号卷·A10联盟2022年高考最后一卷
文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	D	B	A	C	B	A	D	C	D	A

1. C 由题意得，$A=\{x\in\mathbf{N}|0<x<8\}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$B=\{x|x\geqslant 3\}$，故 $A\cap B=\{3,4,5,6,7\}$，有5个元素，故选 C.

2. D 由题意得，$z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=1-3\mathrm{i}$，复数 z 在复平面内对应的点为 $(1,-3)$，位于第四象限. 故选 D.

3. D 由题意得，$0.1+0.2+0.3+20a+0.1=1$，$a=0.015$，故该地区学生每天体育活动时间的平均数约为 $35\times0.1+45\times0.2+55\times0.3+65\times0.15+75\times0.15+85\times0.1=58.5$，故选 D.

4. B 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，即 $\begin{cases}1-2\lambda>0\\ \lambda\neq-2\end{cases}$，$\therefore\lambda<\dfrac{1}{2}$ 且 $\lambda\neq-2$，$\therefore$ “$\lambda<\dfrac{1}{2}$” 是 “$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角” 的必要不充分条件. 故选 B.

5. A 由题意得，$f(-x)=-x\mathrm{e}^{|-x|}-2(-x)^3=-x\mathrm{e}^{|x|}+2x^3=-f(x)$，故函数 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，排除 D；$f(2)=2\mathrm{e}^2-2\times2^3<0$，排除 B；$f(0.1)=0.1\mathrm{e}^{0.1}-2\times(0.1)^3=0.1(\mathrm{e}^{0.1}-0.02)>0$，排除 C，故选 A.

6. C 由题意得，旋转180°后，得到一个圆锥与一个圆台拼接而成的组合体，故所求体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot4^2\cdot3+\dfrac{1}{3}\pi\cdot(1^2+4^2+1\cdot4)\cdot3=37\pi$，故选 C.

7. B 由题意得，$g(x)=f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=4\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，$h(x)=g\left(\dfrac{1}{3}x\right)=4\sin\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\dfrac{\pi}{4}+3k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{7\pi}{4}+3k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

故函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\dfrac{\pi}{4}+3k\pi,\dfrac{7\pi}{4}+3k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，故选 B.

8. A 由切点 $(1,b)$ 在曲线上，得 $b=\dfrac{2+a}{3}$①；由切点 $(1,b)$ 在切线上，得 $k-b+6=0$②；

对曲线求导得 $y'=\dfrac{4-a}{(x+2)^2}$，$\therefore y'|_{x=1}=\dfrac{4-a}{3^2}=k$，即 $4-a=9k$③，由①②③得

$a=13,b=5,k=-1$．故选 A.

9. D 记数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n,T_n，则

$$c_1+c_2+\cdots+c_{150}=S_{158}-T_8=\frac{(2+316)\times158}{2}-\frac{2\times(1-2^8)}{1-2}=24612$$，故选 D.

10. C 由题意得，点P在焦点F的右边，且$P(4,0)$，$QM\perp l$，由抛物线的定义知$|QF|=|QM|$，$\because|QF|=|QP|$，$\therefore|QP|=|QM|$，又$\angle MQP=120°$，$\therefore\Delta PFQ$为等边三角形，$\therefore$点Q的横坐标为$x_Q=\frac{p}{2}+\frac{4-\frac{p}{2}}{2}=2+\frac{p}{4}$，$\therefore|QM|=2+\frac{p}{4}+\frac{p}{2}=2+\frac{3p}{4}$，又$|QM|=|QP|=|FP|=4-\frac{p}{2}$，$\therefore2+\frac{3p}{4}=4-\frac{p}{2}$，解得$p=\frac{8}{5}$，$\therefore$准线$l$的方程为$x=-\frac{4}{5}$．故选 C.

11. D 由题意得，$BA\perp$平面SAC，将三棱锥补成三棱柱$SAC-S_1BC_1$，则三棱柱$SAC-S_1BC_1$的外接球即为所求．设外接球的球心为O，则ΔSAC的外心为O_1，则$OO_1=\frac{1}{2}AB=2$，又$O_1A=\frac{1}{2}\times\frac{SA}{\sin\angle SCA}=4$，则外接球的半径$R=\sqrt{OO_1^2+O_1A^2}=2\sqrt{5}$，表面积$S=4\pi R^2=80\pi$，故选 D.

12. A 由题意得，$x^2e^x\geqslant a(2\ln x+x)+1$，令$x^2e^x=t$，故$\ln t=2\ln x+x$，故$x^2e^x\geqslant a(2\ln x+x)+1\Leftrightarrow t-1-a\ln t\geqslant0$．令$F(t)=t-1-a\ln t$，则$F'(t)=1-\frac{a}{t}=\frac{t-a}{t}$．若$a\leqslant0$，则$F'(t)>0$，则$F(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又$F(1)=0$，则当$0<t<1$时，$F(t)<0$，不合题意，舍去；若$a>0$，则当$t\in(0,a)$时，$F'(t)<0$，当$t\in(a,+\infty)$时，$F'(t)>0$，则函数$F(t)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增．因为$F(1)=0$，所以若$a>1$，则当$t\in(1,a)$，$F(t)<0$，舍去；若$0<a<1$，则当$t\in(a,1)$，$F(t)<0$，舍去；若$a=1$，则$F(t)\geqslant F(1)=0$，符合题意，故$a=1$，故选 A.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

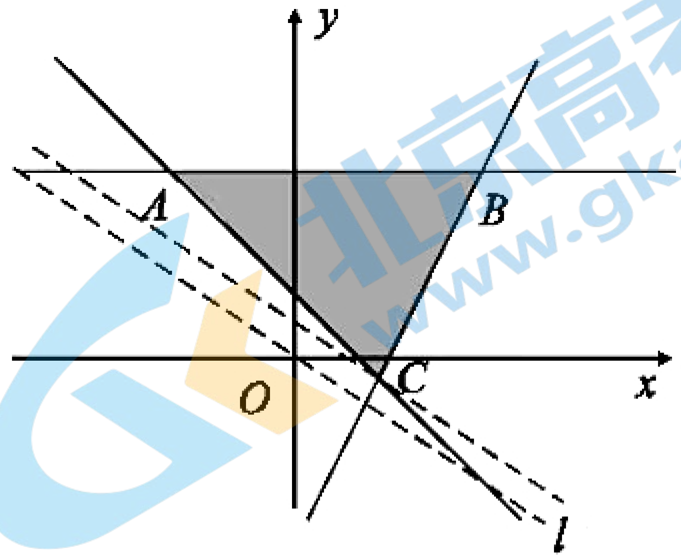
13. 1

由题意得，当$x>0$时，函数$f(x)$的周期$T=8$，于是$f(2022)=f(252\times8+6)=f(6)=f(-2)=\log_8 8=1$.

14. $\frac{5}{3}$

作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示，其中$A(-2,3),B(3,3)$,

$C\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$. 作直线 $l: 2x+3y=0$，平移直线 l，当其经过点 C 时，$z=2x+3y$ 有最小值，则 $z_{\min}=2\times\frac{4}{3}+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$.



15. $\frac{16}{11}\cdot 12^{n-1}-\frac{5}{11}$

由题意得，$a_{n+1}=12a_n+5$，设 $a_{n+1}+\lambda=12(a_n+\lambda)$，故 $a_{n+1}=12a_n+11\lambda$，则 $11\lambda=5$，故 $\lambda=\frac{5}{11}$，则 $a_{n+1}+\frac{5}{11}=12\left(a_n+\frac{5}{11}\right)$，即 $\frac{a_{n+1}+\frac{5}{11}}{a_n+\frac{5}{11}}=12$，则数列 $\left\{a_n+\frac{5}{11}\right\}$ 是首项为 $\frac{16}{11}$，公比为12的等比数列，故 $a_n+\frac{5}{11}=\frac{16}{11}\cdot 12^{n-1}$，故 $a_n=\frac{16}{11}\cdot 12^{n-1}-\frac{5}{11}$.

16. $\frac{4}{3}$

易知圆 $C':(x-c)^2+y^2=(a+c)^2$ 过点 $M(-a,0)$，而 Q 为线段 MP 的中点，且 $RQ\perp PM$，故 $RM=PR$，而 $RM=PM$，故 $\triangle MPR$ 是等边三角形，则 $F(c,0)$ 为 $\triangle MPR$ 的外心，故 $\angle RFM=120°$，故 $|PF|=|RF|=a+c$，R 在双曲线上，记双曲线 C 的左焦点为 F'，所以 $|RF'|-|RF|=2a$，则 $|RF'|=2a+|RF|=3a+c$，在 $\triangle RF'F$ 中，由余弦定理得，$|RF'|^2=|RF|^2+|F'F|^2-2|RF|\cdot|F'F|\cdot\cos\angle F'FR$，即 $(3a+c)^2=(a+c)^2+(2c)^2-2(a+c)\cdot 2c\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$，整理得 $4a=3c$（$a+c=0$ 舍去），则 $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）2×2 列联表如下：

	非优秀	优秀	合计
女生	20	10	30
男生	15	15	30
合计	35	25	60

………………………… 3 分

$\therefore K^2=\frac{60\times(20\times15-10\times15)^2}{30\times30\times35\times25}\approx1.714<2.706$，………………………… 5 分

∴没有 90% 的把握认为成绩优秀与性别有关. ………………………… 6 分

（Ⅱ）由题意得，从成绩优秀的学生中随机抽取5人，其中女生人数为$5\times\frac{10}{10+15}=2$，

分别记为A，B，男生人数为$5\times\frac{15}{10+15}=3$，分别记为$a,b,c$，…………………7分

从这5人中随机抽取2人的情况有：

$\{A,B\},\{A,a\},\{A,b\},\{A,c\},\{B,a\},\{B,b\},\{B,c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$，共10种，…9分

抽取的2人中至少有1人为男生的情况有：

$\{A,a\},\{A,b\},\{A,c\},\{B,a\},\{B,b\},\{B,c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$，共9种，……… 11分

故所求概率$P=\frac{9}{10}$．……………………… 12分

18.（本小题满分12分）

（Ⅰ）在$\triangle ABC$中，由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即$a^2-2\sqrt{2}a-6=0$，……………………… 2分

解得$a=3\sqrt{2}$（负值舍去），……………………… 3分

$\therefore\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$．……………………… 5分

（Ⅱ）在$\triangle ABC$中，由正弦定理得，$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，……………………… 6分

$$\therefore\sin C=\frac{c\cdot\sin B}{b}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{5}，$$ ……………………… 7分

又$c<b$，$\therefore 0<C<\frac{\pi}{4}$，$\therefore\cos C=\sqrt{1-\sin^2C}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，……………………… 8分

$\therefore\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{1}{2}$．……………………… 9分

$\because\angle MBC=\angle AMB-\angle C$，

$$\therefore\tan\angle MBC=\tan(\angle AMB-\angle C)=\frac{\tan\angle AMB-\tan C}{1+\tan\angle AMB\cdot\tan C}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{4}{7}.$$

……………………… 12分

19.（本小题满分12分）

（Ⅰ）连接BD，则$\triangle BCD$的面积为$\frac{1}{2}\times1\times2=1$．……………………… 1分

$\because PA\perp$底面$ABCD$，E为线段PD上一点，且$PE:DE=4:1$，

$\therefore E$到底面$ABCD$的距离为$\frac{1}{5}PA=\frac{4}{5}$．……………………… 3分

$\therefore V_{三棱锥P-BCE}=V_{三棱锥P-BCD}-V_{三棱锥E-BCD}=\frac{1}{3}\times1\times4-\frac{1}{3}\times1\times\frac{4}{5}=\frac{16}{15}$．……… 5分

（Ⅱ）$\because PA\perp$底面$ABCD$，$\therefore PA\perp AD$， ………………………… 6分

$\therefore PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

又$PE:DE=4:1$，$\therefore PE=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PE}{PA}$，$\therefore \triangle PAD\backsim\triangle PEA$，

$\therefore \angle PEA=\angle PAD=90^\circ$，$\therefore AE\perp PD$． ………………………… 8分

由$PA\perp$底面$ABCD$知$PA\perp AB$，

又$AB\perp AD$，且$AD\cap PA=A$，$\therefore AB\perp$平面PAD， ……………………… 10分

又$PD\subset$平面PAD，$\therefore AB\perp PD$，

又$AB\cap AE=A$，$\therefore PD\perp$平面ABE． ………………………… 12分

20.（本小题满分12分）

（Ⅰ）由题意得，$(-1-a)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2=\dfrac{39}{4}$，解得$a=2$（负值舍去），………… 2分

将$A\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$代入$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$得，$\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，解得$b^2=1$，………… 4分

则椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ………………………… 5分

（Ⅱ）设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$l:y=kx+m(k>0,m<0)$，

联立$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\ y=kx+m\end{cases}$，得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

由$\Delta>0$得$1+4k^2>m^2$，$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2}$，$\therefore P\left(-\dfrac{4km}{1+4k^2},\dfrac{m}{1+4k^2}\right)$．

………………………… 7分

由斜率公式可知$k_{OP}=-\dfrac{1}{4k}$，$\therefore l_{OP}:y=-\dfrac{1}{4k}x$，$\therefore R\left(6,-\dfrac{3}{2k}\right)$． ………… 8分

联立$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\ y=-\dfrac{1}{4k}x\end{cases}$，得$x^2=\dfrac{16k^2}{1+4k^2}$，即$x_Q^2=\dfrac{16k^2}{1+4k^2}$． ……………………… 9分

$\because |OQ|^2=|OP|\cdot|OR|$，$\therefore {x_Q}^2=x_P\cdot x_R$，

$\therefore \dfrac{16k^2}{1+4k^2}=-\dfrac{24km}{1+4k^2}$，$\therefore m=-\dfrac{2}{3}k$，此时满足$\Delta>0$， ……………………… 11分

$\therefore$直线l过定点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$． ………………………… 12分

21.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$f(x)=-2\ln x-x+\frac{1}{2}x^2$，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

则 $f'(x)=-\frac{2}{x}-1+x=\frac{(x+1)(x-2)}{x}$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x>2$；令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<2$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(2)=-2\ln 2$，无极大值. …………………… 4 分

（Ⅱ）由题意得，$f'(x)=-\frac{2}{x}+2a-2ax=-\frac{2}{x}\left(ax^2-ax+1\right)$，…………………… 5 分

故 x_1,x_2 是方程 $ax^2-ax+1=0$ 的两个不等正实根，

则 $\begin{cases}\Delta=a^2-4a>0\\ x_1+x_2=1\\ x_1x_2=\frac{1}{a}>0\end{cases}$，解得 $a>4$. …………………… 7 分

故 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+x_1x_2=-\ln x_1+ax_1-\frac{1}{2}ax_1^2-\ln x_2+ax_2-\frac{1}{2}ax_2^2+x_1x_2$

$=-\ln(x_1x_2)-\frac{1}{2}a\left(x_1^2+x_2^2\right)+a(x_1+x_2)+x_1x_2$

$=-\ln(x_1x_2)+a(x_1+x_2)-\frac{1}{2}a\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+x_1x_2$

$=-\ln\frac{1}{a}+a-\frac{a}{2}\left(1-\frac{2}{a}\right)+\frac{1}{a}$

$=\ln a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{a}+1$. …………………… 9 分

令 $h(a)=\ln a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{a}+1\,(a>4)$，

则 $h'(a)=\frac{1}{a}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a^2}=\frac{(a+1)^2-3}{2a^2}>0$ 在 $(4,+\infty)$ 上恒成立，…………………… 10 分

$\therefore$ 函数 $h(a)$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(a)>h(4)=\frac{13}{4}+2\ln 2$，

$\therefore \lambda\leqslant\frac{13}{4}+2\ln 2$，即实数 λ 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{13}{4}+2\ln 2\right]$. …………… 12 分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

（Ⅰ）由 $\begin{cases}x=\cos\alpha\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$ 得，$x^2+(y-1)^2=1$，即 $x^2+y^2=2y$，

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入，得 $\rho^2=2\rho\sin\theta$，

即曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$. ························· 3 分

由 $\rho\cos^2\theta+\cos\theta-\rho=0$ 得，$\rho^2\sin^2\theta=\rho\cos\theta$，

将 $\rho\cos\theta=x, \rho\sin\theta=y$ 代入，得 $y^2=x$，

即曲线 C_2 的直角坐标方程为 $y^2=x$. ························· 5 分

（Ⅱ）由题意得，射线 $l: y=kx(x\geqslant 0, 1\leqslant k\leqslant 2)$ 的极坐标方程为 $\theta=\theta_0(\tan\theta_0=k, \rho\geqslant 0)$，

························· 6 分

联立 $\begin{cases}\rho=2\sin\theta\\ \theta=\theta_0\end{cases}$，得 $|\overrightarrow{OM}|=\rho_M=2\sin\theta_0$，························· 7 分

联立 $\begin{cases}\rho\sin^2\theta=\cos\theta\\ \theta=\theta_0\end{cases}$，得 $|\overrightarrow{ON}|=\rho_N=\dfrac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}$，························· 8 分

$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|=2\sin\theta_0\cdot\dfrac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}=\dfrac{2}{\tan\theta_0}=\dfrac{2}{k}\in[1,2]$. ········ 10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4–5：不等式选讲

（Ⅰ）由题意得，$|2x-3|+|3x-6|<2$，

当 $x<\dfrac{3}{2}$ 时，不等式化为 $3-2x+6-3x<2$，解得 $x>\dfrac{7}{5}$，$\therefore \dfrac{7}{5}<x<\dfrac{3}{2}$；

当 $\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$ 时，不等式化为 $2x-3+6-3x<2$，解得 $x>1$，$\therefore \dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$；

当 $x>2$ 时，不等式化为 $2x-3+3x-6<2$，解得 $x<\dfrac{11}{5}$，$\therefore 2<x<\dfrac{11}{5}$.

综上，不等式 $f(x)<2$ 的解集为 $\left(\dfrac{7}{5},\dfrac{11}{5}\right)$. ························· 5 分

（Ⅱ）由题意得，$a^2-2a-2\geqslant|2x-3|+|2x-4|$ 有实数解，························· 7 分

$\because |2x-3|+|2x-4|\geqslant|(2x-3)-(2x-4)|=1$，························· 8 分

$\therefore a^2-2a-2\geqslant 1$，························· 9 分

解得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 3$，即 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. ·················· 10 分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。