2024 届高三数学试题参考答案(理科)

1. C 【解析】本题考查集合的并集,考查数学运算的核心素养.

因为 $A=\{x|x<2\}$,$B=\{x|-1<x<3\}$,所以 $A\cup B=\{x|x<3\}$.

2. B 【解析】本题考查平面向量的垂直与充分、必要条件的判断,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

由$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$,可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(m+3)^2-5(2m+1)=0$,解得 $m=2$. 所以"$|m|=2$"是"$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$"的必要不充分条件.

3. A 【解析】本题考查简单的线性规划问题,考查数形结合的数学思想.

作出可行域(图略),当直线 $z=x-y$ 经过点$(-3,3)$时,z 取得最小值,且最小值为-6.

4. B 【解析】本题考查正切的和差公式与同角的三角函数的关系,考查数学运算的核心素养.

因为 $\tan\alpha=\tan(\alpha-\beta+\beta)=\dfrac{2+4}{1-2\times4}=-\dfrac{6}{7}$,所以$\dfrac{7\sin\alpha-\cos\alpha}{7\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{7\tan\alpha-1}{7\tan\alpha+1}=\dfrac{-6-1}{-6+1}=\dfrac{7}{5}$.

5. A 【解析】本题考查导数的几何意义,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

因为 $y=\dfrac{x^4-x^3}{x-1}=x^3(x\neq1)$,所以 $y'=3x^2(x\neq1)$,由 $3m^2=3$,得 $m=-1$ 或 $m=1$(舍去).

所以该切线的方程为 $y=3x+2$,所以该切线在 x 轴上的截距为$-\dfrac{2}{3}$.

6. C 【解析】本题考查函数的奇偶性与单调性,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

因为 $f(x-5)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(x)$的图象关于点$(-5,0)$对称,要确保 $f(x)$的零点唯一,数形结合可得 $m\leqslant-5$.

7. B 【解析】本题考查指数与对数的运算,考查数学运算的核心素养.

$$\begin{pmatrix}\lg 2^{\frac{1}{4}} & \lg 25\\ \lg 5 & \lg 256\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8^{\frac{2}{3}}\\ 2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\lg 2 & 2\lg 5\\ \lg 5 & \lg 2^8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lg 2+\lg 5\\ 4\lg 5+4\lg 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}.$$

8. C 【解析】本题考查平面向量的基本定理与数量积,考查直观想象与数学运算的核心素养.

(方法一)由题意可知,$\triangle AOB$ 与$\triangle COD$ 相似,所以$\dfrac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{OC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{DC}|}=2$,所以$\overrightarrow{AO}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{AD}|^2=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\times3^2=10$,所以$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=6$.

(方法二)$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{DA}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AD}=-|\overrightarrow{AD}|^2+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=-9+15=6$.

9. C 【解析】本题考查三角函数图象的识别,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

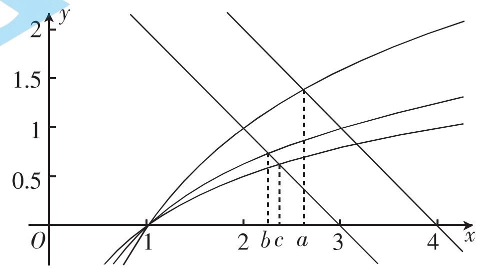
$f(\dfrac{\pi}{2})=-2\sin\varphi$,$g(\dfrac{\pi}{2})=2\sin\varphi=-f(\dfrac{\pi}{2})$,故选 C.

10. D 【解析】本题考查数列的实际应用,考查数学建模的核心素养与应用意识.

设该公司在 2022 年，2023 年，…，2031 年的销售额（单位：万元）分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$. 依题意可得 $a_{n+1}=1.2a_n-2(n=1,2,\cdots,9)$，则 $a_{n+1}-10=1.2(a_n-10)(n=1,2,\cdots,9)$，所以数列 $\{a_n-10\}$ 是首项为 90，公比为 1.2 的等比数列，则 $a_n-10=90\times1.2^{n-1}$，即 $a_n=90\times1.2^{n-1}+10$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=10\times10+\dfrac{90\times(1-1.2^{10})}{1-1.2}\approx100+450\times(6.19-1)=2435.5$，故从 2022 年到 2031 年该产品的销售总额约为 2435.5 万元.

11. A 【解析】本题考查基本初等函数与比较大小，考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

由 $a+\log_2 a=4, b+\log_3 b=c+\log_4 c=3$，得 $\log_2 a=4-a, \log_3 b=3-b, \log_4 c=3-c$，作出函数 $y=\log_2 x, y=4-x, y=3-x, y=\log_3 x, y=\log_4 x$ 的大致图象，如图所示，由图可知 $a>c>b$.



12. D 【解析】本题考查倍角公式的灵活应用，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

$\sin\dfrac{\pi}{5}=\sin\dfrac{4\pi}{5}=2\sin\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=4\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}(2\cos^2\dfrac{\pi}{5}-1)$，因为 $\sin\dfrac{\pi}{5}>0$，所以 $1=4\cos\dfrac{\pi}{5}(2\cos^2\dfrac{\pi}{5}-1)$，所以 $8\cos^3\dfrac{\pi}{5}-4\cos\dfrac{\pi}{5}-1=0$，所以 $a=8, b=4, a+b=12$.

13. 若 a,b 都小于 1，则 $a+b\neq2$ 【解析】本题考查命题的逆否命题，考查逻辑推理的核心素养.

原命题的逆否命题要将原命题的条件和结论都否定后再将所得条件与结论对换，"a,b 不都小于 1"的否定为"a,b 都小于 1".

14. 32 【解析】本题考查等差、等比数列，考查数学运算的核心素养.

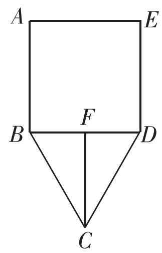
依题意可得 $\{a_n\}$ 的前 8 项为 0，2，4，8，12，18，24，32.

15. $\dfrac{\pi}{12}$（本题答案不唯一，只要写出 $-\dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}$ 这 3 个值的任意 1 个即可） 【解析】本题考查三角函数图象的变换与对称性，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

依题意可得 $f(x)=\sin[4(x+\dfrac{\pi}{24})]=\sin(4x+\dfrac{\pi}{6})$，则 $\begin{cases}4m+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi(k_1\in\mathbf{Z}),\\ m+\dfrac{11\pi}{12}=k_2\pi(k_2\in\mathbf{Z}),\end{cases}$

因为 $-\pi<m<2\pi$，所以 $m=-\dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}$.

16. $\dfrac{27-3\sqrt{17}}{8}$ 【解析】本题考查导数的实际应用，考查数学建模、直观想象、数学运算的核心素养.



过点 C 作 $CF\perp BD$，垂足为 F. 设 $AB=x(x>0)$，则 $BD=AE=DE=x$，因为 $BC=CD$，所以 $3AB+2BC=12$，则 $BC=6-\dfrac{3}{2}x$. 由 $BC>0, BC+CD>BD$，得 $0<x<3$. 在 $\triangle BCF$ 中，$CF=\sqrt{BC^2-BF^2}=\sqrt{(6-\dfrac{3}{2}x)^2-(\dfrac{1}{2}x)^2}=$

$\sqrt{2x^2-18x+36}$. 记△BCD 的面积为 S，则 $S=\frac{1}{2}BD\cdot CF=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^4-9x^3+18x^2}$. 设函数 $f(x)=x^4-9x^3+18x^2$，则 $f'(x)=4x^3-27x^2+36x=x(4x^2-27x+36)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{27\pm3\sqrt{17}}{8}$. 当 $0<x<\frac{27-3\sqrt{17}}{8}$ 时，$f'(x)>0$；当 $\frac{27-3\sqrt{17}}{8}<x<3$ 时，$f'(x)<0$. 故当 $x=\frac{27-3\sqrt{17}}{8}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，则 S 取得最大值，此时 $AB=\frac{27-3\sqrt{17}}{8}$.

17. 解：(1)依题意可得 $\begin{cases}13+6+4+11+p+1+7+q=60,\\ \frac{11+q}{60}=\frac{4}{15},\end{cases}$ …………………… 2 分

解得 $\begin{cases}p=13,\\ q=5.\end{cases}$ …………………… 4 分

(2)将每个数据都减去 28.50 后所得新数据的平均数为 $\frac{1}{60}[0.01\times13+0.02\times6+0\times4+(-0.02)\times11+(-0.01)\times13+0.04\times1+0.03\times7+(-0.03)\times5]=0$， …………………… 6 分

所以 $\bar{x}=0+28.50=28.50$， …………………… 7 分

所以 $\bar{x}-s=28.48$，$\bar{x}+s=28.52$， …………………… 9 分

所以这 60 个零件内径尺寸在 $[\bar{x}-s,\bar{x}+s]$ 内的个数为 $60-1-7-5=47$. …………………… 11 分

因为 $\frac{47}{60}<\frac{48}{60}=0.8$，所以这次抽检的零件不合格. …………………… 12 分

18. 解：(1)由正弦定理及 $a\sin(A-B)=(c-b)\sin A$，得 $\sin A\sin(A-B)=(\sin C-\sin B)\sin A$.
…………………… 1 分

因为 $\sin A>0$，所以 $\sin(A-B)=\sin C-\sin B$， …………………… 2 分

所以 $\sin(A-B)=\sin(A+B)-\sin B$， …………………… 3 分

所以 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B$，

即 $2\sin B\cos A=\sin B$， …………………… 4 分

因为 $\sin B>0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$. …………………… 5 分

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………… 6 分

(2) $S=\frac{1}{2}AD\cdot[CD\sin\angle ADC+BD\sin(\pi-\angle ADC)]=\frac{a}{2}\cdot AD\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a$，

因为 $S=3\sqrt{3}$，所以 $a=4$. …………………… 8 分

又 $S=3\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A$，所以 $bc=12$. …………………… 9 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

则 $a^2=(b+c)^2-3bc$， …………………… 10 分

所以 $b+c=\sqrt{a^2+3bc}=2\sqrt{13}$. …………………… 11 分

所以△ABC 的周长为 $4+2\sqrt{13}$. …………………… 12 分

19.(1)证明：取 AD 的中点 F，连接 EF,PF,BD. 因为△PAD 是正三角形，所以 $PF\perp AD$. …………………………………………………………………………………… 1 分

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………………………………………………………… 2 分

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PF\perp AC$. …………………………………………………… 3 分

因为 E 是 AB 的中点，所以 $EF/\!/BD$. 又底面 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$，从而 $EF\perp AC$. …………………………………………………………………………………… 4 分

因为 $PF\cap EF=F$，所以 $AC\perp$ 平面 PEF. …………………………………………………… 5 分

因为 $PE\subset$ 平面 PEF，所以 $AC\perp PE$. …………………………………………………… 6 分

(2)解：连接 BF，因为 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，所以△$ABD$ 是正三角形，所以 $BF\perp AD$. ………… 7 分

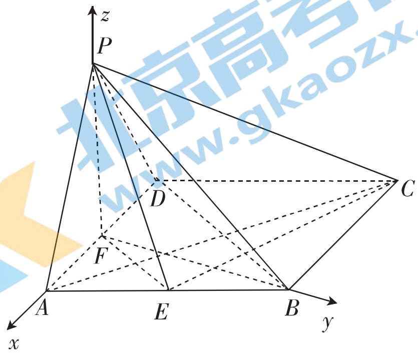
以 F 为坐标原点，FA,FB,FP 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

令 $AB=2$，则 $C(-2,\sqrt{3},0)$，$E(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

则 $\overrightarrow{CE}=(\frac{5}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{CP}=(2,-\sqrt{3},\sqrt{3})$. …………………………………………… 8 分

设平面 CEP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_0,y_0,z_0)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{5}{2}x_0-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0=0,\\ \overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{m}=2x_0-\sqrt{3}y_0+\sqrt{3}z_0=0,\end{cases}$

令 $x_0=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},5,3)$. …………………………………………………… 9 分



由题可知，$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ 是平面 ACE 的一个法向量. ……… ……………………………………………………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{37}}=\frac{3\sqrt{37}}{37}$，…………………… 11 分

由图可知，二面角 $A-CE-P$ 为锐角，则二面角 $A-CE-P$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{37}}{37}$. ……………………………… 12 分

20.(1)解：设椭圆方程为 $px^2+qy^2=1$，…………………………………………………… 1 分

则 $\begin{cases}q=1,\\ \frac{64}{25}p+\frac{9}{25}q=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=\frac{1}{4},\\ q=1,\end{cases}$ …………………………………………………… 3 分

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………… 4 分

注：若直接设 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得到 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，扣 1 分.

(2)证明：设 $P(x_0,y_0)$，$A(m,0)$，$B(n,0)$，

直线 PD:$y+\frac{3}{5}=\frac{y_0+\frac{3}{5}}{x_0+\frac{8}{5}}(x+\frac{8}{5})$,令 $y=0$,得 $x_N=\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}}$. ………………………… 5 分

直线 PC:$y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$. 令 $y=0$,得 $x_M=\frac{x_0}{y_0+1}$. ………………………………… 6 分

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=(n-\frac{x_0}{y_0+1})(m-\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}})=\frac{(ny_0+n-x_0)(5my_0+8y_0+3m-3x_0)}{(y_0+1)(5y_0+3)}$. ……

……………………………………………………………………………………………… 8 分

令 $5my_0+8y_0+3m=-3ny_0-3n$,

令 $5m+8=-3n,3m=-3n$,得 $n=4,m=-4$, ………………………………………… 10 分

则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=\frac{-3[(4y_0+4)^2-x_0^2]}{(y_0+1)(5y_0+3)}=\frac{-3[(4y_0+4)^2-(4-4y_0^2)]}{(y_0+1)(5y_0+3)}=\frac{-12(5y_0^2+8y_0+3)}{5y_0^2+8y_0+3}=$
-12.

故存在 $A(-4,0)$和 $B(4,0)$,使得$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}$是定值,且定值为$-12$. ………………… 12 分

21. (1)解:$f'(x)=\frac{2a}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2ax-1}{x^2}$. …………………………………………… 1 分

设函数 $g(x)=-x^2+2ax-1,\Delta=4a^2-4$.

当 $\Delta\leqslant 0$,即$-1\leqslant a\leqslant 1$ 时,此时 $g(x)\leqslant 0$,则 $f'(x)\leqslant 0$, ………………………………… 2 分

则 $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减,所以 $f(x)\leqslant f(1)=0$. ………………………………… 3 分

当 $\Delta>0$,即 $a>1$ 或 $a<-1$ 时,若 $a<-1$,$g(x)$有两个零点 x_1,x_2,由韦达定理得 $x_1+x_2=2a<0,x_1x_2=1>0$,则 x_1,x_2 均小于零,所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立,

则 $f(x)\leqslant f(1)=0$; …………………………………………………………………………… 4 分

若 $a>1$,则 $x_1+x_2=2a>2,x_1x_2=1>0$,则可设 $0<x_1<1<x_2$,当 $x\in(1,x_2)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,则 $f(x)>f(1)=0$,不符合题意. …………………………………………… 5 分

综上所述,a 的取值范围是$(-\infty,1]$. ………………………………………………………… 6 分

(2)证明:当 $a=1$ 时,$\forall x\in[1,+\infty)$,$f(x)\leqslant 0$,即 $\ln x\leqslant\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$,当且仅当 $x=1$ 时取等号, ……………………………………………………………………………………………… 7 分

令 $x=n(n+1)$,其中 $n\in\mathbf{N}_+$,则 $x>1$,则 $\ln[n(n+1)]<\frac{1}{2}[n(n+1)-\frac{1}{n(n+1)}]$, …… 8 分

记 $a_n=\ln(n(n+1))$,$b_n=n(n+1)$,$c_n=\frac{1}{n(n+1)}$,则 $a_n<\frac{1}{2}(b_n-c_n)$,

则$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i<\frac{1}{2}(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i-\sum\limits_{i=1}^{n}c_i)$,$\sum\limits_{i=1}^{n}c_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$, ……… 9 分

$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=\sum\limits_{i=1}^{n}i(i+1)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3}[(i+2)(i+1)i-(i+1)i(i-1)]=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, ………… 10 分

则可以得到$\sum\limits_{i=1}^{n}\ln[i(i+1)]<\frac{1}{2}[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n}{n+1}]$, ……………………… 11 分

故 $3n+6(n+1)\sum_{i=1}^{n}\ln[i(i+1)]<n(n+1)^2(n+2)$. ………………………………………… 12 分

22. 解:(1)设点 C 的直角坐标为(x,y),则 $x=4\sqrt{2}\cos\dfrac{5\pi}{4}=-4$,$y=4\sqrt{2}\sin\dfrac{5\pi}{4}=-4$,

所以点 C 的直角坐标为$(-4,-4)$. ………………………………………………………… 2 分

由 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta=11$,得 $x^2+y^2-2x-4y=11$, ……………………………… 4 分

所以圆 M 的直角坐标方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=16$. ……………………………………… 5 分

(2)设点 P 的坐标为$(1+4\cos\alpha,2+4\sin\alpha)$. ………………………………………………… 7 分

矩形 $PACB$ 的周长为 $2(1+4\cos\alpha+4+2+4\sin\alpha+4)=22+8\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$, ……… 9 分

当 $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=1$ 时,矩形 $PACB$ 的周长取得最大值,且最大值为 $22+8\sqrt{2}$. ……… 10 分

23. (1)证明:$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c})(a+2b+3c)$, ……………………………… 1 分

因为 a,b,c 均为正数,所以由柯西不等式可得$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}\geqslant\dfrac{1}{4}\times(1+2+3)^2=9$, …… 3 分

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{2}{3}$时,等号成立, ……………………………………………………… 4 分

故$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}\geqslant 9$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)解:因为 $a+2b+3c=4$,所以$\dfrac{1}{2}a+b=\dfrac{4-3c}{2}$, …………………………………………… 6 分

所以$|\dfrac{1}{2}a+b|+|c|=|2-\dfrac{3}{2}c|+|c|$. 设函数 $f(c)=|2-\dfrac{3}{2}c|+|c|$,

则 $f(c)=|\dfrac{3}{2}c-2|+|c|=\begin{cases}2-\dfrac{5}{2}c, c\leqslant 0,\\ 2-\dfrac{1}{2}c, 0<c<\dfrac{4}{3},\\ \dfrac{5}{2}c-2, c\geqslant\dfrac{4}{3}.\end{cases}$ ………………………………………… 8 分

当 $c\leqslant 0$ 时,$f(c)\geqslant 2$;当 $0<c<\dfrac{4}{3}$时,$\dfrac{4}{3}<f(c)<2$;当 $c\geqslant\dfrac{4}{3}$时,$f(c)\geqslant\dfrac{4}{3}$. …………… 9 分

所以 $f(c)_{\min}=\dfrac{4}{3}$,故$|\dfrac{1}{2}a+b|+|c|$的最小值为$\dfrac{4}{3}$. ………………………………… 10 分