2023 年北京市朝阳区高三二模拓展

高三数学

2023.05

拓展 1-1.（2022-2023 石景山高三上期末 01）已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x||x|\le 1\}$，则$A\cap B$等于

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{1,2\}$

【答案】A

拓展 1-2.（2022-2023 房山高三上期末 01）已知集合 $A=\{-2,0,1,2\}$，$B=\{x|x^2\le 1\}$，则$A\cap B$

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-2,0,1\}$　　D. $\{-2,0,1,2\}$

【答案】B

拓展 1-3.（2022-2023 顺义高三上期末 01）1.已知集合 $A=\{-2,-1,0\}$，$B=\{x|-3<x\le -1\}$，则$A\cap B$

A. $\{-1\}$　　B. $\{-1,0\}$　　C. $\{-2,-1\}$　　D. $\{-2,0\}$

【答案】C

拓展 2-1.（2021-2022 朝阳高三上期中 02）设 $m\in R$，则“$m=2$”是“复数 $z=(m+2i)(1+i)$ 为纯虚数”的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

【答案】 C

拓展 2-2. （2021-2022 北京 171 中学高三上期中 02）已知 i 是虚数单位，复数 z 满足 $(1+i)z=2i$，则 $\bar{z}$ 的虚部是

A. 1　　B. i　　C. -1　　D. $-i$

【答案】C

拓展 2-3.（2021-2022 北京市海淀区高三上期末 03）复数 $\frac{5}{2+\mathrm{i}}$ 的虚部为

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 1

【答案】C

拓展 3-1.（2021-2022 昌平一中高三（上）期中 05）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，则双曲线 C 的渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{3}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　C. $y=\pm\frac{1}{2}x$　D. $y=\pm 2x$

【答案】A

拓展 3-2．（2021-2022 朝阳区高三第一学期期末练习 02）双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的渐近线方程为

A．$y=\pm\frac{3}{4}x$　　B．$y=\pm\frac{4}{3}x$　　C．$y=\pm\frac{3}{5}x$　D．$y=\pm\frac{9}{16}x$

【答案】A

拓展 3-3.（2021-2022 西城区高三第一学期期末练习 04）若双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的一条渐近线方程为$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，则双曲线$C$的离心率为

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

【答案】C

拓展 4-1.(2022-2023 海淀高三上期末 06) 已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1=3$，$a_4+a_6=-10$．若数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n+a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，记$\{b_n\}$的前n项和为S_n，则$S_8=$

A. -32　　B. -80　　C. -192　　D. -224

【答案】B

拓展 4-2.(2022-2023 大兴高三上期末 04))设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和．已知$S_3=-3$，$a_5=2$，则

A. $\{a_n\}$为递减数列　　B. $a_3=0$

C. S_n有最大值　　D. $S_6=0$

【答案】B

拓展 4-3.(2022-2023 房山高三上期末 03)已知数列$\{a_n\}$满足$2a_{n+1}=a_n$，$a_1=2$，则数列$\{a_n\}$的前四项和S_4的值为

A. $\frac{15}{16}$　　B. $-\frac{15}{16}$　　C. $\frac{15}{4}$　　D. $-\frac{15}{4}$

【答案】C

拓展 5-1.（2021-2022 东城高一上期末 07）（3 分）设$a=\log_3 4$，$b=3^{-\frac{1}{3}}$，$c=\log_3 3^{-1}$，则

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

【分析】利用指数函数，对数函数的单调性，再借助中间量 1 和 0 求解即可．

【解答】解：$a=\log_3 4>\log_3 3=1$，

$\because 0<3^{-\frac{1}{3}}<3^0$，$\therefore 0<b<1$，

$c=\log_3 3^{-1}=-1$，

$\therefore c<b<a$，

故选：D.

【点评】本题考查了指数函数，对数函数的单调性，对数的计算公式，属于基础题.

拓展 5-2.（2021-2022 朝阳高一上期末 05）已知 $a=e^{\frac{1}{3}},b=log_3 2,c=log_{\frac{1}{3}}2$，则 a，b，c 的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

【分析】由已知结合指数函数与对数函数的单调性确定 a，b，c，的范围即可比较大小.

【解答】解：因为 $a=e^{\frac{1}{3}}>1$，$b=\log_3 2\in(0,1)$，$c=\log_{\frac{1}{3}}2<0$，

所以 $a>b>c$.

故选：B.

【点评】本题主要考查了利用指数函数与对数函数的单调性比较函数值大小，属于基础题.

拓展 5-3.（2021-2022 石景山高一上期末 08）令 $a=6^{0.7}$，$b=0.7^6$，$c=\log_{0.7}6$，则 a, b, c 的大小顺序是

A. $b<c<a$　　B. $c<b<a$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

【答案】B

拓展 6-1.（202301 西城期末 03）. 已知函数 $f(x)=\lg|x|$，则 $f(x)$

A. 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

B. 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

C. 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

D. 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

答案 C

拓展 6-2.（202203 海淀一模 13）若函数 $f(x)=\left|2^x-a\right|-1$ 的值域为 $[-1,+\infty)$，则实数 a 的一个取值可以为____.

【答案】1，（$a>0$ 的任意一个数）

拓展 6-3.(202105 西城二模 08)已知 $f(x)=\left|\lg x-a\right|$，记关于 x 的方程 $f(x)=1$ 的所有实数根的乘积为 $g(a)$，则 $g(a)$

A. 有最大值，无最小值　　B. 有最小值，无最大值

C. 既有最大值，也有最小值　　D. 既无最大值，也无最小值

【答案】D

拓展 6-4.(202105 房山二模 06)已知函数 $f(x)=|\log_2 x|$，则不等式 $f(x)<2$ 的解集为

A. $(-4,0)\cup(0,4)$　　B. $(0,4)$

C. $(\frac{1}{4},4)$　　D. $(\frac{1}{4},+\infty)$

【答案】C

拓展 7-1.（2023 海淀一模 7）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D．若 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ $(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\frac{\lambda}{\mu}=$

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 3

【答案】B

【分析】设 $AC=1$，由角平分线定理求得 $\frac{BD}{CD}$，然后由向量的线性运算可用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 表示出 $\overrightarrow{AD}$，从而求得 λ,μ，得出结论．

【详解】设 $AC=1$，因为 $\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，所以 $AB=2$，

又 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，所以 $\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$，$CD=\frac{1}{3}BC$，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=\frac{1}{3},\mu=\frac{2}{3}$，

所以 $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{2}$．

故选：B．

拓展 7-2.（2023 西城一模 5）已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CP}$，则

A. $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　D. $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

【答案】A

【解析】因为 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{CP}$ 共线且有公共点 C，所以 B、C、P 三点共线，且 P 在 BC 的延长线上。

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$，故选 A。

【知识点】本题考查了平面向量的线性运算。

拓展 7-3.（2021-2022 北京 161 中学高三上期末 9）已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，记 $\boldsymbol{m}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b},(t\in\mathbf{R})$，则 $|\boldsymbol{m}|$ 的取值范围为

A. $[\sqrt{3},+\infty]$　　B. $[\sqrt{2},+\infty]$　　C. $[1,+\infty]$　　D. $[\frac{1}{2},+\infty]$

【答案】A

拓展 7-4.（2021-2022 北京市东城区高三上期末 9）已知点 A,B,C 不共线，λ,μ 为实数，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则“$0<\lambda+\mu<1$”是“点 P 在△ABC 内（不含边界）”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

拓展 8-1．已知函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)-\sqrt{3}\cos(x+\varphi)$ 满足 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$，则函数 $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 是

A．奇函数，关于点 $(\pi,0)$ 成中心对称　　B．偶函数，关于点 $(\pi,0)$ 成中心对称

C．奇函数，关于直线 $x=\pi$ 成轴对称　　D．偶函数，关于直线 $x=\pi$ 成轴对称

答案．D

【详解】$f(x)=\sin(x+\varphi)-\sqrt{3}\cos(x+\varphi)=2\left[\frac{1}{2}\sin(x+\varphi)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+\varphi)\right]=2\sin\left(x+\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$

因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$，即 $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi-\frac{\pi}{3}\right)=2$

所以 $\varphi-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，即 $\varphi=\frac{7\pi}{12}+2k\pi,k\in Z$，

则 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos x$，

令 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

对于 AC，因为 $g(-x)=2\cos(-x)=2\cos x=g(x)$，所以函数 $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 是偶函数.AC 错误；

对于 BD，$g(\pi)=2\cos\pi=-2$，所以函数 $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 关于直线 $x=\pi$ 成轴对称，B 错误 D 正确.

故选：D

拓展 8-2. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$ 上单调，且对任意实数 x 均有 $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)\le f(x)\le f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 成立，则 $\varphi=$

A．$\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

答案：D

【详解】由题意知，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$ 上单调，且 $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)\le f(x)\le f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 恒成立，

所以 $\frac{T}{2}=\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$，即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=1$，

又 $\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的最大值点，$\frac{7\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的最小值点，

所以 $1\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

故选：D.

拓展 8-3．设函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+k(\omega>0)$，若 $f(x)\le f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 对任意的实数 x 都成立，则ω的一个可取值为

A． 4　　B． 5　　C． 7　　D． 8

答案：D

【分析】由 $f(x)\le f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 对任意的实数 x 都成立得 $\sin\left(\omega\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=1$，即有 $\omega\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2m\pi,\ m\in\mathbf{Z}$，求解即可

【详解】$\because f(x)\le f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 对任意的实数 x 都成立，故 $\sin(\omega\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=1$，则 $\omega\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2m\pi,\ m\in\mathbf{Z}$，故 $\omega=2+6m,\ m\in\mathbf{Z}$，

故当 $m=1$时，一个可能取值为 8.

故选：D

拓展 8-4．已知函数 $f(x)=a\sin x-b\cos x$（a、b 为常数，$a\neq 0,x\in\mathrm{R}$）在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处取得最小值，则函数 $y=f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$

是

A．奇函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

B．奇函数且它的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ 对称

C．偶函数且它的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ 对称

D．偶函数且它的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

答案：A

【详解】$f(x)=a\sin x-b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\sin\varphi=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

若 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处取得最小值，则 $\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)=-1$，

所以 $\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ 即 $\varphi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in Z$，

所以 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\frac{5\pi}{4}+2k\pi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\frac{5\pi}{4})$，

所以 $f(\frac{3\pi}{4}-x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\frac{3\pi}{4}-x+\frac{5\pi}{4})=\sqrt{a^2+b^2}\sin(-x)=-\sqrt{a^2+b^2}\sin x$，

可得函数 $f(\frac{3\pi}{4}-x)$ 是奇函数，且图象关于点 $(\pi,0)$ 对称.

故选：A

拓展 8-5.（201903 石景山一模理 08）已知函数 $f(x)=a\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ 的一条对称轴为 $x=-\frac{\pi}{6}$, $f(x_1)+f(x_2)=0$,且函数 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上具有单调性,则 $|x_1+x_2|$ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】C

拓展 9-1.（202205 海淀二模 10）在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，E 为棱 DC 上的动点，F 为线段 $B'E$ 的中点. 给出下列四个结论：

① $B'E\perp AD'$；

②直线 $D'F$ 与平面 $ABB'A'$ 所成角不变；

③点 F 到直线 AB 的距离不变；

④点 F 到 A,D,D',A' 四点的距离相等.

其中，所有正确结论的序号为

A.②③　　B.③④　　C.①③④　　D.①②④

【答案】C

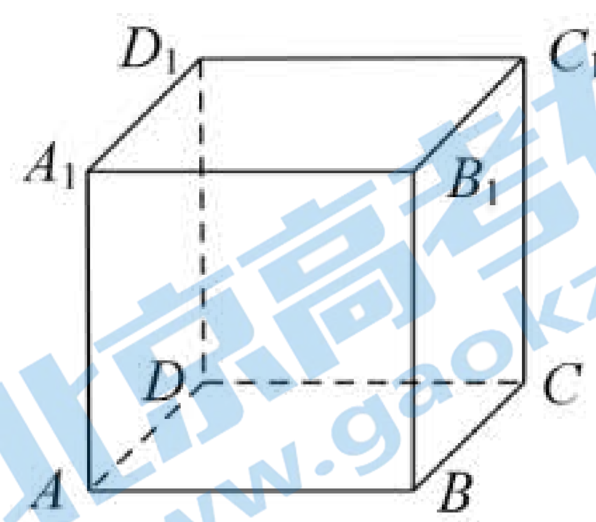
拓展 9-2.（202103 定位考 10）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在正方形 ADD_1A_1 内，且不在棱上，则

A.在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q，使得 $PQ\parallel AC$

B.在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q，使得 $PQ\perp AC$

C.在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q，使得平面 $PQC_1\parallel$ 平面 ABC

D.在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q，使得 $AC\perp$ 平面 PQC_1



【答案】D

拓展 9-3.（2021-2022 学年石景山区高三期末 10）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，线段 B_1D_1 上有两个动点 E,F，且 $EF=\frac{1}{2}$，给出下列三个结论：

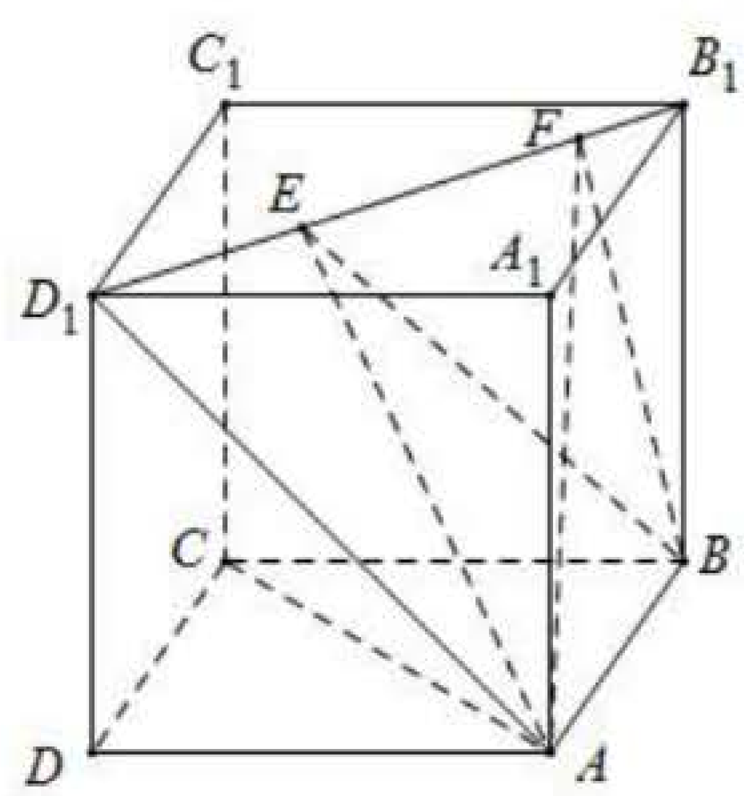
① $AC\perp BE$；

②△ AEF 的面积与△ BEF 的面积相等；

③三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值.

其中，所有正确结论的个数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3



【答案】C

拓展 9-4.（2023 西城一模 15）如图，在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M,N 分别在线段 AD_1 和 B_1C_1 上. 给出下列四个结论：

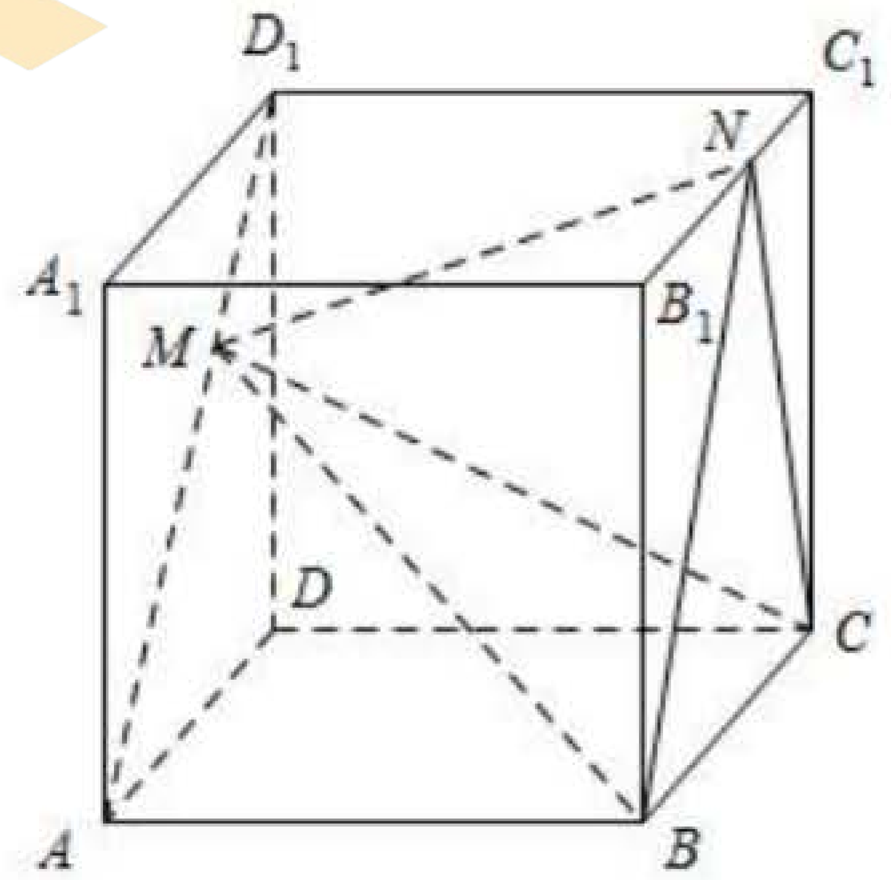
① MN 的最小值为 2；

②四面体 $NMBC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$；

③有且仅有一条直线 MN 与 AD_1 垂直；

④存在点 M,N，使 $\triangle MBN$ 为等边三角形.

其中所有正确结论的序号是________.



【答案】①②④

【解析】①因为公垂线段是异面直线上两点间的最短距离，D_1C_1 是 AD_1 与 B_1C_1 的公垂线段，所以当 M,N 分别与 D_1,C_1 重合时，MN 最短为2，所以①正确；

②由 AD_1 // 平面 NBC 可知，当点 M 在 AD_1 上运动时，点 M 到平面 NBC 的距离不变，距离 $h=2$，由 B_1C_1 // BC 可知，当点 N 在 B_1C_1 上运动时，N 到 BC 的距离不变，$\triangle NBC$ 的面积不变，$V_{M-NBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle NBC}h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\frac{4}{3}$，所以②正确；

③当 M,N 分别与 D_1,C_1 重合时，$MN\perp AD_1$；当 M 为 AD_1 中点，N 与 B_1 重合时，$MN\perp AD_1$，所以③错误；

④在 A_1D_1 上取一点 N_1，使得 $A_1N_1=B_1N$，连接 AN_1,MN_1，

则 $MB^2=MA^2+AB^2=MA^2+4$，

$BN^2=AN_1^{\,2}=AA_1^{\,2}+A_1N_1^{\,2}=A_1N_1^{\,2}+4$，

$MN^2=MN_1^{\,2}+NN_1^{\,2}=MN_1^{\,2}+4$，

若 $\triangle MBN$ 为等边三角形，则 $MB=BN=MN$，即 $MA=A_1N_1=MN_1$，

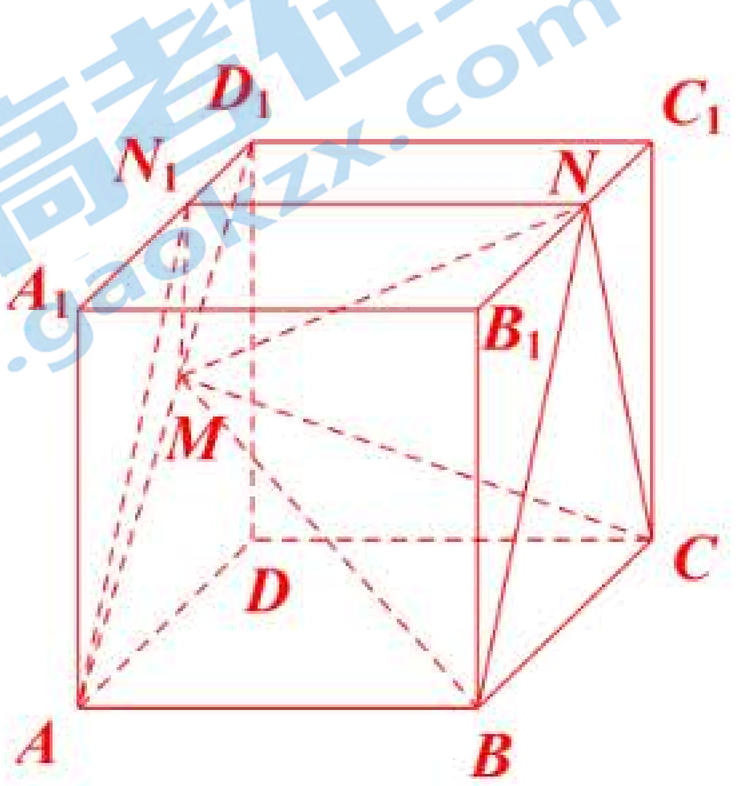
要判断 $\triangle MBN$ 能否为等边三角形，只需考虑在 $MA=A_1N_1$ 的条件下，MA 与 MN_1 能否相等.

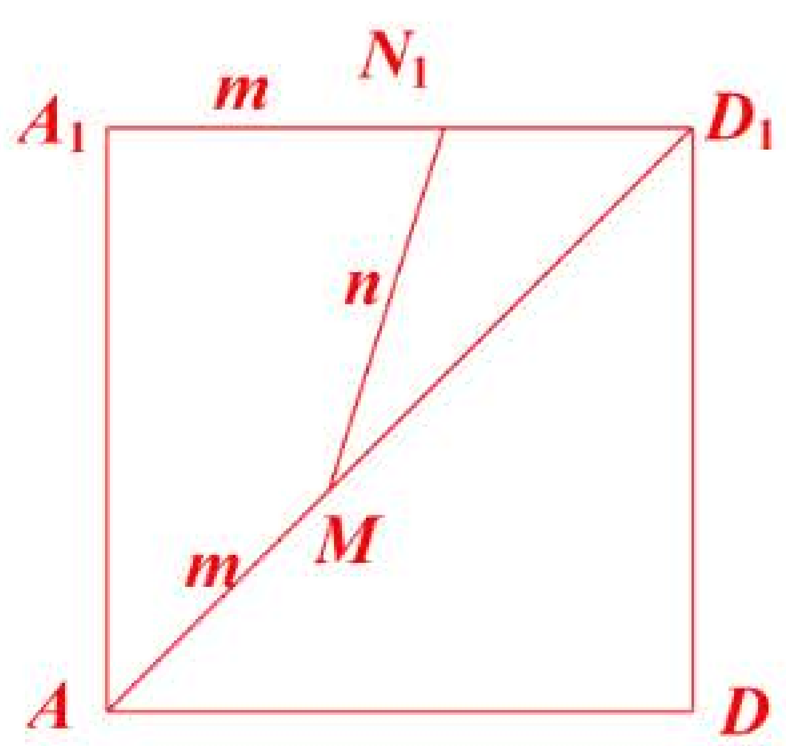
设 $MA=A_1N_1=m$，$MN_1=n$，当 N_1 与 A_1 重合时，$m<n$，当 N_1 与 D_1 重合时，$m>n$，

在连续变化过程中，必定存在某个位置使得 $m=n$，

即 $\triangle MBN$ 可能为等边三角形，所以④正确.

故答案为①②④.





拓展 10-1．（2021-2022 朝阳高三上期中 07）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|(\frac{1}{2})^x-1|, x\le 1\\ m+\ln x, \quad x>1\end{cases}$，若存在 $h\in R$，使函数 $g(x)=f(x)-h$ 恰有三个零点，则实数 m 的取值范围是

A. $[0,\frac{1}{2})$　　B. $[0,\sqrt{e})$　　C. $(-\infty,\frac{1}{2})$　　D. $(-\infty,\sqrt{e})$

【答案】C

拓展 10-2．（2021-2022 昌平高三上期末 10） 若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-m, x<1\\ x^2-4mx+3m^2, x\ge 1\end{cases}$ 恰有两个零点，则实数 m 的取值范围是

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

C. $\left[\frac{1}{3},1\right)$　　D. $\left[\frac{1}{3},1\right)\cup[2,+\infty)$

【答案】D

拓展 10-3．（2021-2022 北京昌平一中高三上期中 10）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2, x\geqslant a\\ |x+a|, x<a\end{cases}$，若对于任意正数 k，关于 x 的方程 $f(x)=k$ 都恰有两个不相等的实数根，则满足条件的实数 a 的个数为

A．0　　B．1　　C．2　　D．无数

【答案】B

拓展 10-4．（2021-2022 房山高三上期末 15） 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3, x\le 0\\ 1+\log_3 x, \quad x>0\end{cases}$，给出下列四个结论：

①函数 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$；

②对 $\forall t>0$，方程 $f(x)=t$ 都有 3 个实数根；

③$\exists x_0\in \mathbf{R}^+$，使得 $f(-x_0)=f(x_0)$；

④若互不相等的实数 x_1,x_2,x_3 满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是 $(-\frac{35}{9},5]$.

其中所有正确结论的序号是________.

【答案】①③④

拓展 11-1.（2023 东城一模 11）函数 $f(x)=\sqrt{1-x}+\ln x$ 的定义域是________.

【答案】$(0,1]$

【解析】由题可知

$\begin{cases}1-x\geq 0\\ x>0\end{cases}$，解得 $0<x\leq 1$

【知识点】本题考查了函数定义域。

拓展 11-2.（202203 石景山一模 11）函数 $f(x)=\dfrac{\lg(x+1)}{x+2}$ 的定义域是________.

【答案】$\{x|x>-1\}$

拓展 11-3.202301 石景山高三期末 11. 函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为________.

答案 $[-2,0)\cup(0,2]$

拓展 11-4.202301 丰台高三期末 11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+\sqrt{x+1}$ 的定义域为________.

答案 $[-1,0)\cup(0,+\infty)$

拓展 12-1.（2023 石景山一模 13）$(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}})^n$ 若的展开式中含有常数项，则正整数 n 的一个取值为

________.

拓展 12-2.（2023 朝阳一模 03）设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，若 $a_2=a_3$，则 $n=$

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【答案】A

【分析】先求出 $(1+x)^n$ 展开式第 $r+1$ 项，再由 $a_2=a_3$ 列出方程，即可求出 n 的值.

【详解】$(1+x)^n$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_n^r x^r$，

$\because a_2=a_3$，$\therefore C_n^2=C_n^3$，

$\therefore n=2+3=5$.

故选：A.

拓展 12-3.（202205 西城二模 11）二项式 $(1+x)^n(n\in N^*)$ 的展开式中 x^2 的系数为 21，则 $n=$________.

【答案】7

拓展 12-4（2022-2023 东城高三期末上 3）在 $(x+\dfrac{1}{x})^n$ 的展开式中，若第 3 项的系数为 10，则 $n=$

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【答案】B

拓展 12-5（2022-2023 昌平高三上期末 5）已知二项式 $(x+\frac{a}{x})^5$ 的展开式中 $\frac{1}{x}$ 的系数是10，则实数 $a=$

A. -1　　　　B. 1　　　　C. -2　　　　D. 2

【答案】B

拓展 13-1（2020 西城一模 14） 函数 $f(x)=sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的最小正周期为_______；若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\alpha)$ 上单调递增，则 α 的最大值为_______.

答案：14． π， $\frac{\pi}{8}$

拓展 13-2(2020 丰台一模 9) 将函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，且 $g(0)=1$，下列说法错误的是

（A） $g(x)$ 为偶函数

（B） $g(-\frac{\pi}{2})=0$

（C）当 $\omega=5$ 时， $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上有 3 个零点

（D）若 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{5}]$ 上单调递减，则 ω 的最大值为 9

答案: D

拓展 13-3（2022 海淀一模）

设函数 $f(x)=2\sin x\cos x+A\cos 2x\ (A\in\mathbf{R})$．已知存在 A 使得 $f(x)$ 同时满足下列三个条件中的两个：

条件①： $f(0)=0$；

条件②： $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$；

条件③： $x=\frac{\pi}{8}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴．

（Ⅰ）请写出 $f(x)$ 满足的两个条件，并说明理由；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $(0,m)$ 上有且只有一个零点，求 m 的取值范围．

$f(x)=2\sin x\cos x+A\cos 2x=\sin 2x+A\cos 2x=\sqrt{1+A^2}\sin(2x+\varphi)$

(其中 $\tan\varphi=A,\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)；

由条件① $f(0)=0$ 得　 $A=0$；

由条件② $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$ 得 $A=\pm1$；

由条件③：$x=\frac{\pi}{8}$是$f(x)$图象的一条对称轴得$\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}$;

所以$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in \mathbf{Z}$,所以$A=\tan\varphi=\tan\frac{\pi}{4}=1$;

所以$f(x)$满足条件②③.

（II）由（I）知$f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$;

$f(x)$在区间$(0,m)$上有且只有一个零点,

所以$\pi<2m+\frac{\pi}{4}\le 2\pi$，$\frac{3\pi}{8}<m\le\frac{7\pi}{8}$;

m的取值范围$(\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}]$.

拓展 14-1

已知F是抛物线$C: y^2=4x$的焦点，M是C上一点，FM的延长线交y轴于点N．若M为FN的中点，则$|FN|=$_________.

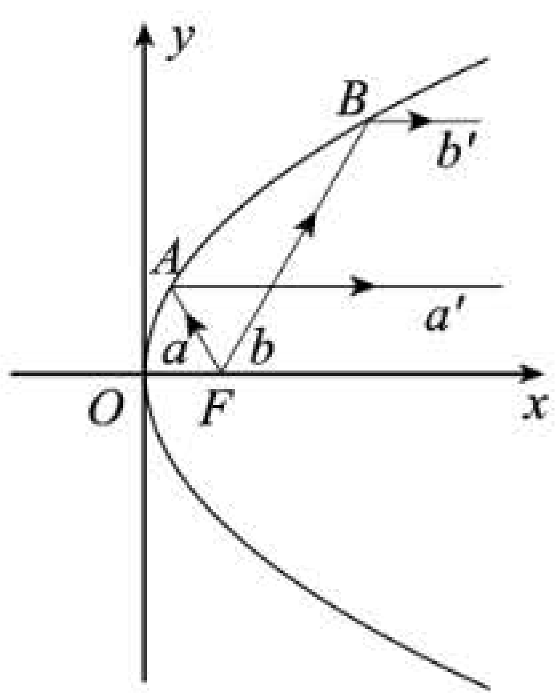
答案：3

拓展 14-2（2020 朝阳二模 5）直线l过抛物线$y^2=2x$的焦点F，且l与该抛物线交于不同的两点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．若$x_1+x_2=3$，则弦AB的长是（　　）

（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）8

答案：A

拓展 14-3 抛物线具有以下光学性质：从焦点出发的光线经抛物线反射后平行于抛物线的对称轴．该性质在实际生产中应用非常广泛．如图，从抛物线$y^2=4x$的焦点F发出的两条光线a,b分别经抛物线上的A,B两点反射，已知两条入射光线与x轴所成锐角均为$60°$，则两条反射光线a'和b'之间的距离为



（A）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\frac{8}{3}$

（C）$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\frac{8\sqrt{3}}{3}$

答案：C

拓展 15-1.（2021-2022 昌平高三上期末 15）已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前n项和为S_n，前n项乘积为T_n，

$T_2=T_7$， $a_6+a_7=6$，则

①数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$________；

②满足$S_n>T_n$的最大正整数n的值为________.

【答案】$2^{n-5}(n\in\mathbf{N}^*)$；10

拓展 15-2.（2021-2022 一七一中高三上期中 10）若三个非零且互不相等的实数x_1， x_2， x_3成等差数列且满足$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{2}{x_3}$，则称$x_1$， x_2， x_3成一个"β等差数列"．已知集合$M=\{x||x|\leqslant 100，x\in Z\}$，则由$M$中的三个元素组成的所有数列中，"$\beta$等差数列"的个数为

A．25　　B．50　　C．51　　D．100

【答案】B

拓展 15-3.（2021-2022 东城高三上期末 10）已知$\{a_n\}$是各项均为正整数的数列，且$a_1=3$， $a_7=8$，对$\forall k\in N^*$，$a_{k+1}=a_k+1$与$a_{k+1}=\dfrac{1}{2}a_{k+2}$有且仅有一个成立，则$a_1+a_2+\cdots+a_7$的最小值为

A. 18　　B. 20　　C. 21　　D. 22

【答案】B

拓展 16-1（202105 朝阳二模）

在$\triangle ABC$中，$b^2+c^2-a^2=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}bc$.

（I）求$\tan A$的值；

（II）若$3c\sin A=\sqrt{2}a\sin B$，且$\triangle ABC$的面积$S=2\sqrt{2}$，求c的值.

【答案】（I）因为$b^2+c^2-a^2=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}bc$，

所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\dfrac{8}{9}}=\dfrac{1}{3}$.

所以$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.　……7 分

（II）因为$3c\sin A=\sqrt{2}a\sin B$，

由正弦定理得 $3ac=\sqrt{2}ab$，所以 $b=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}c$．

因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{2}$，

即 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}c^2}{2}\times\dfrac{1}{3}=2\sqrt{2}$，所以 $c^2=8$．

所以 $c=2\sqrt{2}$．…… 13 分

拓展 16-2（202103 定位考）

在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=-\dfrac{1}{8}$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

（I）$\sin B$ 的值；

（II）$\triangle ABC$ 的面积．

条件①：$a=4$，$c=6$；

条件②：$a=4$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分

【答案】（16）（共 14 分）

解：选条件①：$a=4$，$c=6$

（I）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$， …………3 分

且 $\cos C=-\dfrac{1}{8}$，$a=4$，$c=6$

所以 $36=16+b^2-8b(-\dfrac{1}{8})$

所以 $b=4$，$b=-5$（舍）． …………5 分

由正弦定理得 $\sin B=\dfrac{b\sin C}{c}$． …………8 分

因为 $\cos C=-\dfrac{1}{8}$，$C\in(0,\pi)$

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$． …………9 分

所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$． …………10 分

（II）因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ …………13 分

在 $\triangle ABC$ 中，$a=4$，$b=4$，$\sin C=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

所以 $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{7}$． …………14 分

选条件②：$a=4$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形．

（I）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\cos C=-\frac{1}{8}$，

所以 C 为钝角.

因为 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

所以 C 为顶角.

所以 $a=b=4$. …………2 分

因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$， …………5 分

所以 $c=6$.

由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin C}{c}$. …………8 分

因为 $\cos C=-\frac{1}{8}$，$C\in(0,\pi)$

所以 $\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$. …………9 分

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$. …………10 分

（II）因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$ …………13 分

在 $\triangle ABC$ 中，$a=4$，$b=4$，$\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

所以 $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{7}$. …………14 分

拓展 16-3（202104 东城一模）

在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C=\frac{1}{7}$, $c=8$,再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知,求:

(I) b 的值;

(II)角 A 的大小和求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $a=7$;

条件②: $\cos B=\frac{11}{14}$.

注:如果选择条件①、条件②分别解答,按第一个解答计分.

【解析】

选择条件①: (I)因为 $c=8$, $a=7$, $\cos C=\frac{1}{7}$,

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,得 $b^2-2b-15=0$,

所以 $b=5$ 或 $b=-3$ (舍),所以 $b=5$.

(II)因为 $\cos C=\frac{1}{7}$,所以 $0<C<\frac{\pi}{2}$,故 $\sin C>0$,

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-(\frac{1}{7})^2}=\frac{4}{7}\sqrt{3}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得 $\frac{7}{\sin A}=\frac{8}{\frac{4}{7}\sqrt{3}}$,

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $c>a$,所以 $C>A$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 7\times 5\times\frac{4}{7}\sqrt{3}=10\sqrt{3}$.

选择条件②：(I)因为 $\cos B=\frac{11}{14}$, $0<B<\pi$,

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-(\frac{11}{14})^2}=\frac{5}{14}\sqrt{3}$.

因为 $\cos C=\frac{1}{7}$,所以 $0<C<\frac{\pi}{2}$,故 $\sin C>0$,

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-(\frac{1}{7})^2}=\frac{4}{7}\sqrt{3}$.

由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,得 $\frac{b}{\frac{5}{14}\sqrt{3}}=\frac{8}{\frac{4}{7}\sqrt{3}}$,

所以 $b=5$.

(II)由(I)知, $\sin B=\frac{5}{14}\sqrt{3}$, $\sin C=\frac{4}{7}\sqrt{3}$,

又因为 $\cos B=\frac{11}{14}$, $\cos C=\frac{1}{7}$,

在 $\triangle ABC$ 中, $A=\pi-(B+C)$,

所以 $\cos A=-\cos(B+C)$

$=-\cos B\cos C+\sin B\sin C$

$=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5}{14}\sqrt{3}\times\frac{4}{7}\sqrt{3}$

$=\frac{1}{2}$.

又因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 5\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$.

拓展 16-4（2022 清华附高三专题练习）

在 $\triangle ABC$ 中， $a=2\sqrt{3}$， $a^2+c^2-\sqrt{3}ac=b^2$.

(1)求 B；

(2)再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，求$\triangle ABC$的面积.

条件①：$b=3$；

条件②：$\cos A=\dfrac{4}{5}$；

条件③：$\triangle ABC$的周长为$4+2\sqrt{3}$.

【答案】(1) $B=\dfrac{\pi}{6}$

(2)选择条件②, $S=\dfrac{3\sqrt{3}+4}{2}$；选择条件③ $S=\sqrt{3}$.

【分析】(1)利用余弦定理求解即可；

(2)根据条件①②③逐一计算，满足三角形只有一个解即可，再求面积.

(1)

由余弦定理知，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{6}$.

(2)

选择条件①：

把$a=2\sqrt{3}$，$b=3$代入$a^2+c^2-\sqrt{3}ac=b^2$中，化简得$c^2-6c+3=0$，解得$c=3\pm\sqrt{6}$，

所以存在两个$\triangle ABC$，不符合题意；

选择条件②：

因为$\cos A=\dfrac{4}{5}$，$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A=\dfrac{3}{5}$，

由正弦定理知，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以$b=\dfrac{2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，

因为$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}+4}{10}$，

所以$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}+4}{10}=\dfrac{3\sqrt{3}+4}{2}$.

选择条件③：

因为$\triangle ABC$的周长为$4+2\sqrt{3}$，且$a=2\sqrt{3}$，所以$b+c=4$，

又$a^2+c^2-\sqrt{3}ac=b^2$，所以$12+c^2-6c=b^2=(4-c)^2$，解得$b=c=2$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$.

拓展 17-1（202105 西城二模 18）(18)（本小题共 14 分）

在新冠病毒疫情防控期间，北京市中小学开展了“优化线上教育与学生线下学习相结合”的教育教学实践活动.为了解某区教师对 A,B,C,D,E 五类线上教育软件的使用情况（每位教师都使用这五类教育软件中的某一类且每位教师只选择一类教育软件），从该区教师中随机抽取了 100 人，统计数据如下表，其中 $a>b$，$a,b\in\mathbf{N}$.

教育软件类型	A	B	C	D	E
选用教师人数	10	15	a	30	b

假设所有教师选择使用哪类软件相互独立.

（Ⅰ）若某校共有 300 名教师，试估计该校教师中使用教育软件 C 或 E 的人数；

（Ⅱ）从该区教师中随机抽取 3 人，估计这 3 人中至少有 2 人使用教育软件 D 的概率；

（Ⅲ）设该区有 3000 名教师，从中随机抽取 1 人，记该教师使用教育软件 C 或 D 的概率估计值为 P_1；该区学校 M 有 600 名教师，其中有 200 人使用教育软件 C，100 人使用教育软件 D，从学校 M 中随机抽取 1 人，该教师使用教育软件 C 或 D 的概率值为 P_2；从该区其他教师（除学校 M 外）中随机抽取 1 人，该教师使用教育软件 C 或 D 的概率估计值为 P_3.试比较 P_1，P_2 和 P_3 之间的大小.（结论不要求证明）

解:（Ⅰ）从表格数据可知，$10+15+a+30+b=100$，则 $a+b=45$，

所以样本中教师使用教育软件 C 或 E 的人数为 45 人，　…………2 分

故估计该校教师中使用教育软件 C 或 E 的人数为 $300\times\frac{45}{100}=135$ 人.……4 分

（Ⅱ）设事件 F 为“从该区教师中随机抽取 3 人，至少有 2 人使用教育软件 D”.

由题意,样本中的 100 名教师使用软件 D 的频率为 $\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$.

用频率估计概率，从该区教师中随机抽取一名教师，估计该教师使用教育软件 D 概率 $\frac{3}{10}$.

记被抽取的 3 人中使用软件 D 的人数为 X，则 $X\sim B(3,\frac{3}{10})$.　………7 分

所以 $P(X=2)=C_3^2(\frac{3}{10})^2(1-\frac{3}{10})=\frac{189}{1000}$，　……………8 分

$P(X=3)=C_3^3(\frac{3}{10})^3(1-\frac{3}{10})^0=\frac{27}{1000}$，　……………9 分

所以 $P(F)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{216}{1000}=\frac{27}{125}$.……………11 分

（Ⅲ）$P_2<P_1<P_3$.　……………14 分

拓展 17-2.（2022-2023 广渠门中学高三 10 月份月考）某校为缓解高三学生压力，举办了一场趣味运动会，其中有一个项目为篮球定点投篮，比赛分为初赛和复赛．初赛规则为：每人最多投 3 次，每次投篮的结果相互独立．在 A 处每投进一球得 3 分，在 B 处每投进一球得 2 分，否则得 0 分．将学生得分逐次累加并用 X 表示，如果 X 的值不低于 3 分就判定为通过初赛，立即停止投篮，否则应继续投篮，直到投完三次为止．现有两种投篮方案：

方案 1：先在 A 处投一球，以后都在 B 处投；

方案 2：都在 B 处投篮；

已知甲同学在 A 处投篮的命中率为 $\frac{1}{4}$，在 B 处投篮的命中率为 $\frac{4}{5}$.

（1）若甲同学选择方案 1，求他初赛结束后所得总分 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；
（2）你认为甲同学选择哪种方案通过初赛的可能性更大？说明理由．

【分析】（1）判断随机变量 X 的所有可能值，求出 X 的分布列，代入期望公式计算即可；
（2）由分布列可得甲同学选择方案 1 通过测试的概率为 P_1，再计算甲同学选择方案 2 通过测试的概率为 P_2，比较大小即可．

【解答】（1）设甲同学在 A 处投中为事件 A，在 B 处第 i 次投中为事件 $B_i(i=1,2)$，

由已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B_i)=\frac{4}{5}$．X 的取值为 0，2，3，4．

则 $P(X=0)=P(\overline{A}\overline{B_1}\overline{B_2})=P(\overline{A})P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})=\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{100}$，

$P(X=2)=P(\overline{A}B_1\overline{B_2})+P(\overline{A}\overline{B_1}B_2)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{6}{25}$，

$P(X=3)=P(A)=\frac{1}{4}$，$P(X=4)=P(\overline{A}B_1B_2)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$，

X 的分布列为：

X	0	2	3	4
P	$\frac{3}{100}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{12}{25}$

X 的数学期望为：$E(X)=0\times\frac{3}{100}+2\times\frac{6}{25}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{12}{25}=\frac{315}{100}=3.15$．

（2）甲同学选择方案 1 通过初赛的概率为 P_1，选择方案 2 通过初赛的概率为 P_2，

则 $P_1=P(X=3)+P(X=4)=\frac{1}{4}+\frac{12}{25}=\frac{73}{100}=0.73$，

$P_2=P(B_1B_2)+P(\overline{B_1}B_2B_3)+P(B_1\overline{B_2}B_3)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{112}{125}=0.896$，

$\because P_2>P_1$，$\therefore$ 甲同学选择方案 2 通过初赛的可能性更大．

拓展 17-3．（2022-2023 北京 55 中高三 10 月份月考）第 24 届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 4 日在北京、张家口盛大开幕．为保障本届冬奥会顺利运行，共招募约 2.7 万人参与赛会志愿服务．赛会共设对外联络服务、竞赛运行服务、媒体运行与转播服务、场馆运行服务、市场开发服务、人力资源服务、技术运行服务、文化展示服务、赛会综合服务、安保服务、交通服务、其他共 12 类志愿服务．

（Ⅰ）甲、乙两名志愿者被随机分配到不同类志愿服务中，每人只参加一类志愿服务．已知甲被分配到对外联络服务，求乙被分配到场馆运行服务的概率是多少？

（Ⅱ）已知来自某中学的每名志愿者被分配到文化展示服务类的概率是 $\frac{1}{10}$，设来自该中学的 2 名志愿者被分配到文化展示服务类的人数为 ξ，求 ξ 的分布列与期望．

（Ⅲ）2.7 万名志愿者中，$18-35$ 岁人群占比达到 95%，为了解志愿者对某一活动方案是否支持，通过分层抽样获得如下数据：

	$18-35$ 岁人群		其它人群	
	支持	不支持	支持	不支持
方案	90 人	5 人	1 人	4 人

假设所有志愿者对活动方案是否支持相互独立．

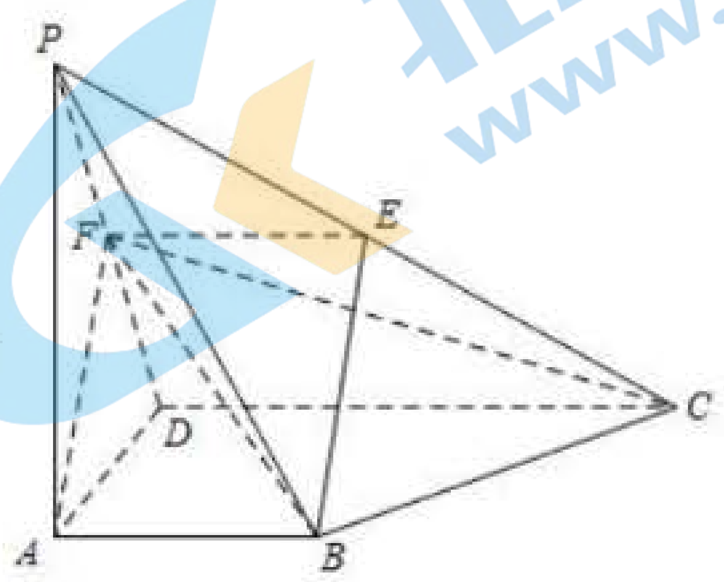
将志愿者支持方案的概率估计值记为 p_0，去掉其它人群志愿者，支持方案的概率估计值记为 p_1，试比较 p_0 与 p_1 的大小．（结论不要求证明）

【解答】解：（Ⅰ）由已知共 12 类志愿服务，甲被分配到对外联络服务，
且甲、乙两名志愿者被随机分配到不同类志愿服务中，
故乙可被分配的志愿服务共 11，
所以乙被分配到场馆运行服务的概率为 $\frac{1}{11}$；
（Ⅱ）由已知可得随机变量的可能取值为 0，1，2，
故 $P(\xi=0)=C_2^0\times(1-\frac{1}{10})^2\times(\frac{1}{10})^0=\frac{81}{100}$，
$P(\xi=1)=C_2^1\times(1-\frac{1}{10})^1\times(\frac{1}{10})^1=\frac{18}{100}=\frac{9}{50}$，
$P(\xi=2)=C_2^2\times(1-\frac{1}{10})^0\times(\frac{1}{10})^2=\frac{1}{100}$，
分布列如下：

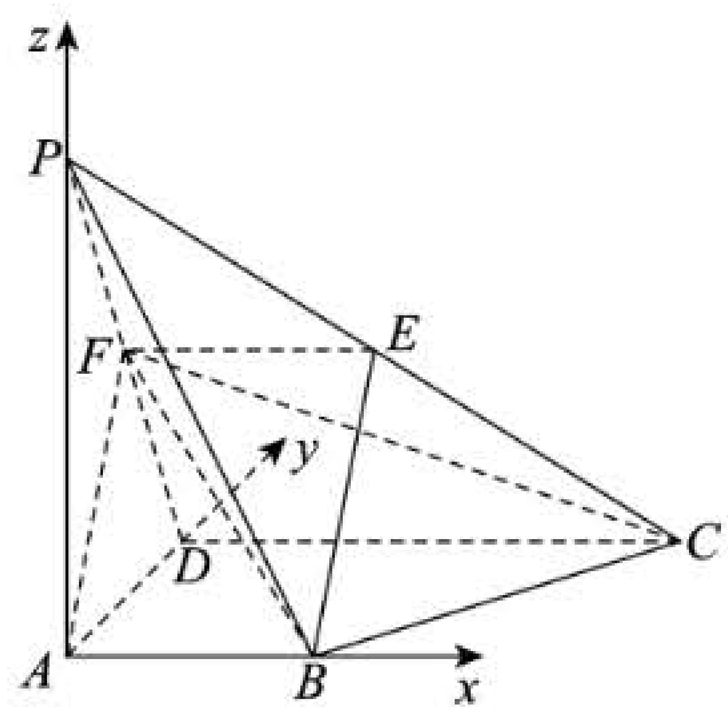
ξ	0	1	2
P	$\frac{81}{100}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{1}{100}$

期望 $E(\xi)=0\times\frac{81}{100}+1\times\frac{9}{50}+2\times\frac{1}{100}=\frac{1}{5}$；
（Ⅲ）由已知得志愿者支持方案的概率估计值记为 $p_0=\frac{90+1}{90+5+1+4}=\frac{91}{100}$，
去掉其它人群志愿者，支持方案的概率估计值记为 $p_1=\frac{90}{90+5}=\frac{18}{19}>\frac{91}{100}$，
故 $p_1>p_0$．

拓展 18-1：（2023 西城一模 18））
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$AB=1$，$PA=AD=CD=2$．E 为棱 PC 上一点，平面 ABE 与棱 PD 交于点 F．再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，完成下列两个问题：
（Ⅰ）求证：F 为 PD 的中点；
（Ⅱ）求二面角 $B-FC-P$ 的余弦值．
条件①：$BE//AF$；
条件②：$BE\perp PC$．
注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分



【答案】
选条件①：$BE//AF$．
（Ⅰ）因为 $AB//CD$，$AB\not\subset$ 平面 PCD，
所以 $AB//$ 平面 PCD．………1 分
因为平面 $ABEF\cap$ 平面 $PCD=EF$，
所以 $AB//EF$．………2 分
又 $BE//AF$，所以四边形 $ABEF$ 为平行四边形．
所以 $AB//EF$ 且 $AB=EF$．………3 分
因为 $AB//CD$ 且 $AB=\frac{1}{2}CD$，所以 $EF//CD$ 且 $EF=\frac{1}{2}CD$．



所以 EF 为 $\triangle PCD$ 的中位线. ………5 分

所以 F 为 PD 的中点. ………6 分

（Ⅱ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$, $PA\perp AD$.

又 $AB\perp AD$，所以 AB, AD, AP 两两相互垂直.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$， ………7 分

则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(2,2,0)$，$P(0,0,2)$，$D(0,2,0)$，$F(0,1,1)$.

所以 $\overrightarrow{BC}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{BF}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$.

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+2y=0,\\ -x+y+z=0.\end{cases}$

令 $y=-1$，则 $x=2$，$z=3$. 于是 $\boldsymbol{m}=(2,-1,3)$. ………9 分

因为 $AB\perp$ 平面 PAD，且 $AB//CD$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD.

所以 $AF\perp CD$.

又 $PA=AD$，且 F 为 PD 的中点，所以 $AF\perp PD$.

所以 $AF\perp$ 平面 PCD，所以 $\overrightarrow{AF}$ 是平面 PCD 的一个法向量. ………11 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AF}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AF}|}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ………13 分

由题设，二面角 $B-FC-P$ 的平面角为锐角，

所以二面角 $B-FC-P$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ………14 分

选条件②：$BE\perp PC$.

（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$, $PA\perp AD$.

在 Rt$\triangle PAB$ 中，$PB=\sqrt{AB^2+AP^2}=\sqrt{5}$. ………1 分

在直角梯形 $ABCD$ 中，

由 $AB=1$，$AD=CD=2$，可求得 $BC=\sqrt{5}$，所以 $PB=BC$. ………2 分

因为 $BE\perp PC$，所以 E 为 PC 的中点. ………3 分

因为 $AB//CD$，$AB\not\subset$ 平面 PCD，所以 $AB//$ 平面 PCD.

因为平面 $ABEF\cap$ 平面 $PCD=EF$，所以 $AB//EF$. ………5 分

所以 $CD//EF$.

所以 F 为 PD 的中点. ………6 分

（Ⅱ）以下同条件①.

拓展 18-2：（2022-2023 学年东城区高三期末 17）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PA=2$，$PA\perp AB$，E 为 BC 的中点，F 为 PD 上一点，$EF//$ 平面 PAB.

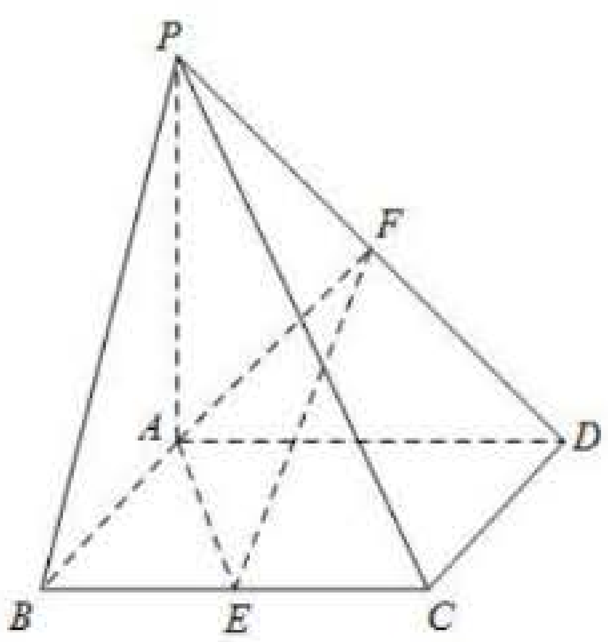
（Ⅰ）求证：F 为 PD 中点；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线 AD 与平面 AEF 所成角的正弦值.

条件①：$AD\perp PB$；

条件②：$PC=2\sqrt{3}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分



【答案】解：(Ⅰ) 在△PAD 中，过点 F 作 $FG // AD$ 交 PA 于点 G，

连接 GB.

因为 $AD // BC$，

所以 $FG // BC$，

所以 B，E，F，G 四点共面.

因为 $EF//$平面 PAB，$EF\subset$平面 $BEFG$，

平面 $PAB\cap$平面 $BEFG = BG$，

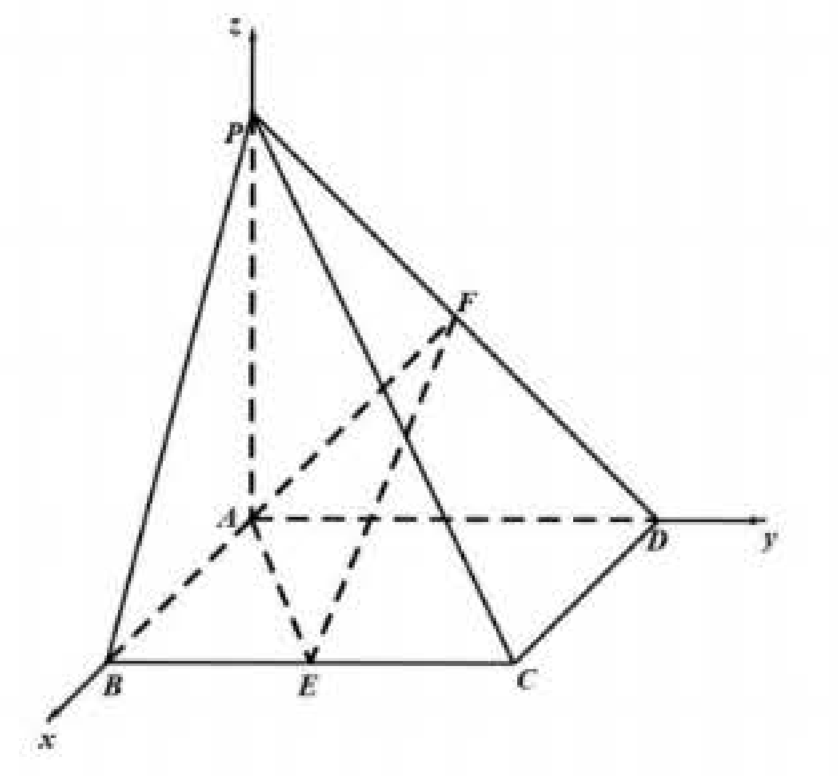
所以 $EF // BG$.

所以四边形 $BEFG$ 是平行四边形.

所以 $FG = BE = \frac{1}{2}AD$.

所以 F 为 PD 的中点. ……………………6 分

(Ⅱ) 选条件①：$AD\perp PB$.



因为底面 $ABCD$ 为正方形，

所以 $AD\perp AB$.

又 $AD\perp PB$，$AB\cap PB = B$，

所以 $AD\perp$平面 PAB.

所以 $AD\perp PA$.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，因为底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PA = 2$，

则 $A(0,0,0)$，$D(0,2,0)$，$E(2,1,0)$，$F(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{AD} = (0,2,0)$，$\overrightarrow{AE} = (2,1,0)$，$\overrightarrow{AF} = (0,1,1)$.

设平面 AEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE} = 0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF} = 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+y = 0,\\ y+z = 0.\end{cases}$

令 $x = 1$，则 $y = -2, z = 2$. 于是 $\boldsymbol{n} = (1,-2,2)$.

设直线 AD 与平面 AEF 所成角为 θ，

则 $\sin\theta = |\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AD}>| = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AD}|} = \frac{2}{3}$.

所以直线 AD 与平面 AEF 所成角为的正弦值为 $\frac{2}{3}$. …………15 分

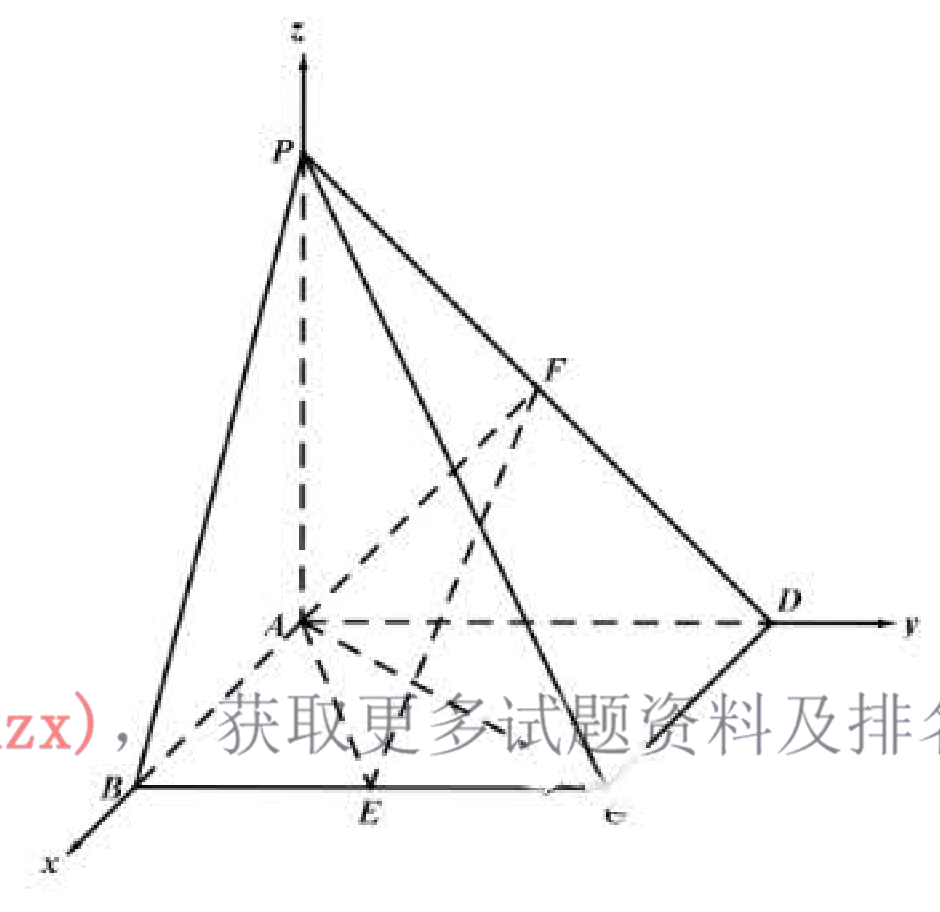
选条件②：$PC = 2\sqrt{3}$.

如图，连接 AC.

因为底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，

所以 $AD\perp AB$，$AC = 2\sqrt{2}$.

因为 $PA = 2$，$PC = 2\sqrt{3}$，



所以 $PA^2+AC^2=PC^2$.

所以 $PA\perp AC$.

因为 $PA\perp AB$， $AB\cap AC=A$ ，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

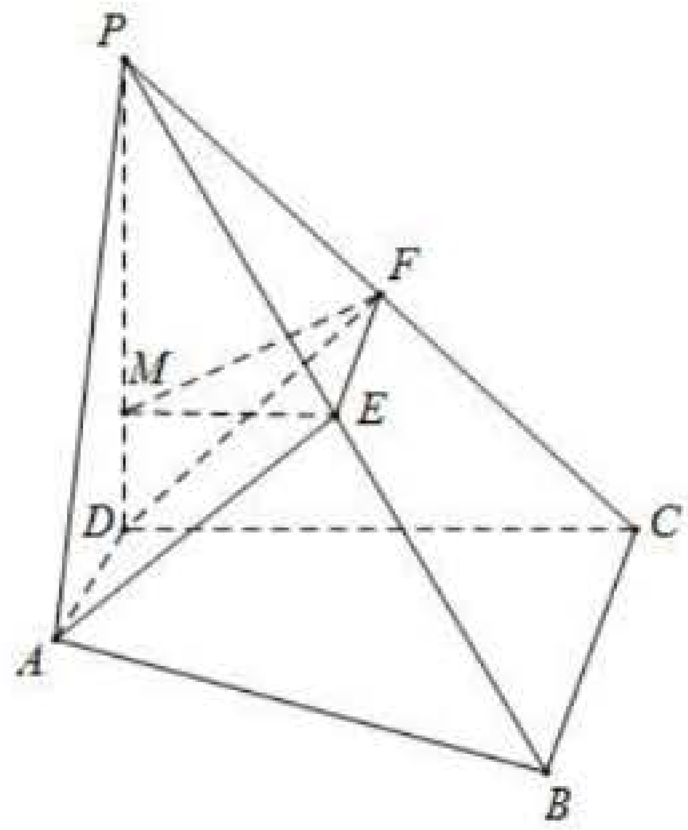
所以 $PA\perp AD$.

以下同选条件① . ……………………15 分

18-3.（13 分）（2021-2022 学年昌平区高三期末 17）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是直角梯形，$AD\perp CD$，$AD//BC$，$PD\perp$ 平面 $ABCD$， E 是 PB 的中点， PC 与平面 ADE 交于点 F， $BC=DC=PD=2AD=2$.

（I）求证： F 是 PC 的中点；

（II）若 M 为棱 PD 上一点，且直线 PA 与平面 EFM 所成的角的正弦值为 $\frac{4}{5}$，求 $\frac{PM}{PD}$ 的值.



【答案】

解：因为 $AD//BC$，

$AD\not\subset$ 平面 PBC， $BC\subset$ 平面 PBC，

所以 $AD//$ 平面 PBC.

因为 $AD\subset$ 平面 ADE， 平面 $ADE\cap$ 平面 $PBC=EF$，

所以 $AD//EF$.

所以 $BC//EF$.

因为点 E 是 PB 的中点，

所以点 F 是 PC 的中点. ………………5 分

(II) 因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$， $AD,DC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp AD,PD\perp CD$.

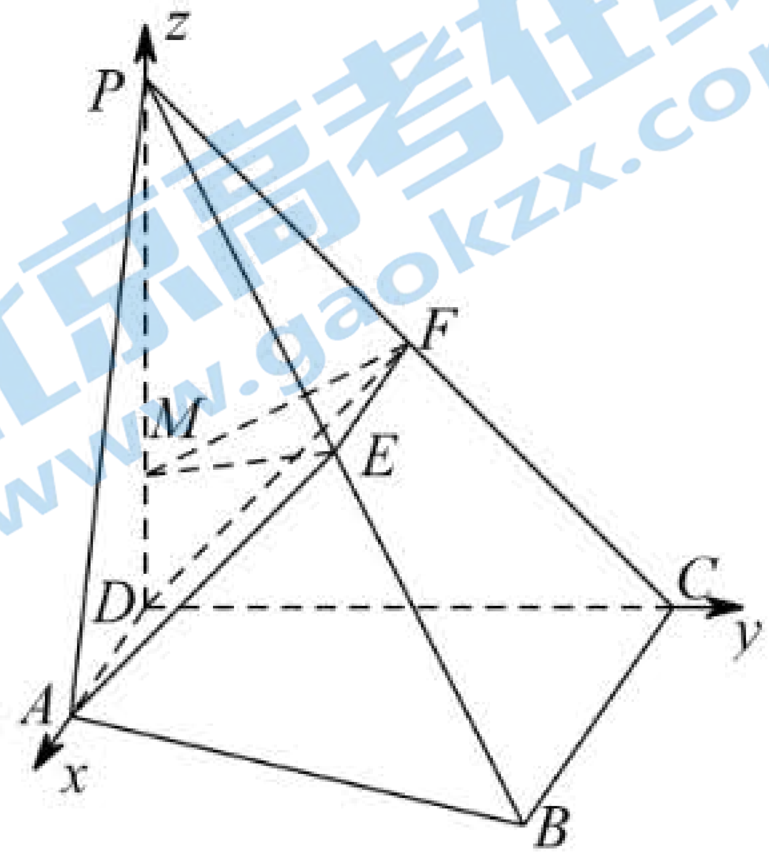
由 $AD\perp CD$，如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

则 $A(1,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$, $P(0,0,2)$, $E(1,1,1)$,

$F(0,1,1)$, $\overrightarrow{EF}=(-1,0,0)$, $\overrightarrow{PD}=(0,0,-2)$, $\overrightarrow{EP}=(-1,-1,1)$ ， $\overrightarrow{PA}=(1,0,-2)$.

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}=(0,0,-2\lambda),0\le\lambda\le1$，

所以 $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PM}=(-1,-1,1-2\lambda)$.



设平面 EFM 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x=0,\\ -x-y+(1-2\lambda)z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $y=1-2\lambda$，所以 $\vec{n}=(0,1-2\lambda,1)$.

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{PA}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PA}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}\sqrt{(1-2\lambda)^2+1}}$.

设直线 PA 与平面 EFM 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{PA}>|=\dfrac{2}{\sqrt{5}\sqrt{(1-2\lambda)^2+1}}=\dfrac{4}{5}$，

解得：$\lambda=\dfrac{1}{4}$ 或 $\lambda=\dfrac{3}{4}$.

所以 $\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{1}{4}$ 或 $\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{3}{4}$. ………………13 分

拓展 19-1.（202105 西城二模 20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左顶点为 $A(-2,0)$，圆 $O:x^2+y^2=1$ 经过椭圆 C 的上、下顶点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和焦距；

（Ⅱ）已知 P,Q 分别是椭圆 C 和圆 O 上的动点（P,Q 不在坐标轴上），且直线 PQ 与 x 轴平行，线段 AP 的垂直平分线与 y 轴交于点 M，圆 O 在点 Q 处的切线与 y 轴交于点 N．求线段 MN 长度的最小值.

【答案】（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题意，$a=2$，$b=1$，

所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

因为 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，

所以焦距 $2c=2\sqrt{3}$.--------------4 分

（Ⅱ）设 $P(x_0,y_0)$ $(x_0y_0\ne0)$ 且 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$.

由题意，设 $Q(x_1,y_0)$ $(x_1y_0\ne0)$ 且 $x_1^2+y_0^2=1$.

因为 $A(-2,0)$，所以线段 AP 的中点为 $(\dfrac{x_0-2}{2},\dfrac{y_0}{2})$.

又直线 AP 的斜率为 $k_{AP}=\dfrac{y_0}{x_0+2}$，

所以线段 AP 的中垂线的斜率为 $-\dfrac{x_0+2}{y_0}$.

故线段 AP 的中垂线方程为 $y-\dfrac{y_0}{2}=-\dfrac{x_0+2}{y_0}(x-\dfrac{x_0-2}{2})$.

令 $x=0$，得 $y_M=\dfrac{y_0}{2}+\dfrac{(x_0+2)(x_0-2)}{2y_0}=\dfrac{x_0^2+y_0^2-4}{2y_0}$.

由 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，可得 $x_0^2-4=-4y_0^2$，

代入上式，得 $y_M=\dfrac{-3y_0^2}{2y_0}=-\dfrac{3}{2}y_0$，

所以 $M(0,-\dfrac{3}{2}y_0)$.

因为直线 OQ 的斜率为 $k_{OQ}=\dfrac{y_0}{x_1}$，

所以圆 O 在点 Q 处的切线斜率为 $-\dfrac{x_1}{y_0}$.

所以切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{x_1}{y_0}(x-x_1)$.

令 $x=0$ 得 $y_N=y_0+\dfrac{x_1^2}{y_0}=\dfrac{x_1^2+y_0^2}{y_0}=\dfrac{1}{y_0}$，

所以 $N(0,\dfrac{1}{y_0})$.

所以线段 MN 长度

$|MN|=|y_N-y_M|=\left|\dfrac{1}{y_0}+\dfrac{3}{2}y_0\right|=\dfrac{1}{|y_0|}+\dfrac{3}{2}|y_0|\geq 2\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{6}$.

（当且仅当 $\dfrac{1}{|y_0|}=\dfrac{3}{2}|y_0|$，即 $y_0=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立）

所以线段 MN 长度的最小值为 $\sqrt{6}$.--------------15 分

19-2.（房山一模 19）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且椭圆 C 上任意一点到两个焦点的距离之和是 4．直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 C 相切于点 P，且点 P 在第二象限.

(I)求椭圆 C 的标准方程;

(II)求点 P 的坐标（用 k 表示）;

(III)若过坐标原点 O 的直线 l_1 与 l 垂直于点 Q，求 $|PQ|$ 的最大值.

【解析】

（I）由已知 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}, 2a=4$，及 $a^2=b^2+c^2$

得 $a=2, b=1, c=\sqrt{3}$

所以椭圆的标准方程为: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(II)由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

因为直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 C 相切于点 P

所以 $\Delta=(8km)^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=4k^2-m^2+1=0$

即 $m^2=4k^2+1$

解得 $x=\frac{-4km}{4k^2+1}, y=\frac{m}{4k^2+1}$,

即 P 的坐标为 $(\frac{-4km}{4k^2+1},\frac{m}{4k^2+1})$

因为点 P 在第二象限，所以 $k>0, m>0$，所以 $m=\sqrt{4k^2+1}$

所以 P 的坐标为 $(\frac{-4k}{\sqrt{4k^2+1}},\frac{1}{\sqrt{4k^2+1}})$

（III）因为直线 l_1 与 l 垂直于点 Q

所以$|PQ|$是点P到直线l_1的距离,设直线l_1的方程为$y=-\frac{1}{k}x$则

$$|PQ|=\frac{\left|\frac{-4k}{\sqrt{4k^2+1}}+\frac{k}{\sqrt{4k^2+1}}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{3k}{\sqrt{4k^4+5k^2+1}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{4k^2+\frac{1}{k^2}+5}}\le\frac{3}{3}=1$$

当且仅当$4k^2=\frac{1}{k^2}$,$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$|PQ|$有最大值 1

19-3．（东城二模 19）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）过点$(\sqrt{2},1)$,且以椭圆短轴的两个端点和一个焦点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

（I）求椭圆的标准方程;

（II）设$M(x,y)$是椭圆C上的动点,$P(p,0)$是x轴上的定点,求$|MP|$的最小值及取最小值时点M的坐标.

【ANS】

（I）因为椭圆过点$(\sqrt{2},1)$,且以椭圆短轴的两个端点和一个焦点为顶点的三角形是等腰直角三角形,易得

$$\begin{cases}\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ b=c\\ a^2=b^2+c^2\end{cases},\text{得到}\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{2},\\ c=\sqrt{2}\end{cases}$$

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

（II）由（I）可知,$M(x,y)$的横坐标的范围为$-2\le x\le 2$,

$|MP|^2=(x-p)^2+y^2=x^2-2xp+p^2+y^2$

又因为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,所以$y^2=2-\frac{1}{2}x^2$,则

$$\begin{aligned}|MP|^2&=(x-p)^2+y^2=x^2-2xp+p^2+y^2\\&=x^2-2xp+p^2+2-\frac{1}{2}x^2\\&=\frac{1}{2}x^2--2xp+p^2+2\\&=\frac{1}{2}(x-2p)^2+2-p^2\end{aligned}$$

设$g(x)=\frac{1}{2}(x-2p)^2+2-p^2$,（$-2\le x\le 2$）,

1）当$-1\le p\le 1$时,

$g(x)$在x=$2p$时取最小值,最小值为$2-p^2$,即此时$|MP|_{\min}=\sqrt{2-p^2}$

纵坐标 $y^2=2-\frac{1}{2}(2p)^2=2-2p^2$,所以 $M(2p,\pm\sqrt{2-2p^2})$

2）当 $p<-1$ 时,最小值在两个端点处取得,

$g(2)=p^2-4p+4=(p-2)^2$,

$g(-2)=p^2+4p+4=(p+2)^2$

此时 $g(-2)<g(2)$,所以当 $x=-2$ 时, $g(x)$ 取最小值

$|MP|_{\min}=\sqrt{(p+2)^2}=|p+2|$, $M(-2,0)$

3）当 $p>1$ 时,

最小值在 $g(2)$ 处取得,此时

$|MP|_{\min}=\sqrt{(p-2)^2}=|p-2|$, $M(2,0)$

综上可知, $p<-1$ 时, $|MP|_{\min}=|p+2|$,此时 $M(-2,0)$;

$-1\le p\le 1$ 时, $|MP|_{\min}=\sqrt{2-p^2}$,此时 $M(2p,\pm\sqrt{2-2p^2})$

$p>1$ 时, $|MP|_{\min}==|p-2|$,此时 $M(2,0)$

19-4．(2021 海淀期末 19)已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 C $(2,\sqrt{3})$.

（Ⅰ）求椭圆 W 的方程及其长轴长；

（Ⅱ）A，B 分别为椭圆 W 的左、右顶点，点 D 在椭圆 W 上，且位于 x 轴下方，直线 CD 交 x 轴于点 Q，若 $\triangle ACQ$ 的面积比 $\triangle BDQ$ 的面积大 $2\sqrt{3}$，求点 D 的坐标.

19.（本小题共 14 分）

（Ⅰ）由题可知：$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore c^2=\dfrac{3}{4}a^2$，$b^2=a^2-c^2=\dfrac{1}{4}a^2$，

且椭圆过点 $(2,\sqrt{3})$，代入得：$a^2=16$，$b^2=4$.

$\therefore$ 椭圆 W 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，长轴长为 $2a=8$.

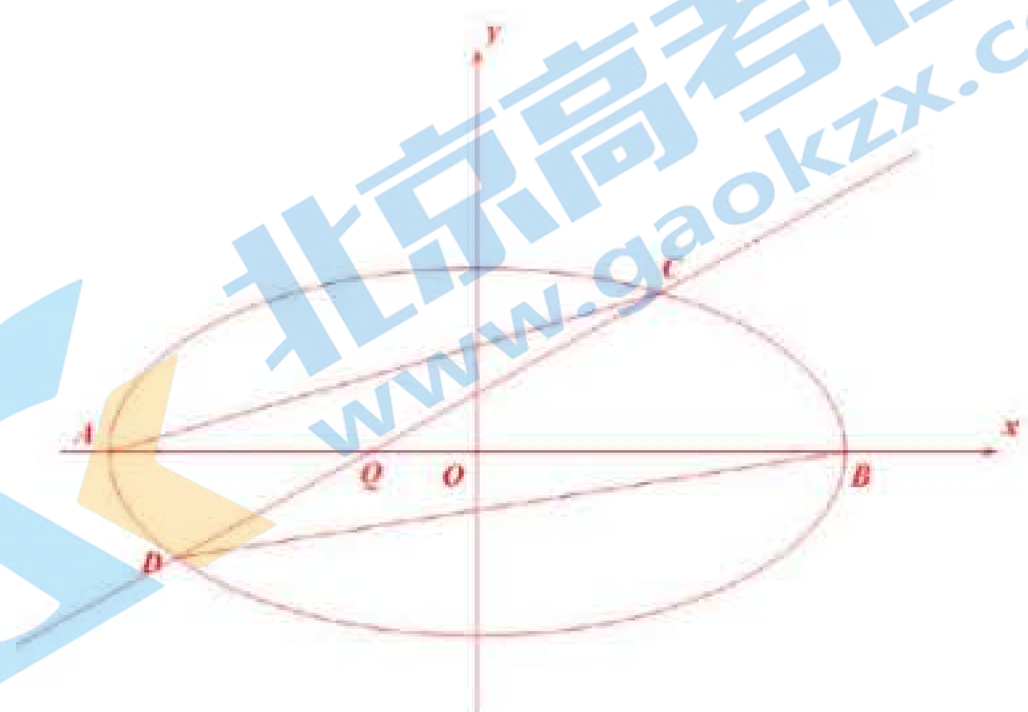
（Ⅱ）方法一：

当直线 CD 斜率不存在时，$C(2,\sqrt{3})$，$D(2,-\sqrt{3})$，$Q(2,0)$，

则 $S_{\triangle ACQ}=\dfrac{1}{2}\cdot|AQ|\cdot|CQ|=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，$S_{\triangle BDQ}=\dfrac{1}{2}\cdot|BQ|\cdot|DQ|=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

此时 $S_{\triangle ACQ}-S_{\triangle BDQ}=2\sqrt{3}$，符合题意，$\therefore D(2,-\sqrt{3})$.

当直线 CD 斜率存在时，



设 $D(x_0,y_0),(y_0<0,x_0\neq 2)$，

则 $k_{CD}=\dfrac{y_0-\sqrt{3}}{x_0-2}$，$l_{CD}:y-\sqrt{3}=\dfrac{y_0-\sqrt{3}}{x_0-2}(x-2)$.

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{2y_0-\sqrt{3}x_0}{y_0-\sqrt{3}}$，即点 $Q(\dfrac{2y_0-\sqrt{3}x_0}{y_0-\sqrt{3}},0)$，

$S_{\triangle ACQ}=\dfrac{1}{2}\cdot|AQ|\cdot\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}(x_Q-x_A)\cdot\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{6y_0-\sqrt{3}x_0-4\sqrt{3}}{y_0-\sqrt{3}}$，

$S_{\triangle BDQ}=\dfrac{1}{2}\cdot|BQ|\cdot|y_0|=\dfrac{1}{2}(x_B-x_Q)\cdot(-y_0)=-\dfrac{y_0}{2}\cdot\dfrac{2y_0+\sqrt{3}x_0-4\sqrt{3}}{y_0-\sqrt{3}}$，

$\because S_{\triangle ACQ}-S_{\triangle BDQ}=2\sqrt{3}$，

化简得：$(2y_0+\sqrt{3}x_0)(y_0-\sqrt{3})=0$．

即 $2y_0=-\sqrt{3}x_0$ 或 $y_0=\sqrt{3}$（舍），

将 $2y_0=-\sqrt{3}x_0$ 代入椭圆方程，得 $x_0=2$（舍）或 $x_0=-2$，

将 $x_0=-2$ 代入 $2y_0=-\sqrt{3}x_0$，得 $y_0=\sqrt{3}$（舍），

$\therefore$ 直线 CD 斜率存在时无解．

综上，$D(2,-\sqrt{3})$．

方法二：

当直线 CD 斜率不存在时，同方法一；

当直线 CD 斜率存在时，设 $D(x_0,y_0),(y_0<0,x_0\neq 2)$，

则 $k_{CD}=\dfrac{y_0-\sqrt{3}}{x_0-2}$，$l_{CD}:y-\sqrt{3}=\dfrac{y_0-\sqrt{3}}{x_0-2}(x-2)$．

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{2y_0-\sqrt{3}x_0}{y_0-\sqrt{3}}$，即点 $Q(\dfrac{2y_0-\sqrt{3}x_0}{y_0-\sqrt{3}},0)$．

$\because S_{\triangle ACQ}-S_{\triangle BDQ}=2\sqrt{3}$，

$\therefore (S_{\triangle ACQ}+S_{\triangle BCQ})-(S_{\triangle BDQ}+S_{\triangle BCQ})=2\sqrt{3}$，

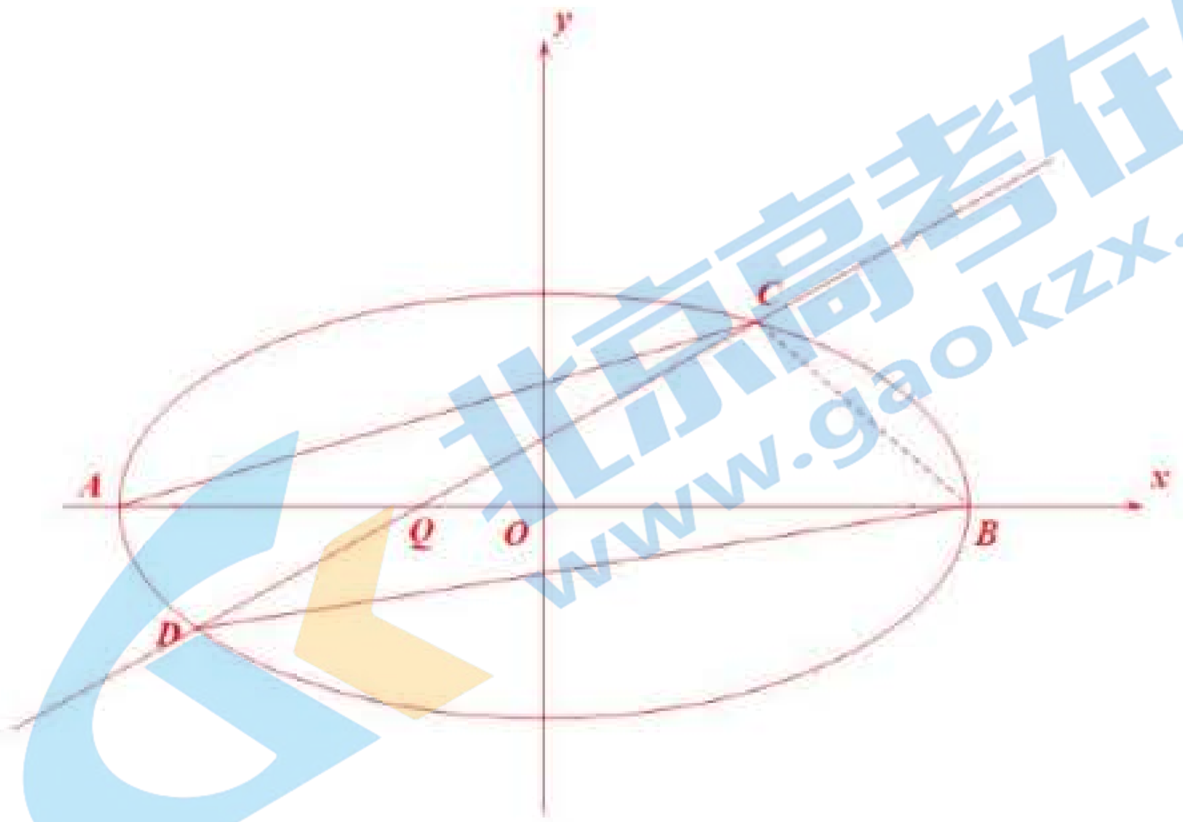
$\therefore S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BCD}=2\sqrt{3}$．

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|y_C|=4\sqrt{3}$，

$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot|BQ|\cdot|y_C-y_D|=\dfrac{1}{2}(4-\dfrac{\sqrt{3}x_0-2y_0}{y_0-\sqrt{3}})(\sqrt{3}-y_0)=\dfrac{1}{2}(4\sqrt{3}-2y_0-\sqrt{3}x_0)$，

$S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BCD}=4\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}(4\sqrt{3}-2y_0-\sqrt{3}x_0)=2\sqrt{3}$，

得：$\sqrt{3}x_0+2y_0=0$．



由$\begin{cases}\sqrt{3}x_0+2y_0=0\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，

解得 $x_0=2$（舍）或 $x_0=-2$．

将 $x_0=-2$ 代入 $2y_0+\sqrt{3}x_0=0$，得 $y_0=\sqrt{3}$（舍），

$\therefore$ 直线 CD 斜率存在时无解．

综上，$D(2,-\sqrt{3})$．

方法三：

$\because S_{\triangle ACQ}-S_{\triangle BDQ}=2\sqrt{3}$，

$\therefore (S_{\triangle ACQ}+S_{\triangle BCQ})-(S_{\triangle BDQ}+S_{\triangle BCQ})=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BCD}=2\sqrt{3}$．

且 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|y_C|=4\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle BCD}=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$．

当直线 CD 斜率不存在时，同方法一；

当直线 CD 斜率存在时，设 $l_{CD}:y-\sqrt{3}=k(x-2)$，

联立：$\begin{cases}y-\sqrt{3}=k(x-2)\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得：$(4k^2+1)x^2+(8\sqrt{3}k-16k^2)x+16k^2-16\sqrt{3}k-4=0$．

由韦达定理：$x_C\cdot x_D=\dfrac{16k^2-16\sqrt{3}k-4}{4k^2+1}$，

且 $x_C=2$，

$\therefore x_D=\dfrac{8k^2-8\sqrt{3}k-2}{4k^2+1}$，

点 B 到直线 CD 距离：$d=\frac{|2k+\sqrt{3}|}{\sqrt{k^2+1}}$，

$|CD|=\sqrt{(x_C-x_D)^2+(y_C-y_D)^2}=\sqrt{k^2+1}\cdot|x_C-x_D|$

$=\sqrt{k^2+1}\cdot|2-\frac{8k^2-8\sqrt{3}k-2}{4k^2+1}|=\sqrt{k^2+1}\cdot|\frac{8\sqrt{3}k+4}{4k^2+1}|$

$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}|CD|\cdot d=2\sqrt{3}$，解得 $8\sqrt{3}k^2+16k+2\sqrt{3}=\pm(8\sqrt{3}k^2+2\sqrt{3})$，

（i）$8\sqrt{3}k^2+16k+2\sqrt{3}=8\sqrt{3}k^2+2\sqrt{3}$，解得 $k=0$，此时 $y_D>0$（舍），

（ii）$8\sqrt{3}k^2+16k+2\sqrt{3}=-8\sqrt{3}k^2-2\sqrt{3}$，由 $\Delta<0$，得 k 无解.

综上，$D(2,-\sqrt{3})$.

19-5．（202105 房山二模 20）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，O 为坐标原点，F 是椭圆 C 的右焦点，A 为椭圆 C 上一点，且 $AF\perp x$ 轴，$|AF|=\frac{3}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过椭圆 C 上一点 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 的直线 $l:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 与直线 AF 相交于点 M，与直线 $x=4$ 相交于点 N.

证明：$\frac{|MF|}{|NF|}$ 为定值.

【解析】（Ⅰ）设 $F(c,0)$，$A(c,y_0)$，则 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1$

又因为 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $|y_0|=\frac{\sqrt{3}}{2}b$

因为 $|AF|=\frac{3}{2}$，所以 $|AF|=|y_0|=\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{3}{2}$，所以 $b=\sqrt{3}$.

因为 $\begin{cases}a^2-b^2=c^2\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知直线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1(y_0\neq 0)$，

即 $y=\frac{12-3x_0x}{4y_0}\ (y_0\neq 0)$.

因为直线 AF 的方程为 $x=1$，

所以直线 l 与 AF 的交点为 $M(1,\frac{12-3x_0}{4y_0})$，

直线 l 与直线 $x=1$ 的交点为 $N(4,\frac{3-3x_0}{y_0})$，

则 $\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{(\frac{12-3x_0}{4y_0})^2}{9+(\frac{3-3x_0}{y_0})^2}=\frac{(4-x_0)^2}{16y_0^2+16(1-x_0)^2}$（1）

又 $P(x_0,y_0)$ 是 C 上一点，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，$y_0^2=3-\frac{3x_0^2}{4}$

代入（1）式得

$$\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{(4-x_0)^2}{48-12x_0^2+16-32x_0+16x_0^2}=\frac{(4-x_0)^2}{4(x_0^2-8x_0+16)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4-x_0)^2}{(4-x_0)^2}=\frac{1}{4}$$

所以 $\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{1}{2}$

所以 $\frac{|MF|}{|NF|}$ 为定值.

拓展 20-1.（202203 丰台一模 20）已知函数 $f(x)=x\sqrt{a-x}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为1的切线方程;

（Ⅱ）若函数 $g(x)=f(x)-\frac{2a}{3}$ 恰有两个不同的零点，求 a 的取值范围.

【答案】

解:（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=x\sqrt{1-x}\,(x\leqslant 1)$，

所以 $f'(x)=\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$.

令 $f'(x)=1$，解得 $x=0$.

因为 $f(0)=0$，所以切点坐标为 $(0,0)$.

故切线方程为 $y=x$. ………………5 分

（Ⅱ）因为 $g(x)=x\sqrt{a-x}-\frac{2a}{3}\ (x\leqslant a)$，

所以 $g'(x)=\frac{2a-3x}{2\sqrt{a-x}}$.

令 $g'(x)=0$，解得 $x=\frac{2a}{3}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，由 $x\leqslant a$,得 $2a-3x\geqslant -a\geqslant 0$，

所以 $g'(x)\geqslant 0$，则 $g(x)$ 在定义域 $(-\infty,a]$ 上是增函数.

故 $g(x)$ 至多有一个零点，不合题意，舍去.

当 $a>0$ 时，随 x 变化 $g'(x)$ 和 $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,\frac{2a}{3})$	$\frac{2a}{3}$	$(\frac{2a}{3},a)$	a
$g'(x)$	+	0	−	
$g(x)$	单调递增	$\frac{2\sqrt{3}a\sqrt{a}-6a}{9}$	单调递减	$-\frac{2a}{3}$

故 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,\frac{2a}{3})$ 上单调递增，在区间 $(\frac{2a}{3},a)$ 上单调递减，

当 $x=\frac{2a}{3}$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $g(\frac{2a}{3})=\frac{2\sqrt{3}a\sqrt{a}-6a}{9}$.

若$0<a\leqslant 3$时，$g(\frac{2a}{3})=\frac{2\sqrt{3}a(\sqrt{a}-\sqrt{3})}{9}\leqslant 0$，此时$g(x)$至多有一个零点；

若$a>3$时，$g(\frac{2a}{3})>0$，又$g(0)=g(a)=-\frac{2a}{3}<0$，

由零点存在性定理可得$g(x)$在区间$(0,\frac{2a}{3})$和区间$(\frac{2a}{3},a)$上各有一个零点，

所以函数$g(x)$恰有两个不同的零点，符合题意.

综上所述，a的取值范围是$(3,+\infty)$. ………………15 分

拓展 20-2（201803 西城一模文 20）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x\cdot(a+\ln x)$,其中$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线与直线$y=-\frac{x}{\mathrm{e}}$垂直,求a的值;

（Ⅱ）记$f(x)$的导函数为$g(x)$.当$a\in(0,\ln 2)$时,证明:$g(x)$存在极小值点x_0,且$f(x_0)<0$.

【答案】

（Ⅰ）$f'(x)=\mathrm{e}^x\cdot(a+\ln x)+\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{x}=\mathrm{e}^x\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)$

依题意,有$f'(1)=\mathrm{e}\cdot(a+1)=\mathrm{e}$,解得$a=0$

【知识点】导数的几何意义

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$g(x)=\mathrm{e}^x\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)$,

所以$g'(x)=\mathrm{e}^x\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)+\mathrm{e}^x\cdot(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})=\mathrm{e}^x\cdot(a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x)$

因为$\mathrm{e}^x>0$,所以$g'(x)$与$a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x$同号

设$h(x)=a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x$,则$h'(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^3}=\frac{(x-1)^2+1}{x^3}$

所以对任意$x\in(0,+\infty)$,有$h'(x)>0$,故$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增

因为$a\in(0,\ln 2)$,所以$h(1)=a+1>0$,$h(\frac{1}{2})=a+\ln\frac{1}{2}<0$,

故存在$x_0\in(\frac{1}{2},1)$,使得$h(x_0)=0$

$g(x)$与$g'(x)$在区间$(\frac{1}{2},1)$上的情况如下:

x	$(\frac{1}{2},x_0)$	x_0	$(x_0,1)$
$g'(x)$	$-$	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以 $g(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,1)$ 上单调递增

所以若 $a\in(0,\ln 2)$，存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 x_0 是 $g(x)$ 的极小值点

令 $h(x_0)=0$，得 $a+\ln x_0=\frac{1-2x_0}{x_0^2}$，所以 $f(x_0)=e^{x_0}\cdot(a+\ln x_0)=e^{x_0}\cdot\frac{1-2x_0}{x_0^2}<0$

【知识点】极值问题、隐零点问题

拓展 20-3（2021-2022 丰台高三上期末 19）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=x^2-a\ln x\ (a\in\mathbf{R}且a\neq 0)$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，因为 $f(x)=x^2-\ln x$，

所以 $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=1$.

又因为 $f(1)=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=x-1$.

即 $x-y=0$. ………………4 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=x^2-a\ln x(a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0)$，

所以 $f'(x)=2x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-a}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

取 $x=e^{\frac{1}{a}}$，则 $f(e^{\frac{1}{a}})=(e^{\frac{1}{a}})^2-1<0$，不符合题意.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 或 $x=-\sqrt{\dfrac{a}{2}}$（舍）.

当 $x\in(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}})$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}})$ 上单调递减.

当 $x\in(\sqrt{\dfrac{a}{2}},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(\sqrt{\dfrac{a}{2}},+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(\sqrt{\dfrac{a}{2}})=\dfrac{a}{2}-a\ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{a}{2}(1-\ln\dfrac{a}{2})$.

若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，只需 $f(\sqrt{\dfrac{a}{2}})\geq 0$，解得 $0<a\leq 2e$.

综上可知，a 的取值范围是 $(0,2e]$. ………………14 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。