文科数学参考答案

1.B 2.C 3.A 4.D 5.C 6.D 7.C 8.B 9.C 10.A 11.A 12.B

13.0 14.11 15.$2\sqrt{2}$ 16.21

17.【解析】(1)由题，$K^2=\dfrac{300\times(40\times100-80\times80)^2}{120\times180\times120\times180}=\dfrac{100}{27}\approx3.704>2.706$，……………… 4分

因此，有90%的把握认为产品质量与生产线有关系. …………………………………… 5分

(2)记这6件产品中产自于甲生产线的有2件，记为A_1，A_2，产自于乙生产线的有4件，记为B_1，B_2，B_3，B_4.

从这6件产品中随机抽取2件的所有基本事件有：(A_1,A_2)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,B_3)，(A_1,B_4)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,B_3)，(A_2,B_4)，(B_1,B_2)，(B_1,B_3)，(B_1,B_4)，(B_2,B_3)，(B_2,B_4)，(B_3,B_4)，共15个.

其中，至少有一件产自于甲生产线的基本事件有9个.

所以，抽取的2件产品中至少有一件产自于甲生产线的概率为$\dfrac{9}{15}$即$\dfrac{3}{5}$. ……………… 12分

18.【解析】若选①，由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=4$， ……………………… 2分

所以$b=4\sin B$，$c=4\sin C$，…………………………………………………… 3分

$c=4\sin C=4\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)=4(\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos B-\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin B)=2\sqrt{3}\cos B+2\sin B$，……… 5分

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times4\sin B\cdot(2\sqrt{3}\cos B+2\sin B)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\sin B\cos B+2\sqrt{3}\sin^2 B$ ………………………………………………… 7分

$=3\sin 2B+\sqrt{3}(1-\cos 2B)$

$=3\sin 2B-\sqrt{3}\cos 2B+\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$，……………………………………………… 9分

因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$0<C=\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}$且$0<B<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，$\frac{1}{2}<\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$，…………………………………………………… 11 分

所以 $2\sqrt{3}<2\sqrt{3}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\leqslant3\sqrt{3}$，

故锐角$\triangle ABC$面积的取值范围为$(2\sqrt{3},3\sqrt{3}]$. …………………………………………………… 12 分

若选②，由正弦定理得$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{2}{\sin B}$， …………………………………………………… 2 分

所以 $c=\frac{2\sin C}{\sin B}=\frac{2\sin(A+B)}{\sin B}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+B\right)}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\cos B+\sin B}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\tan B}+1$，…………… 6 分

因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以 $0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}$且 $0<B<\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，…………………………………………………………………… 8 分

所以 $\tan B>\frac{\sqrt{3}}{3}$，$c=\frac{\sqrt{3}}{\tan B}+1\in(1,4)$，…………………………………………………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}c\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$.

故锐角$\triangle ABC$面积的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$. …………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)由题知，直线 l 与 y 轴不垂直，

故可设直线 l 的方程为 $x=my+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+2\end{cases}$得 $y^2-4my-8=0$. …………………………………………………… 2 分

显然，$\Delta=16m^2+32>0$，

于是 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-8$，$x_1x_2=\frac{1}{16}y_1^2y_2^2=4$. …………………………………… 4 分

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-4$. …………………………………………………… 5 分

(2)当直线 $l\perp x$ 轴时，l：$x=2$，$A(2,2\sqrt{2})$，$B(2,-2\sqrt{2})$，

故当$\angle AQP=\angle BQP$ 时，点 $Q\in x$ 轴. …………………………………………………… 6 分

当直线 l 与 x 轴不垂直时，由抛物线的对称性知，满足条件的点 $Q\in x$ 轴，设 $Q(n,0)$，

由$\angle AQP=\angle BQP$ 得 $k_{AQ}+k_{BQ}=0$，即$\frac{y_1}{x_1-n}+\frac{y_2}{x_2-n}=0$， …………………………… 8 分

整理得 $y_1(x_2-n)+y_2(x_1-n)=0$，即

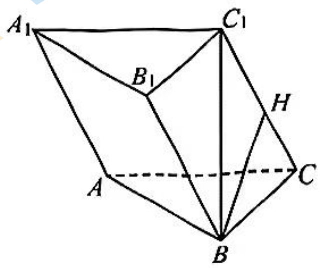
$y_1(my_2+2-n)+y_2(my_1+2-n)=0$，

所以 $2my_1y_2+(2-n)(y_1+y_2)=0$. …………………………………………………………… 10 分

故 $-16m+4(2-n)m=0$,解得 $n=-2$.

综上,存在定点 $Q(-2,0)$满足条件. …………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)在平面 BB_1C_1C 中作 $BH\perp CC_1$ 于 H,



因为平面 $AA_1C_1C\perp$平面 BB_1C_1C,

且平面 $AA_1C_1C\cap$平面 $BB_1C_1C=CC_1$,

所以 $BH\perp$平面 AA_1C_1C,从而 $AC\perp BH$. ………………… 2 分

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$C_1B\perp$平面 ABC,$AC\subset$平面 ABC,

所以 $AC\perp C_1B$.

又因为 $BC_1\cap BH=B$,所以 $AC\perp$平面 BB_1C_1C,

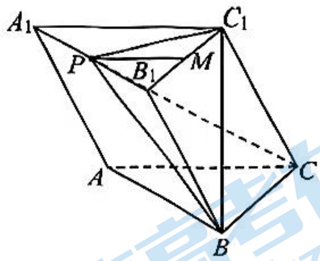
因此 $AC\perp BB_1$. …………………………………………………………………………… 5 分

(2)假设点 P 存在,在平面 $A_1B_1C_1$ 中,作 $PM\parallel A_1C_1$ 交 B_1C_1 于 M,

则 $PM\parallel AC$,因为 $AC\perp$平面 BB_1C_1C,故 $PM\perp$平面 BB_1C_1C. ………………………… 7 分

在平行四边形 BCC_1B_1 中,因为 $C_1B\perp BC$,且 $BC=BC_1=2$.

所以 $S_{\square BCC_1B_1}=BC\cdot C_1B=2\times2=4$. ……………………………… 9 分



所以 $V_{P-BCC_1B_1}=\frac{1}{3}S_{\square BCC_1B_1}\cdot PM=\frac{4}{3}\cdot PM=\frac{4}{3}$,

所以 $PM=1$. …………………………………………………………………… 11 分

因 $A_1C_1=2$,所以 $\frac{PM}{A_1C_1}=\frac{1}{2}$.

故符合条件的点 P 存在,为 A_1B_1 的中点. …………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)当 $a=0$ 时,$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上是单调递增函数, …………………………… 1 分

理由如下:

思路 1:依题意,$f(x)=2\sin x-x\cos x$,$f'(x)=\cos x+x\sin x$, ……………………………… 2 分

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)=\cos x+x\sin x>0$;

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时,$\cos x>0$,$x\sin x>0$,则 $f'(x)=\cos x+x\sin x>0$,

故 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)>0$,

所以 $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上是单调递增函数. ……………………………………………… 4 分

思路 2:依题意,$f(x)=2\sin x-x\cos x$,$f'(x)=\cos x+x\sin x$, ……………………………… 2 分

由于 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数，故可先判断 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调性.

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)=\cos x+x\sin x>0$，此时 $f(x)$ 单调递增，

由于 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是单调递增函数. ………………………… 4 分

(2) 由 $f(x)=ax^3+2\sin x-x\cos x$，得 $f'(x)=3ax^2+\cos x+x\sin x$，

依题意，只需探究 $f'(x)=3ax^2+\cos x+x\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上的零点个数即可.

令 $u(x)=f'(x)=3ax^2+\cos x+x\sin x$，则 $u'(x)=6ax+x\cos x=x(6a+\cos x)$，

(Ⅰ) 当 $6a\geqslant 1$，即 $a\geqslant\frac{1}{6}$ 时，$6a+\cos x\geqslant 0$，此时 $u'(x)\geqslant 0$ 在 $[0,\pi)$ 恒成立，

则 $u(x)$ 即 $f'(x)$ 单调递增，故 $f'(x)\geqslant f'(0)=1$，

此时 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上无零点，则 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的极值点个数为 0. ………………………… 6 分

(Ⅱ) 当 $0<6a<1$，即 $0<a<\frac{1}{6}$ 时，$\exists x_0\in(0,\pi)$，使得 $x_0(6a+\cos x_0)=0$，即 $\cos x_0=-6a$，

可知 $0<x<x_0$ 时，$u'(x)>0$；$x_0<x<\pi$ 时，$u'(x)<0$，

所以 $u(x)$ 即 $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 (x_0,π) 上单调递减，………………………… 8 分

由于 $f'(0)=1$，$f'(\pi)=3a\pi^2-1$，

①若 $f'(\pi)=3a\pi^2-1\geqslant 0$，即 $\frac{1}{3\pi^2}\leqslant a<\frac{1}{6}$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上没有零点，

所以，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的极值点个数为 0. ………………………………………………… 10 分

②若 $f'(\pi)=3a\pi^2-1<0$，即 $0<a<\frac{1}{3\pi^2}$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 1 个零点，

所以，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的极值点个数为 1.

综上所述：当 $a\geqslant\frac{1}{3\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的极值点个数为 0；$0<a<\frac{1}{3\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的极值点个数为 1. ………………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1) 因为 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

由 $x^2+y^2=|x|+y$，得 $\rho^2=|\rho\cos\theta|+\rho\sin\theta$. ………………………………… 2 分

由 $y>0$ 知，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}>0$，且 $2k\pi<\theta<2k\pi+\pi$，

故 $\rho=|\cos\theta|+\sin\theta, 2k\pi<\theta<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$. ………………………………… 4 分

(范围写成 $0<\theta<\pi$ 不扣分)

(2) 曲线 C_1：$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数，$t>0$) 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$，

又 $-\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$，$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$，

所以曲线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{2}+\alpha$. ………………………………………………………… 6 分

联立曲线 C 与 C_1 的极坐标方程，得 $\rho_A=|\cos\alpha|+\sin\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$；

联立曲线 C 与 C_2 的极坐标方程，得 $\rho_B=|\sin\alpha|+\cos\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$. ……………………… 8 分

故△OAB 的面积为

$\frac{1}{2}\rho_A\rho_B=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=\frac{1}{2}(1+2\sin\alpha\cos\alpha)=\frac{1}{2}(1+\sin 2\alpha)\leqslant 1$，

故当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，△OAB 面积的最大值为 1. ………………………………………………………… 10 分

23.【解析】(1)当 $x<-2$ 时，$f(x)=-2x+2-x-2\leqslant 5-2x$，解得 $-5\leqslant x<-2$； ………… 1 分

当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-2x+2+x+2\leqslant 5-2x$，解得 $-2\leqslant x\leqslant 1$； ……………………… 2 分

当 $x>1$ 时，$f(x)=2x-2+x+2\leqslant 5-2x$，此时不成立， ………………………………… 3 分

综上所述，原不等式的解集为 $\{x|-5\leqslant x\leqslant 1\}$. ……………………………………………… 5 分

(2)由题意，当 $x<-2$ 时，$f(x)=-3x>6$；当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-x+4\geqslant 3$；

当 $x>1$ 时，$f(x)=3x>3$，则 $f(x)$ 的最小值为 $T=3$. 所以，$a^2+b^2+2b=3$，

即 $a^2+(b+1)^2=4$. ……………………………………………………………………………… 7 分

因为 $(a+b+1)^2=a^2+(b+1)^2+2a(b+1)\leqslant a^2+(b+1)^2+a^2+(b+1)^2=2[a^2+(b+1)^2]$

$=8$，

又 a,b 为正数，则当且仅当 $a=b+1$ 时取等号，此时 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}-1$，

所以 $a+b+1\leqslant 2\sqrt{2}$，即 $a+b\leqslant 2\sqrt{2}-1$. ……………………………………………… 10 分