2018 北京市西城区高二（下）期末

数　　学（理）

2018. 7

试卷满分：150 分　考试时间：120 分钟

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

1. 复数 $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$（　　）

（A）$1-3\mathrm{i}$	（B）$3-3\mathrm{i}$	（C）$\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$	（D）$\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

2. 若函数 $f(x)=\sin x$，则 $f(\dfrac{\pi}{4})+f'(\dfrac{\pi}{4})=$（　　）

（A）$-\sqrt{2}$	（B）$\sqrt{2}$	（C）1	（D）0

3. 设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $f'(x)$ 为奇函数，则有（　　）

（A）$a\neq 0,\ c=0$	（B）$b=0$	（C）$a=0,\ c\neq 0$	（D）$a=c=0$

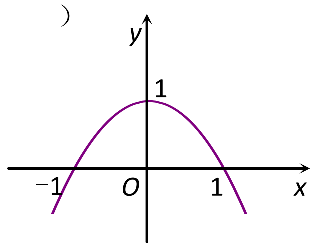
4. 射击中每次击中目标得 1 分，未击中目标得 0 分．已知某运动员每次射击击中目标的概率是 0.7，假设每次射击击中目标与否互不影响，则他射击 3 次的得分的数学期望是（　　）

（A）2.1	（B）2	（C）0.9	（D）0.63

5. 已知一个二次函数 $f(x)$ 的图象如图所示，那么 $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=$（　　）

（A）1　　（B）$\dfrac{\pi}{2}$

（C）$\dfrac{4}{3}$　　（D）2



6. 有 5 名男医生和 3 名女医生．现要从中选 3 名医生组成地震医疗小组，要求医疗小组中男医生和女医生都要有，那么不同的组队种数有（　　）

（A）45 种	（B）60 种	（C）90 种	（D）120 种

7. 已知函数 $f(x)=(1-\dfrac{a}{x})\mathrm{e}^x$，若 $\exists x_0\in(0,+\infty)$，$x_0$ 为 $f(x)$ 的一个极大值点，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,0)$	（B）$(4,+\infty)$
（C）$(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$	（D）前三个答案都不对

8. 某个产品有若干零部件构成，加工时需要经过 7 道工序，分别记为 A，B，C，D，E，F，G．其中，有些工序因为

是制造不同的零部件，所以可以在几台机器上同时加工；有些工序因为是对同一个零部件进行处理，所以存在加工顺序关系. 若加工工序 Y 必须要在工序 X 完成后才能开工，则称 X 为 Y 的紧前工序. 现将各工序的加工次序及所需时间（单位：小时）列表如下：

工　序	A	B	C	D	E	F	G
加工时间	3	4	2	2	2	1	5
紧前工序	无	C	无	C	A，B	D	A，B

现有两台性能相同的生产机器同时加工该产品，则完成该产品的最短加工时间是（　　）

（假定每道工序只能安排在一台机器上，且不能间断.）

（A）11 个小时　　（B）10 个小时　　（C）9 个小时　　（D）8 个小时

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.把答案填在题中横线上.

9. 函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的图象在 $x=4$ 处的切线的斜率为__________.

10. 在 $(x-\dfrac{2}{x})^4$ 的展开式中，常数项是__________.（用数字作答）

11. 已知某随机变量 ξ 的分布列如下（$q\in\mathbf{R}$）：

ξ	1	-1
P	$\dfrac{1}{3}$	q

那么 ξ 的数学期望 $E(\xi)=$__________，　ξ 的方差 $D(\xi)=$__________.

12. 若 4 名演讲比赛获奖学生和 3 名指导教师站在一排照相，则其中任意 2 名教师不相邻的站法有______种.（用数字作答）

13. 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+ax^2}$，其中 $a>0$. 若对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)\geqslant 0$，则实数 a 的取值范围是____.

14. 某电影院共有 $n\,(n\leqslant 3000)$ 个座位. 某天，这家电影院上、下午各演一场电影. 看电影的是甲、乙、丙三所中学的学生，三所学校的观影人数分别是 985 人，1010 人，2019 人（同一所学校的学生既可看上午场，又可看下午场，但每人只能看一场）. 已知无论如何排座位，这天观影时总存在这样的一个座位，上、下午在这个座位上坐的是同一所学校的学生，那么 n 的可能取值有_____个.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$，其中 $n=1,2,3,\cdots$.

（Ⅰ）计算 a_2，a_3，a_4 的值；

（Ⅱ）猜想数列$\{a_n\}$的通项公式，并用数学归纳法加以证明.

16．（本小题满分 13 分）

在奥运知识有奖问答竞赛中，甲、乙、丙三人同时回答一道有关奥运知识的问题，已知甲答对这道题的概率是$\dfrac{3}{4}$，甲、乙两人都回答错误的概率是$\dfrac{1}{12}$，乙、丙两人都回答正确的概率是$\dfrac{1}{4}$．设每人回答问题正确与否是相互独立的.

（Ⅰ） 求乙答对这道题的概率；

（Ⅱ） 求甲、乙、丙三人中，至少有一人答对这道题的概率.

17．（本小题满分 13 分）

设$a,b\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+bx$在区间$(-1,1)$上单调递增，在区间$(1,3)$上单调递减.

（Ⅰ）若$a=-2$，求b的值；

（Ⅱ）求函数$f(x)$在区间$[1,4]$上的最小值（用b表示）.

18．（本小题满分 13 分）

甲、乙两个篮球队在 4 次不同比赛中的得分情况如下：

甲队	88， 91， 92， 96
乙队	89， 93， 9[redacted] 92

乙队记录中有一个数字模糊（即表中阴影部分），无法确认，假设这个数字具有随机性，并用m表示.

（Ⅰ）在 4 次比赛中，求乙队平均得分超过甲队平均得分的概率；

（Ⅱ）当$m=5$时，分别从甲、乙两队的 4 次比赛中各随机选取 1 次，记这 2 个比赛得分之差的绝对值为X，求随机变量X的分布列；

（Ⅲ）如果乙队得分数据的方差不小于甲队得分数据的方差，写出m的取值集合.（结论不要求证明）

19．（本小题满分 14 分）

设函数$f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x-a(x-1)^2$，其中$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当$a\leqslant 0$时，求函数$f(x)$的极值；

（Ⅱ）当$a>0$时，证明：函数$f(x)$不可能存在两个零点.

20．（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x+2$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $y=f(x)+ax$ 在区间 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上为单调函数，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）设函数 $g(x)=x-\dfrac{2}{x}$，其中 $x>0$．证明：$g(x)$ 的图象在 $f(x)$ 图象的下方.

数学试题答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. C　　2. B　　3. D　　4. A　　5. C　　6. A　　7. B　　8. A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $\frac{1}{4}$　　10. 24　　11. $-\frac{1}{3}$，$\frac{8}{9}$

12. 1440　　13. $(0,1]$　　14. 12

注：一题两空的题目，第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）**解**：由题意，得 $a_2=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{1}{5}$，$a_4=\frac{1}{7}$.　………………………… 3 分

（Ⅱ）**解**：由 a_1，a_2，a_3，a_4 猜想 $a_n=\frac{1}{2n-1}$.　………………………… 5 分

以下用数学归纳法证明：对任何的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=\frac{1}{2n-1}$.

证明：① 当 $n=1$ 时，由已知，得左边 $a_1=1$，右边 $\frac{1}{2\times1-1}=1$，

所以 $n=1$ 时等式成立.　………………………… 7 分

② 假设当 $n=k\ (k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$a_k=\frac{1}{2k-1}$ 成立，　………………………… 8 分

则 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\frac{a_k}{2a_k+1}=\frac{\frac{1}{2k-1}}{2\times\frac{1}{2k-1}+1}=\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{2(k+1)-1}$，

所以 当 $n=k+1$ 时，等式也成立.　………………………… 12 分

根据 ① 和 ②，可知对于任何 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=\frac{1}{2n-1}$ 成立.　………………………… 13 分

16.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）**解**：记甲、乙、丙 3 人独自答对这道题分别为事件 A，B，C，　………………1 分

设乙答对这道题的概率 $P(B)=x$，

由于每人回答问题正确与否是相互独立的，因此 A，B，C 是相互独立事件.

由题意，并根据相互独立事件同时发生的概率公式，

得 $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=(1-\frac{3}{4})\times(1-x)=\frac{1}{12}$　………………………… 4 分

解得 $x=\frac{2}{3}$，

所以，乙对这道题的概率为$P(B)=\frac{2}{3}$. ………………………… 6 分

（Ⅱ）**解**：设“甲、乙、丙三人中，至少有一人答对这道题”为事件 M，丙答对这道题的概率$P(C)=y$， ………………………… 7 分

由（Ⅰ），并根据相互独立事件同时发生的概率公式，

得$P(B\cdot C)=P(B)\cdot P(C)=\frac{2}{3}\times y=\frac{1}{4}$， ………………………… 9 分

解得$y=\frac{3}{8}$. ………………………… 10 分

甲、乙、丙三人都回答错误的概率为$P(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})$

$$=(1-\frac{3}{4})(1-\frac{2}{3})(1-\frac{3}{8})$$

$$=\frac{5}{96}.$$ ……………………… 12 分

因为事件“甲、乙、丙三人都回答错误”与事件“甲、乙、丙三人中，至少有一人答对这道题”是对立事件，

所以，所求事件概率为$P(M)=1-\frac{5}{96}=\frac{91}{96}$. ………………………… 13 分

17.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）**解**：求导，得 $f'(x)=x^2+2ax+b$. ………………………… 1 分

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,3)$ 上单调递减，

所以 $f'(1)=1+2a+b=0$. ………………………… 3 分

又因为$a=-2$，

所以$b=3$，验证知其符合题意. ………………………… 4 分

（Ⅱ）**解**：由（Ⅰ），得$1+2a+b=0$，即 $2a=-b-1$.

所以 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{b+1}{2}x^2+bx$， $f'(x)=x^2-(b+1)x+b=(x-b)(x-1)$. ……5 分

当$b\leqslant 1$时，得当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)=(x-b)(x-1)>0$，

此时，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 这与题意不符. ……………………… 7 分

当$b>1$时，

随着x的变化， $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,b)$	b	$(b,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ ，$(b,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,b)$ 上单调递减.

由题意，得 $b\geqslant 3$. ………………………… 9 分

所以当 $b\geqslant 4$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $f(4)=\frac{40}{3}-4b$ ； …………… 11 分

当 $3\leqslant b<4$ ，函数 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $f(b)=-\frac{1}{6}b^3+\frac{1}{2}b^2$ ，

综上，当 $b\geqslant 4$ 时，$f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $\frac{40-12b}{3}$ ；当 $3\leqslant b<4$ ，$f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{6}b^3+\frac{1}{2}b^2$. ………………………… 13 分

（或写成：函数 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $g(b)=\begin{cases}-\frac{1}{6}b^3+\frac{1}{2}b^2, & 3\leqslant b<4,\\ \frac{40}{3}-4b, & b\geqslant 4.\end{cases}$ ）.

18. （本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：设“乙队平均得分超过甲队平均得分”为事件 A ， ………………………… 1 分

依题意 $m=0,1,2,\cdots,9$ ，共有 10 种可能. ………………………… 2 分

由乙队平均得分超过甲队平均得分，得 $\frac{1}{4}[89+93+(90+m)+92]>\frac{1}{4}(88+91+92+96)$ ，

解得 $m>3$ ，

所以当 $m=4,5,6,\cdots,9$ 时，乙队平均得分超过甲队平均得分，共 6 种可能．…… 4 分

所以乙队平均得分超过甲队平均得分的概率 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. ………………… 5 分

（Ⅱ）**解**：当 $m=5$ 时，记甲队的 4 次比赛得分 88, 91, 92, 96 分别为 A_1,A_2,A_3,A_4 ，乙队的 4 次比赛得分 89, 93, 95, 92 分别为 B_1,B_2,B_3,B_4 ，

则分别从甲、乙两队的 4 次比赛中各随机选取 1 次，所有可能的得分结果有 $4\times 4=16$ 种， 它们是：(A_1,B_1) ，(A_1,B_2) ，(A_1,B_3) ，(A_1,B_4) ，(A_2,B_1) ，(A_2,B_2) ，(A_2,B_3) ，(A_2,B_4) ，(A_3,B_1) ，(A_3,B_2) ，(A_3,B_3) ，(A_3,B_4) ，(A_4,B_1) ，(A_4,B_2) ，(A_4,B_3) ，(A_4,B_4) ，……… 6 分

则这 2 个比赛得分之差的绝对值为 X 的所有取值为 $0,1,2,3,4,5,7$. …………… 7 分

因此 $P(X=0)=\frac{1}{16}$ ，$P(X=1)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ ，$P(X=2)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$ ，$P(X=3)=\frac{3}{16}$ ，$P(X=4)=\frac{3}{16}$ ，$P(X=5)=\frac{1}{16}$ ，$P(X=7)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$. ………………………… 9 分

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4	5	7
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$

………………………… 10 分

（Ⅲ）**解**：$m\in\{7,8,9\}$. ………………………… 13 分

19.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）**解**：求导，得 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-2a(x-1)=(x-1)(\mathrm{e}^x-2a)$，……………………2 分

因为 $a\leqslant 0$，所以 $\mathrm{e}^x-2a>0$，

所以当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 为减函数；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数.

故当 $x=1$ 时，$f(x)$ 存在极小值 $f(1)=-\mathrm{e}$；$f(x)$ 不存在极大值. …………… 5 分

（Ⅱ）**证明**：解方程 $f'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^x-2a)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=\ln 2a$.

当 $\ln 2a>1$，即 $a>\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，

随着 x 的变化，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\ln 2a)$	$\ln 2a$	$(\ln 2a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

………………………… 7 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$，$(\ln 2a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,\ln 2a)$ 上单调递减.

又因为 $f(1)=-\mathrm{e}<0$，

所以函数 $f(x)$ 至多在区间 $(\ln 2a,+\infty)$ 存在一个零点； ……………………… 9 分

当 $\ln 2a=1$，即 $a=\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，

因为 $f'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^x-2a)\geqslant 0$（当且仅当 $x=1$ 时等号成立），

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

所以函数 $f(x)$ 至多存在一个零点； ………………………… 11 分

当 $\ln 2a<1$，即 $a<\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，

随着 x 的变化，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln 2a)$	$\ln 2a$	$(\ln 2a,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

………………………… 12 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln 2a,1)$ 上单调递减.

又因为 $a>0$，

所以当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x-a(x-1)^2<0$，

所以函数 $f(x)$ 至多在区间 $(1,+\infty)$ 存在一个零点.

综上，当 $a>0$ 时函数 $f(x)$ 不可能存在两个零点. ………………………… 14 分

20.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）**解**：求导，得 $f'(x)=\ln x+1$， ………………………… 1 分

又因为 $f(1)=2$，$f'(1)=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x-y+1=0$. ………………… 3 分

（Ⅱ）**解**：设函数 $F(x)=f(x)+ax=x\ln x+ax+2$，

求导，得 $F'(x)=\ln x+a+1$，

因为函数 $F(x)=f(x)+ax$ 在区间 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上为单调函数，

所以在区间 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上，$F'(x)\geqslant 0$ 恒成立，或者 $F'(x)\leqslant 0$ 恒成立， ………… 4 分

又因为 $\mathrm{e}^{|a|+1}\in(\mathrm{e},+\infty)$，且 $F'(\mathrm{e}^{|a|+1})=|a|+1+a+1>0$，

所以在区间 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上，只能是 $F'(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $a\geqslant -\ln x-1$ 恒成立. … 6 分

又因为函数 $h(x)=-\ln x-1$ 在区间 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(x)<h(\mathrm{e})=-2$，

所以 $a\geqslant -2$. ………………………… 8 分

（Ⅲ）**证明**：设 $h(x)=f(x)-g(x)=x\ln x+2-x+\dfrac{2}{x}$，$x>0$. …………………… 9 分

求导，得 $h'(x)=\ln x-\dfrac{2}{x^2}$.

设 $m(x)=h'(x)=\ln x-\dfrac{2}{x^2}$，则 $m'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}>0$（其中 $x>0$）.

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$m(x)$（即 $h'(x)$）为增函数. ………………………… 10 分

又因为 $h'(1)=-2<0$，$h'(\mathrm{e})=1-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}>0$，

所以，存在唯一的 $x_0\in(1,\mathrm{e})$，使得 $h'(x_0)=\ln x_0-\dfrac{2}{x_0^2}=0$. ………………… 11 分

且 $h'(x)$ 与 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$

$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$h(x_0)$	↗

所以，函数 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x) \geqslant h(x_0)$. ………………………… 12 分

又因为 $x_0 \in (1,\mathrm{e})$ ， $h'(x_0) = \ln x_0 - \dfrac{2}{x_0^2} = 0$ ，

所以 $h(x_0) = x_0 \ln x_0 + 2 - x_0 + \dfrac{2}{x_0} = 2 - x_0 + \dfrac{4}{x_0} > 2 - \mathrm{e} + \dfrac{4}{\mathrm{e}} > 0$ ，

所以 $h(x) > 0$ ，即 $g(x)$ 的图象在 $f(x)$ 图象的下方. ………………………… 14 分