

解 (1) 由 $(a_2-1-\sqrt{2})(a_2+1+\sqrt{2}-2\sqrt{2})=2$ 及正数列的条件可得 $a_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

归纳假设 $a_n=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$

往证 $n+1$的情况如下:

由 $(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n-2\sqrt{n+1})=2$ 归纳假设 $a_n=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ 代入有

$a_{n+1}^2-2\sqrt{n+1}a_{n+1}-1=0$ 再由正数列的条件，解得：$a_{n+1}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$

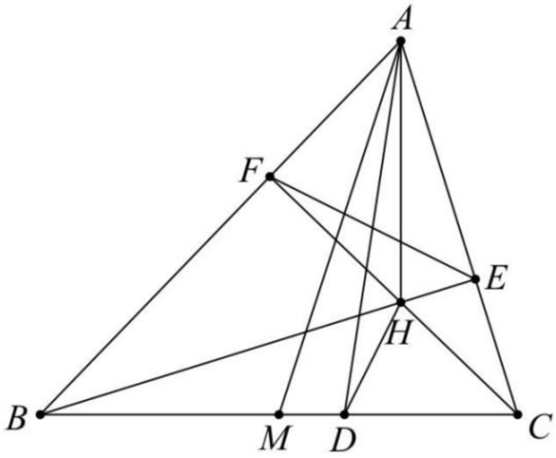
(2) 注意到 $a_n^2=(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$

又 $n<\sqrt{n(n+1)}<n+\frac{1}{2}$

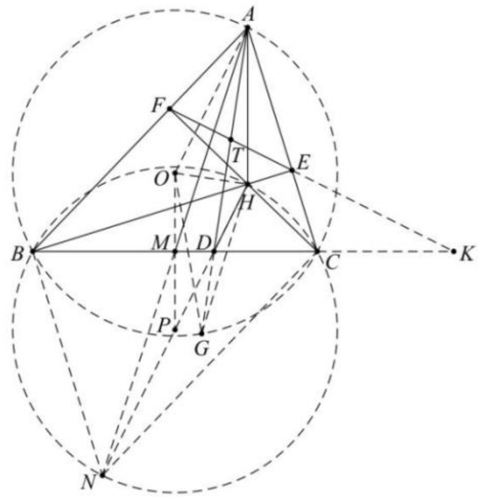
从而 $\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$

如果 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\neq[\sqrt{4n+2}]$，那么存在 $k\in N^*$，使得 $\sqrt{4n+1}<k\leq\sqrt{4n+2}$

也即 $4n+1<(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2<k^2\leq 4n+2$



证明 记$\triangle ABC$，$\triangle HBC$的外接圆分别为圆O，圆P，由三角形垂心性质知，圆O，圆P关于点M对称.



设AM的延长线与圆P相交于点N，连接HN, BN, CN，则$AM=MN$.

从而四边形$ABNC$为平行四边形，

因此$BN\perp BE$，点P在HN上 .

又$OP/\!/AH$且$OP=AH$，

所以$HP/\!/AO$，即$HN/\!/AO$.

易知$\angle BAO=\angle CAH$，

又 $\angle BAM=\angle CAD$，

所以 $\angle OAM=\angle HAD$.

从而 $\angle ADH=\angle MAH=\angle DAO$，

因此 $HD/\!/OA$，即点D在HN上 .

设 AD 的延长线与圆 O 相交于点 G，则 $AD\cdot DG=BD\cdot DC=HD\cdot DN$，所以 A,N,G,H 四点共圆 .

因此 $\angle AGH=\angle ANH=\angle OAM=\angle GAH$，

又 $OA=OG$，所以 $AD\perp OH$.

设 AD,EF 相交于点 T，直线 EF,BC 相交于点 K，

由题设知 B,C,E,F 四点共圆，

所以 $\angle BAO=90^{\circ}-\angle ACB=90^{\circ}-\angle AFE$，因此 $AO\perp EF$.

又 $AD\perp OH,AH\perp BC$，

所以 $\angle AOH=\angle KTD$，$\angle AHO=\angle KDT$，

因此 $\triangle AOH\backsim\triangle KTD$.

从而 $$\frac{KT}{KD}=\frac{AO}{AH}=\frac{1}{2\cos A}=\frac{AB}{2AE}. \qquad (1)$$

在 $\triangle KCE$ 中，由正弦定理知，

$$\frac{KC}{KE}=\frac{\sin\angle KEC}{\sin\angle KCE}=\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}=\frac{\quad}{\quad}. \qquad (2)$$

直线 TEK 截 $\triangle ADC$，由梅涅劳斯定理知，

$$\frac{AT}{TD}\cdot\frac{DK}{KC}\cdot\frac{CE}{EA}=1. \qquad (3)$$

直线 DCK 截 $\triangle ATE$，由梅涅劳斯定理知，

$$\frac{TD}{DA}\cdot\frac{AC}{CE}\cdot\frac{EK}{KT}=1. \qquad (4)$$

北京高考在线
微信号:bjgkzx

3．若 x_i 为大于 1 的整数，记 $f(x_i)$ 为 x_i 的最大素因数．令 $x_{i+1}=x_i-f(x_i)$（i 为自然数）．

(1) 证明：对任意大于 1 的整数 x_0，存在自然数 $k(x_0)$，使得 $x_{k(x_0)+1}=0$；

(2) 令 $V(x_0)$ 为 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_{k(x_0)})$ 中不同数的个数．求 $V(2),V(3),\cdots,V(781)$ 中的最大数，并说明理由．

(注：白鹭洲书院始建于 1241 年，至今已有 781 年的历史．)

解 记 $p_i=f(x_i)$ 为一素数．

(1) 由定义，对于任意的 i，若 $x_i\in Z^+,x_i>1$，容易知道 $x_i>x_{i+1}\geq 0$ 是递降的整数列，且 $p_i|x_{i+1}$．故对于任意初始的 $x_0\in Z^+,x_0>1$，这种递降只能进行有限多次．于是必然有某个自然数 k，使得 $x_k\geq 2,x_{k+1}<2$．但是由于 $x_{k+1}\geq 0$ 且 $p_k|x_{k+1}$，x_{k+1} 不能为 1，则必然有 $x_{k+1}=0$．

(2) 容易知道，p_i 是一个递增数列，而 x_i 是一个严格递减数列，$i=0,1,\ldots,k$．记 $i_1,\ldots,i_s$ 为 $1,\ldots,k$ 中使得 $p_{i_l}>p_{i_l-1}$ 的数，$l=1,2,\ldots,s$．故 $V(x)=s+1$．记 $q_0=p_0,q_l=p_{i_l},l=1,2,\ldots,s$．可知 $q_0,\ldots,q_s$ 为 $f(x_0),\ldots,f(x_k)$ 中的所有不同素数，并且 $q_s>q_{s-1}>\ldots>q_0$．易知 $q_lq_{l-1}|x_{i_l}$，$l=1,2,\ldots,s$．令 $k_l=\dfrac{x_{i_l}}{q_lq_{l-1}}$．可知 $k_s<k_{s-1}<\ldots<k_1$ 为一个严格递减正整数序列．首先我们证明 $s\leq 4$．现反设 $s\geq 5$，即 $V(x_0)\geq 6$．则 $q_5\geq 13$，$q_4\geq 11$ 则 $x>13\times 11=143$．若 $q_0=2$，则 x_0 为 2 的次幂．因为 $x_0=781$，故 $x_0\in\{256,512\}$．但是可以验证 $V(256)=2,V(512)=3$ 与 $V(x_0)\geq 6$ 矛盾．类似地，可以验证 $q_0\neq 3$．所以 $q_0\geq 5$，于是

由定义，我们知道 $x_{i_l}, x_{i_l+1}, \dots, x_{i_{l+1}}$ 为一个等差数列，并且扫过 $q_l(q_{l+1}k_{l+1})$ 到 $q_l(q_{l-1}k_l)$ 中所有的 q_l 的倍数. 故我们有如下性质:

性质(i): $q_{l+1}k_{l+1} < q_{l-1}k_l$ 并且 $q_{l+1}k_{l+1}+1, \dots, q_{l-1}k_l$ 中每个数的最大素因子均 $\le q_l$.

性质(ii): 1-118 之间的数每连续 11 至少有一个素数.

性质(iii): 若 $q_{l-1} \ge 11$，且 $q_{l-1}k_l \le 118$，则 $q_{l-1}k_l$ 恰是第一个大于等于 $q_{l+1}k_{l+1}+1$ 且被 q_{l-1} 整除的数. 特别的，定义

$$I_{l+1} := \{q_{l+1}k_{l+1}+1, \dots, q_{l-1}k_l\}, l = 1, \dots, s-1$$

则由性质(i),(ii)可知，I_{l+1} 中的数都不能是素数，也不能有比 q_l 大的素因子.

由于 $q_3 \ge 13$，故 $q_5k_5+1, \dots, q_3k_4$ 之中的所有数的素因子都 ≤ 17. 若 $q_3 \ge 17$，则 $q_4 \ge 19, q_5 \ge 23$，故 k_5 必然为 1. 故 $k_5q_4q_5 \le x_0 - q_0 - q_1 - q_2 - q_3 - q_4 < 760$，故 $q_5 \le 40$，于是 $q_5 \in \{23, 29, 31, 37\}$

若 $q_5 = 23$，则下一个被 $q_3 \ge 17$ 整除的数为 29，但 $29 > q_5$，矛盾.

若 $q_5 = 29$，则 $q_5k_5+1 = 30$ 不可能被 q_3 整除，而 $q_5k_5+1 = 31$ 为素数，与性质(iii)矛盾(一下简称为矛盾). 若 $q_5 = 31$，则 $q_5k_5+1, \dots$ 中下一个被 ≥ 17 素数整除的数为 34，之后是 $37 > 31$. 故 $q_3 = 17, k_4 = 2$. 由于 $k_5q_4q_5 \le x_0 - q_0 - q_1 - q_2 - q_3 - q_4$，故 $q_4 = 19$. 类似地，考察 $q_4k_4+1, \dots$ 下一个被 $q_2 \ge 11$ 整除的数为 39，之后是

北京高考在线 微信号:bjgkzx

4．给定整数$m,n\geq 2$．将一个m行n列的方格表S的每个格子染上红、蓝两色之一，使下述条件成立：对于同一行的两个格子，若它们均被染了红色，则它们所属的两列中，一列的所有格子都被染了红色，另一列中有格子被染了蓝色．求不同的染色方式的数目．

解　用(i,j)表示第i行与第j列的交叉格，$1\leq i\leq m,1\leq j\leq n$．

分以下三种情况：

(1) S中没有一列全为红格．

此时，由条件知S的每行至多有一个红格．因此，每行的染色方式有$n+1$种(全为蓝格的情况1种，恰有一个红格的情况n种)，由乘法原理，共得到$(n+1)^m$种染色方式．排除掉其中红格全集中在同一列上的那些情况(n种)，共有$(n+1)^m-n$种符合要求的染色方式．

(2) S中恰有一列全为红格．

设第k列全为红格，其中$k\in\{1,2,\cdots,n\}$．考虑S中剩余的格子组成的m行$n-1$列的方格表$S(\hat{k})$，则$S(\hat{k})$中没有一列全为红格．与情况(1)类似，可知$S(\hat{k})$的每行至多有一个红格，进而$S(\hat{k})$有$n^m-(n-1)$种染色方式．

对其中每种染色方式，添上第k列的红格后得到的S的染色方式是满足条件的．事实上，若有两个红格P,Q位于同一行，因$S(\hat{k})$在该行至多有一个红格，故P,Q必有一个在第k列，另一个在$S(\hat{k})$中，此时P,Q所属的两列中确实恰有一列(第k列)全为红格，符合要求．

注意到k的取法有n种，由乘法原理知共有$n\cdot(n^m-n+1)$种符合要求的染色方式．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜
北京高考资讯