参考答案

一、选择题（每道小题的四个选项中只有一个答案正确.每道小题 4 分，本大题一共 40 分.）

1.【答案】B

【分析】由古典概率模型的计算公式求解.

【详解】样本点总数为 10，“抽出一本是故事书”包含 3 个样本点，所以其概率为 $\frac{3}{10}$.

故选：B.

2.【答案】D

【分析】根据给定条件结合空间直角坐标系中对称的特点直接求解即可.

【详解】在空间直角坐标系中，两点关于坐标平面 xOy 对称，则这两点的横坐标、纵坐标都不变，它们的竖坐标互为相反数，

所以点 $P(1，2，-3)$关于坐标平面 xOy 的对称点为$(1，2，3)$.

故选：D

3.【答案】B

【分析】利用诱导公式化简目标式，即可得答案.

【详解】$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

故选：B

4.【答案】C

【分析】以 B 为原点，BA 为 x 轴，BC 为 y 轴，BB_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值.

【详解】以 B 为原点，BA 为 x 轴，BC 为 y 轴，BB_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

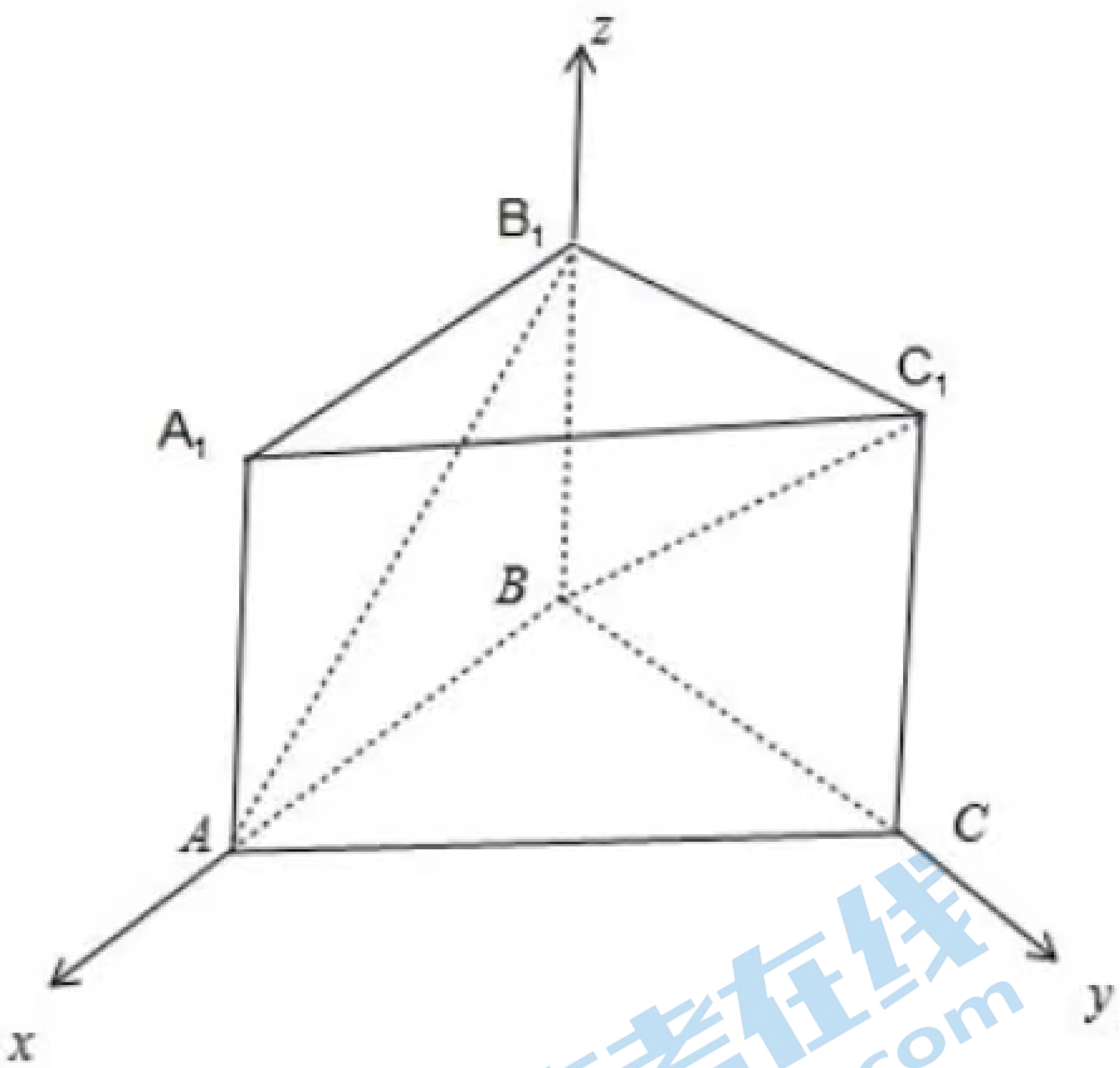
则 $A(1,0,0)$，$B_1(0,0,2)$，$B(0,0,0)$，$C_1(0,1,2)$，

$\overrightarrow{AB_1}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,1,2)$，

设异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC_1}\right|}=\frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$.

$\therefore$ 异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{4}{5}$.

故选：C.



【点睛】本题考查利用空间向量法求异面直线所成角的余弦值，解题关键就是建立空间直角坐标系，考查运算求解能力，是基础题.

5. 【答案】B

【分析】根据线面垂直的判定及性质，结合充分条件、必要条件判断即可.

【详解】当$m\perp n$，$n\subset\alpha$时，可推出$n//\beta$，但是推不出$n\perp\beta$，

当$n\perp\beta$时，由$\alpha//\beta$可知$n\perp\alpha$，又$m\subset\alpha$，所以$m\perp n$，

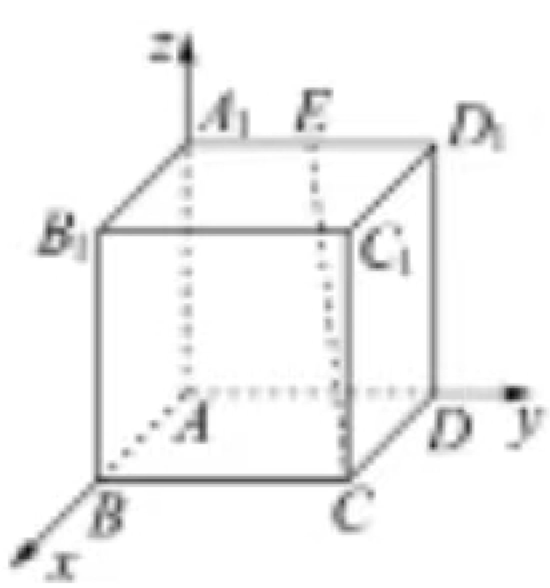
综上可知，“$m\perp n$”是“$n\perp\beta$”的必要不充分条件.

故选：B

6. 【答案】C

【分析】如图建立空间直角坐标系，利用空间向量进行求解即可

【详解】建立空间直角坐标系，如图，



则$C(1,1,0)$，$C_1(1,1,1)$，$E\left(0,\frac{1}{2},1\right)$，所以$\overrightarrow{EC}=\left(1,\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,1)$，

所以$\overrightarrow{CC_1}$在$\overrightarrow{EC}$上的投影为$\frac{\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EC}|}=\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}}=-\frac{2}{3}$，

所以点 C_1 到直线 EC 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{CC_1}|^2-\left(\dfrac{\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EC}|}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

故选：C.

【点睛】此题考查空间中点到线的距离，考查空间向量的应用，属于基础题

7.【答案】B

【分析】根据题意得：$17:30-19:00$ 为白天，$19:00-21:10$ 为夜间，由表格列出算式，计算即可得到结果.

【详解】解：根据题意得：

$60\div15\times2.5+30\div15\times3.75+1$

$=4\times2.5+2\times3.75+1$

$=10+7.5+1$

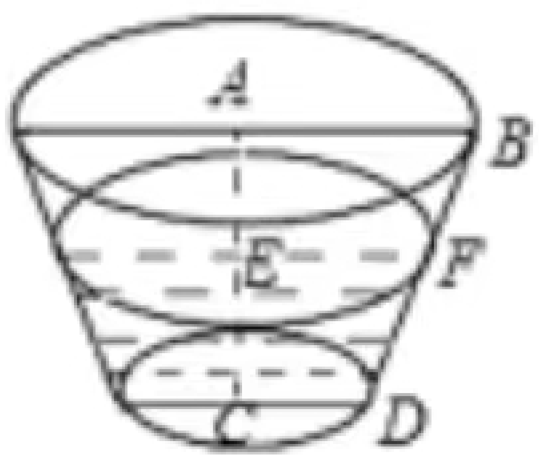
$=18.5$（元），

则李明应缴纳的停车费为 18.5 元.

故选：B.

8.【答案】C

【分析】由题意得到盆中水面的半径，利用圆台的体积公式求出水的体积，用水的体积除以盆的上底面面积即可得到答案.

【详解】

如图，由题意可知，天池盆上底面半径为 14 寸，下底面半径为 6 寸，高为 18 寸，

因为积水深 9 寸，所以水面半径为 $\dfrac{1}{2}\times(14+6)=10$ 寸，

则盆中水的体积为 $\dfrac{1}{3}\pi\times9\times(6^2+10^2+6\times10)=588\pi$ 立方寸，

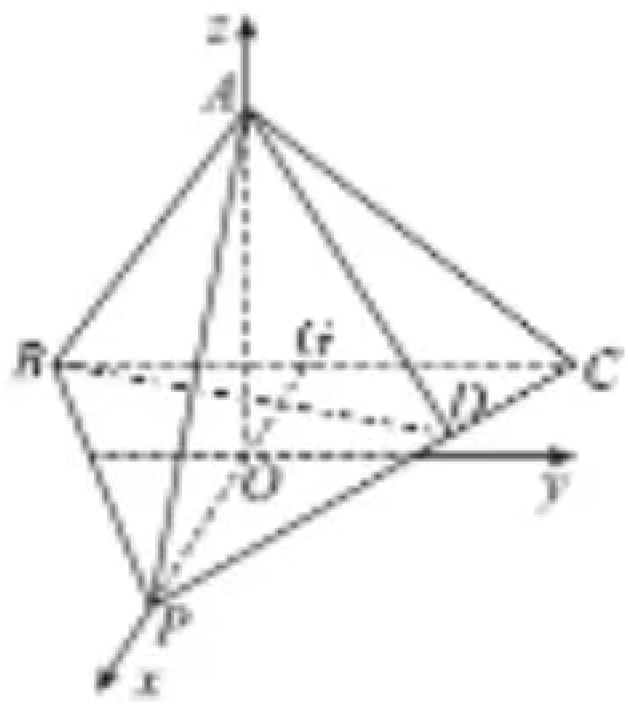
所以平地降雨量等于 $\dfrac{588\pi}{\pi\times14^2}=3$ 寸.

故选：C.

9.【答案】C

【分析】建立空间直角坐标系，运用空间向量数量积求解.

【详解】由题意，三棱锥 $P-ABC$ 是正四面体，以 $\triangle PBC$ 的重心为原点，BC 边的中线 PG 为 x 轴，OA 为 z 轴，过 O 点平行于 BC 的直线为 y 轴，建立空间直角坐标系如图：



设三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的棱长为 $2\sqrt{3}$ ，则有：$OA^2=AP^2-PO^2=12-2^2=8$ ，

$B\left(-1,-\sqrt{3},0\right),A\left(0,0,2\sqrt{2}\right),C\left(-1,\sqrt{3},0\right),P\left(2,0,0\right)$ ，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-1,\frac{2\sqrt{3}-x}{2},0\right)$ ，

$\overrightarrow{AB}=\left(-1,-\sqrt{3},-2\sqrt{2}\right),\overrightarrow{AD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-1,\frac{2\sqrt{3}-x}{2},-2\sqrt{2}\right)$ ，

设 $\vec{m}=\left(t,y,z\right)$ 是平面 ABD 的一个法向量，则有 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ ，即

$\begin{cases}-t-\sqrt{3}y-2\sqrt{2}z=0\\\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-1\right)t+\left(\frac{2\sqrt{3}-x}{2}\right)y-2\sqrt{2}z=0\end{cases}$ ，令 $y=-\sqrt{3}x$ ，解得

$t=4\sqrt{3}-x,z=\sqrt{2}x-\sqrt{6},\therefore\vec{m}=\left(4\sqrt{3}-x,-\sqrt{3}x,\sqrt{2}x-\sqrt{6}\right)$ ，

显然 $\vec{n}=\left(0,0,1\right)$ 是平面 PBC 的一个法向量，

$$\therefore\left|\cos\theta\right|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{\left|\sqrt{2}x-\sqrt{6}\right|}{\sqrt{\left(4\sqrt{3}-x\right)^2+\left(\sqrt{3}x\right)^2+\left(\sqrt{2}x-\sqrt{6}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{\frac{2x^2-4\sqrt{3}x+6}{x^2-2\sqrt{3}x+9}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{2-\frac{12}{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+6}}\ ;$$

显然当 $x=\sqrt{3}$ 时（x 的取值范围是 $0<x<2\sqrt{3}$ ），$\left|\cos\theta\right|$ 最小，$\theta=\frac{\pi}{2}$ ，

当 $x>\sqrt{3}$ 时，$\left|\cos\theta\right|$ 变大，二面角为锐角，θ 变小，

$x<\sqrt{3}$ 时，$\left|\cos\theta\right|$ 变大，二面角为钝角，即 θ 变小；

综上 θ 减小.

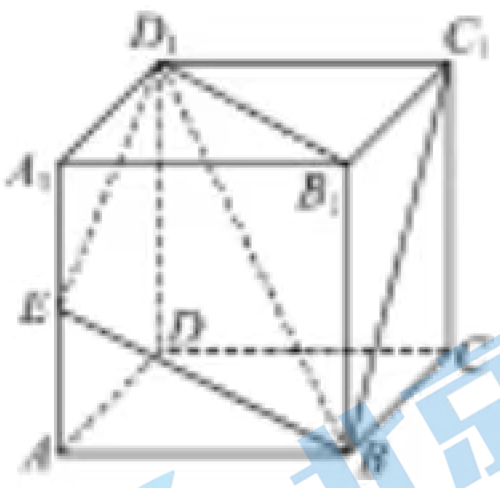
故选：C.

10. 【答案】A

【分析】对于①，$V_{B_1-BED_1}=V_{D_1-BEB_1}$，底面积和高均为定值，可判断；对②，若存在点$E$，使得$B_1D\perp$平面$BED_1$，可得$BD_1\perp B_1D$，易找出矛盾；对③，将侧面$AA_1D_1D$与侧面$AA_1B_1B$展开铺平可求解；对④，当点$E$在点A时，不存在点$P$符合要求；对⑤，推导出$A_1C\perp DM$，由余弦定理、三角形面积公式，结合二次函数的最值求出结果.

【详解】对于①，$V_{B_1-BED_1}=V_{D_1-BEB_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle BEB_1}\cdot h$，显然$S_{\triangle BEB_1}$是定值，因为$D_1A_1\perp$平面$ABB_1A_1$，所以$h$是定值，

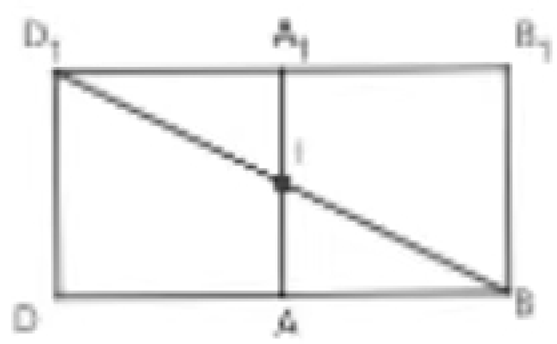
所以三棱锥B_1-BED_1的体积是定值，①正确；



对于②，若存在点E，使得$B_1D\perp$平面BED_1，又$BD_1\subset$平面BED_1，可得$BD_1\perp B_1D$，

所以四边形BDD_1B_1为正方形，即$BB=B_1D_1$，这与$B_1D_1=\sqrt{2}BB_1$矛盾，②错误；

对于③，如图，将侧面AA_1D_1D与侧面AA_1B_1B展开铺平，则D_1E+BE的最小值$\sqrt{5}$，③错误；



对于④，当点E在点A时，平面BED_1即是平面ABD_1，此时AP与平面BED_1相交，故不存在点P符合要求，④错误；

对于⑤，如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，

可得$A_1C\perp BD$，$A_1C\perp BC_1$，且BD，BC_1是平面BDC_1内两条相交直线，

所以$A_1C\perp$平面BDC_1，又$DM\subset$平面BDC_1，$\therefore A_1C\perp DM$，

因为M是BC_1上的动点，且过点A_1的截面α垂直DM，

所以截面α过点C，截面α交D_1C_1与G，交AB于H，设$D_1G=x(0\le x\le 1)$，

则$A_1G=\sqrt{1+x^2}$，$CG=\sqrt{(1-x)^2+1}$，在$\triangle A_1GC$中，可得

$$\cos\angle A_1GC=\frac{1+x^2+x^2-2x+2-3}{2\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}},$$

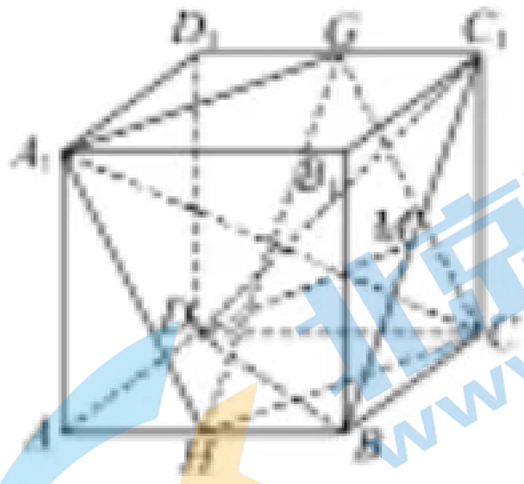
$\therefore \sin\angle A_1GC=\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+2}}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}}$，

则该截面的面积为 $S=2\times\dfrac{1}{2}A_1G\cdot CG\sin\angle A_1GC=\sqrt{2x^2-2x+2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$，

因为 $x\in[0,1]$，所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$S_{\min}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，此时 G，H 分别是 D_1C_1 和 AB 的中点，当 M 是 BC_1 中点时，$DM\perp BC_1$，即 $DM\perp GH$，

所以 $DM\perp$ 平面 A_1HCG，满足题意，⑤正确.

故选：A.



二、填空题（每一道小题 5 分，本题一共 25 分）

11.【答案】 ①. 6 ②. 15

【分析】①由 $\vec{a}\perp\vec{c}$，可得 $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，根据数量积的坐标运算得到关于 λ 的等式，解方程即可求得 λ 的值；

②根据 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面，则 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，据此可得关于 λ 的方程组，解方程组即可求 λ 的值.

【详解】①$\because\vec{a}\perp\vec{c}$，

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{c}=-2\lambda+2\times0-2\times(-6)=-2\lambda+12=0$，

解得 $\lambda=6$.

②若 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面，则 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，得 $(\lambda,0,-6)=x(-2,2,-2)+y(-1,6,-8)$

即 $\begin{cases}\lambda=-2x-y\\0=2x+6y\\-6=-2x-8y\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-9\\y=3\\\lambda=15\end{cases}$.

故答案为：6；15

12.【答案】0

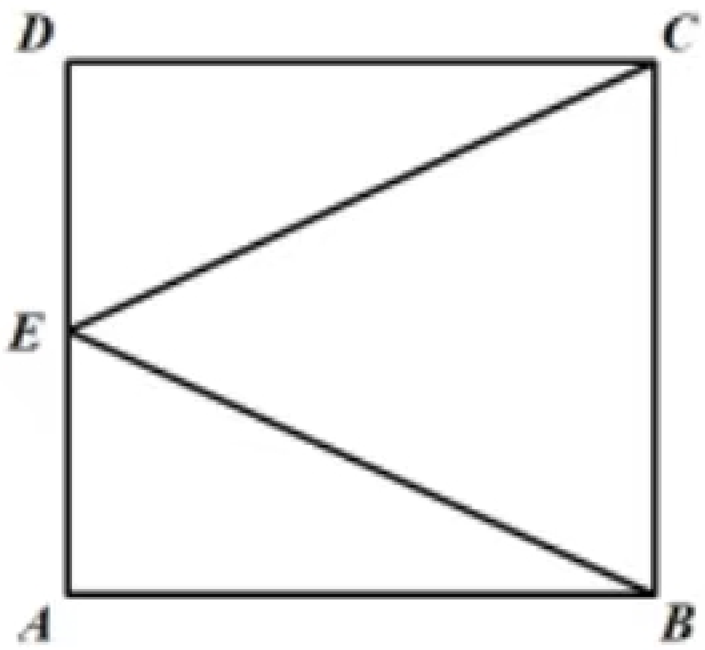
【分析】根据向量加法的三角形法则化简计算.

【详解】如图，$(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CE})\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CE})\cdot(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})$

$=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CE})\cdot(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CE})=\overrightarrow{BE}^2-\overrightarrow{CE}^2$，

因为 $|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{CE}|$，所以 $(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CE})\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

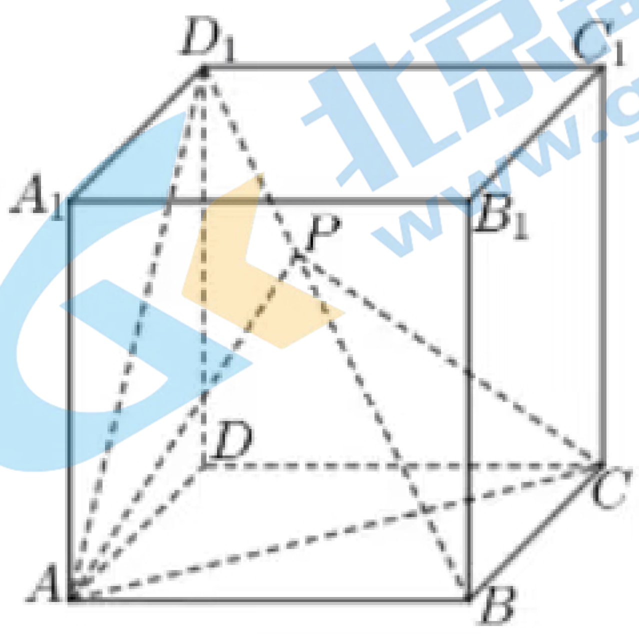
故答案为：0.



13.【答案】$\frac{1}{6}$（答案不唯一，$0 \le \lambda < \frac{1}{3}$）

【分析】设 $AP = x$，$D_1P = t$，设正方体的棱长为 1，在 $\triangle APC$ 中，利用余弦定理求出 $x^2 > 1$，在 $\triangle AD_1P$ 中，再利用余弦定理即可求解.

【详解】设 $AP = x$，$D_1P = t$，设正方体的棱长为 1，则 $AC = \sqrt{2}$，



在 $\triangle APC$ 中，$CP = AP$，由余弦定理得 $\cos \angle APC = \frac{x^2 + x^2 - 2}{2x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$，

由 $\angle APC$ 为锐角，得 $\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$，则 $x^2 > 1$，

当点 P 与 D_1 重合时，$\angle APC = 60^\circ$，符合题意，此时 $\lambda = 0$，

当点 P 与 D_1 不重合时，$\lambda > 0$，$t > 0$，

在 $\triangle AD_1P$ 中，$AD_1 = \sqrt{2}$，$\cos \angle AD_1P = \frac{\sqrt{6}}{3}$，由余弦定理得 $x^2 = 2 + t^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot t \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$，

于是 $2 + t^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot t \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} > 1$，即 $3t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 > 0$，解得 $t > \sqrt{3}$ 或 $t < \frac{\sqrt{3}}{3}$，

由 $D_1B = \sqrt{3}$，得 $\lambda > 1$ 或 $\lambda < \frac{1}{3}$，显然 $\lambda \le 1$，因此 $0 < \lambda < \frac{1}{3}$，

所以实数 λ 的取值范围是 $0 \le \lambda < \frac{1}{3}$，取 $\lambda = \frac{1}{6}$.

故答案为：$\frac{1}{6}$

14. 【答案】$\frac{2\sqrt{21}}{7}$ ## $\frac{2}{7}\sqrt{21}$

【分析】建立空间直角坐标系，给出各点坐标，用向量方法即可算出距离.

【详解】以点 E 为坐标原点，ED，EB，EP 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A\left(2,\sqrt{3},0\right)$，$B\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$P\left(0,0,1\right)$，$D\left(1,0,0\right)$，

所以 $\overrightarrow{AD}=\left(-1,-\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(0,\sqrt{3},-1\right)$，$\overrightarrow{PD}=\left(1,0,-1\right)$，

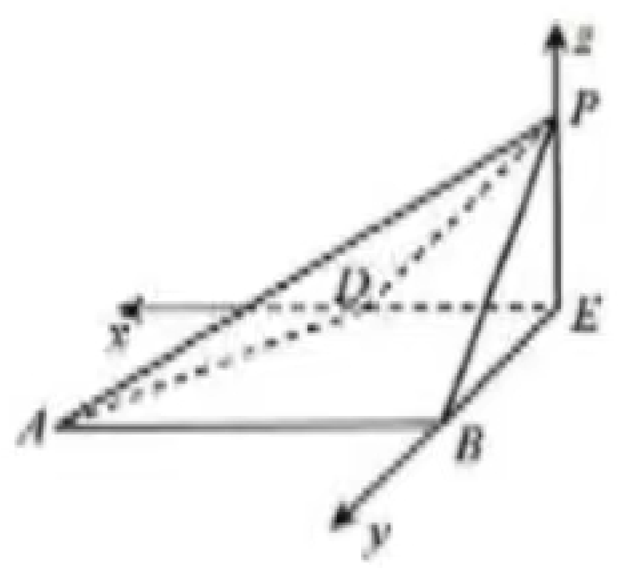
设向量 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$ 同时垂直于 $\overrightarrow{PB},\overrightarrow{AD}$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-x-\sqrt{3}y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=\sqrt{3}y-z=0\end{cases}$，

令 $y=1$，则 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\ z=\sqrt{3}\end{cases}$，$\vec{n}=\left(-\sqrt{3},1,\sqrt{3}\right)$.

所以异面直线 PB 与 AD 间的距离 $d=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}}{\left|\vec{n}\right|}\right|=\left|\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right|=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{21}}{7}$.



15. 【答案】 ①. 4π ②. $\frac{16}{3}\pi+8$

【分析】(1)根据球的表面积公式计算可得结果；

(2)分析可知，到距离等于 1 的点所围成的几何体是一个棱长为 1，1，2 的长方体和 4 个高为 1，底面半径为 1 的半圆柱以及四个半径为 1 的四分之一球所围成的几何体，根据公式可得答案.

【详解】(1) 与定点 O 距离等于 1 的点所围成的几何体是一个半径为 1 的球，所以其表面积为 4π；

(2) 分析可知，到距离等于 1 的点所围成的几何体是一个棱长为 2，2，2 的长方体和 4 个高为 2，底面半径为 1 的半圆柱以及四个半径为 1 的四分之一球所围成的几何体，

所以其体积为：$2\times2\times2+4\times\frac{1}{2}\times\pi\times1^2\times2+4\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\pi\times1^3=8+4\pi+\frac{4}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi+8$.

故答案为：4π；$\dfrac{16}{3}\pi+8$.

【点睛】本题考查空间想象能力，长方体、圆柱体、球体的体积公式，球体的表面积公式，关键在于得出点所构造的几何体是由什么几何体组成的，属于难题.

三、解答题

16.【答案】（1）证明见解析；（2）证明见解析.

【分析】（1）由直三棱柱的性质可推出 $AA_1\perp CM$，由等腰三角形的性质知 $CM\perp AB$，然后由线面垂直的判定定理，得证；

（2）连接 BC_1，交 B_1C 于点 O，连接 OM，易知 $OM\parallel AC_1$，再由线面平行的判定定理，得证.

【详解】（1）证明：由直三棱柱的性质知，$AA_1\perp$平面 ABC，

$\because CM\subset$平面 ABC，$\therefore AA_1\perp CM$，

$\because AC=BC$，M 为 AB 的中点，$\therefore CM\perp AB$，

又 $AA_1\cap AB=A$，AA_1、$AB\subset$平面 ABB_1A_1，

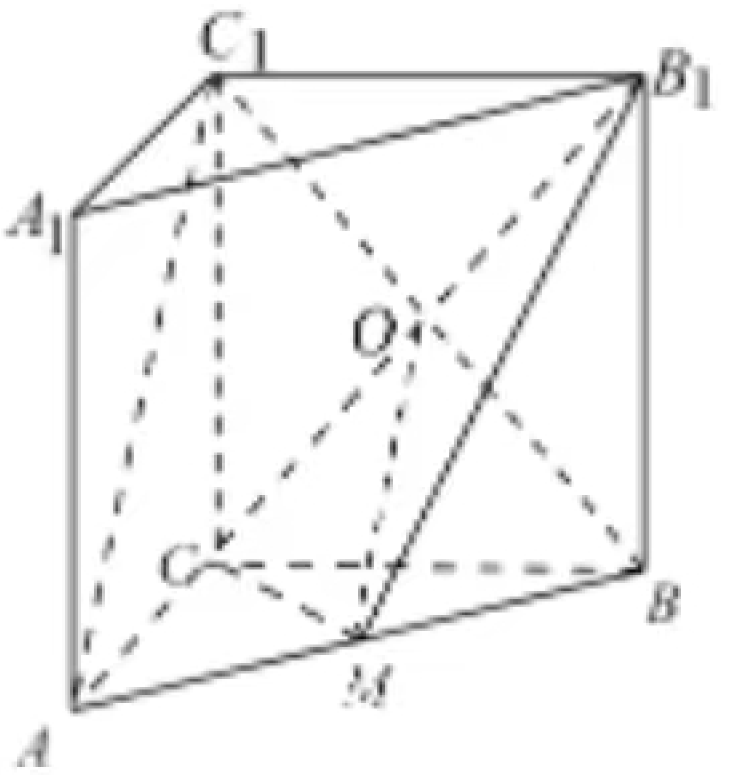
$\therefore CM\perp$平面 ABB_1A_1.

（2）证明：连接 BC_1，交 B_1C 于点 O，连接 OM，则 O 为 BC_1 的中点，

$\because M$ 为 AB 的中点，$\therefore OM\parallel AC_1$，

$\because OM\subset$平面 CMB_1，$AC_1\not\subset$ 平面 CMB_1，

$\therefore AC_1\parallel$ 平面 CMB_1.



17.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{4}{5}$

【分析】（1）通过证明 $BD\perp$面 PAC 得出 $GF\perp$面 PAC，进而得结果；

（2）先得 $BD=2\sqrt{3}$ 与 $\angle DAB=\dfrac{2\pi}{3}$ 等价，以 O 为原点建立空间直角坐标系，可得相应点坐标，可得向量 PA 坐标与平面 EFG 法向量坐标，即可得线面夹角正弦值，从而可得答案.

【小问 1 详解】

因为底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，所以 $BD\perp AC$，

因为 $PO\perp$平面 $ABCD$，所以 $PO\perp BD$，

由因为 $AC \cap PO = O$， $AC, PO \subset$ 平面 PAC， 所以 $BD \perp$ 面 PAC，

又因为 F，G 分别是 PB， PD 的中点，所以 $FG // BD$， 所以 $GF \perp$ 面 PAC，

所以 $GF \perp PC$

【小问 2 详解】

若 $BD = 2\sqrt{3}$，由于 $AB = AD = 2$，

由余弦定理得 $\cos\angle BAD = \dfrac{4+4-12}{2\times 2\times 2} = -\dfrac{1}{2}$， 而 $\angle BAD$ 为三角形内角，故 $\angle DAB = \dfrac{2\pi}{3}$.

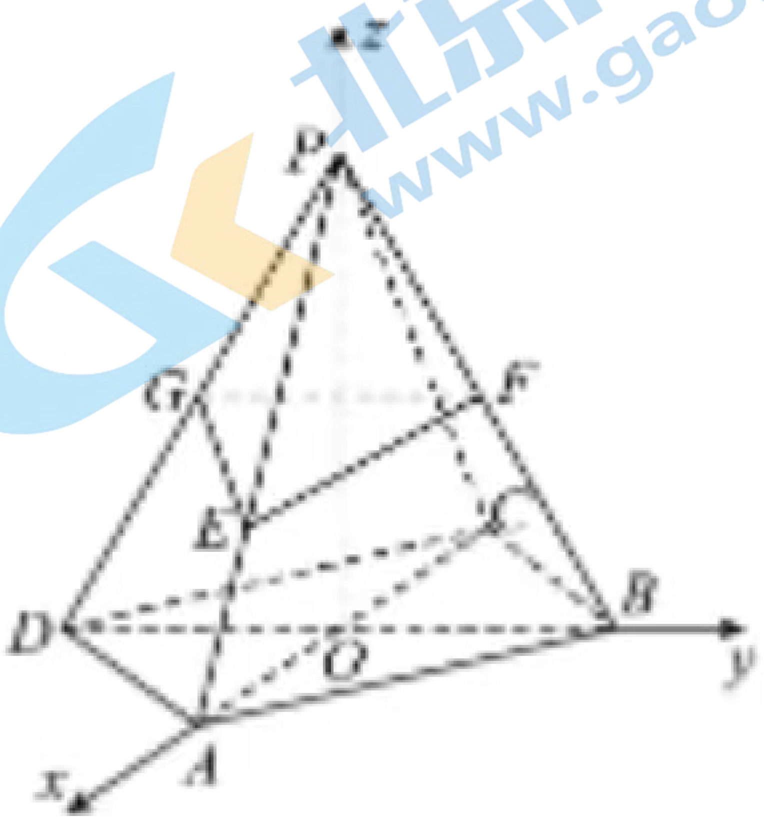
所以选择条件①和条件②解法相同，

底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，所以 $AC \perp BD$，

又 $PO \perp$ 平面 $ABCD$， $OA, OB \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO \perp OA, PO \perp OB$，

如图所示，以 O 为原点，以 OA, OB, OP 所在直线为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，



$\because \angle DAB = \dfrac{2\pi}{3}$，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\therefore OA = 1, OD = OB = \sqrt{3}$，

则 $A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), D(0,-\sqrt{3},0)$， $P(0,0,2)$， $G(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1), F(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},1)$.

$\therefore \overrightarrow{PA} = (1,0,-2), \overrightarrow{AP} = (-1,0,2), \overrightarrow{OA} = (1,0,0)$，

又 $AP = 3AE$， $\therefore \overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AP}$， $\therefore \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AP} = (\dfrac{2}{3},0,\dfrac{2}{3})$，

$\therefore E(\dfrac{2}{3},0,\dfrac{2}{3})$， $\overrightarrow{EF} = (-\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{3}), \overrightarrow{EG} = (-\dfrac{2}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{3})$，

设平面 EFG 的一个法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF} = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{1}{3}z = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EG} = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{1}{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 2x \end{cases}$， 令 $x = 1$，所以 $\vec{n} = (1,0,2)$，

设直线 PA 与平面 EFG 所成角为 θ，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

则 $\sin\theta=\frac{\left|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{|-3|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$，故有 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{4}{5}$，

所以直线 PA 与平面 EFG 所成角的余弦值 $\frac{4}{5}$.

18.【答案】（1）$[1,4]$

（2）当 $x=\frac{3}{2}$ 时函数取得最小值，$f(x)_{\min}=\frac{7}{4}$，当 $x=-2$ 时函数取得最大值 $f(x)_{\max}=14$；

（3）$(-4,+\infty)$

【分析】（1）根据 $f(1)=0$，代入求出参数 a 的值，再解一元二次不等式即可；

（2）首先由 $f(1)=2$ 求出 a 的值，再根据二次函数的性质求出函数在给定区间上的最值；

（3）参变分离可得 $-a<x+\frac{4}{x}$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，再利用基本不等式求出 $x+\frac{4}{x}$ 的最小值，即可得解；

【小问 1 详解】

解：因为 $f(x)=x^2+ax+4(a\in R)$ 且 $f(1)=0$，所以 $1^2+a+4=0$，解得 $a=-5$，所以 $f(x)=x^2-5x+4$，解 $f(x)\le 0$，即 $x^2-5x+4\le 0$，即 $(x-4)(x-1)\le 0$，解得 $1\le x\le 4$，即原不等式的解集为 $[1,4]$；

【小问 2 详解】

解：因为 $f(1)=2$，所以 $1^2+a+4=2$，所以 $a=-3$，所以 $f(x)=x^2-3x+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$，因为 $x\in[-2,2]$，所以函数在 $\left[-2,\frac{3}{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3}{2},2\right]$ 上单调递增，所以当 $x=\frac{3}{2}$ 时函数取得最小值 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{4}$，当 $x=-2$ 时函数取得最大值 $f(x)_{\max}=f(-2)=14$；

【小问 3 详解】

解：因为对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)>0$ 恒成立，即对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $x^2+ax+4>0$ 恒成立，即 $-a<x+\frac{4}{x}$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，因为 $x+\frac{4}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$ 当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时取等号；

所以 $-a<4$，即 $a>-4$，所以 $a\in(-4,+\infty)$

19.【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

（2）存在，$\dfrac{PQ}{PD'}=\dfrac{1}{3}$

【分析】（1）建立空间直角坐标系，由空间向量求解；

（2）设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PD'}\left(0\le\lambda\le1\right)$，表示出 $\overrightarrow{CQ}$，利用向量的夹角公式代入列式，即可得解.

【小问 1 详解】

因为在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB=2AD=2CD=4$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，$P$ 为 AB 的中点，所以，

$CD//PB$，$CD=PB$，

所以 $\triangle ADP$ 是正三角形，四边形 $DPBC$ 为菱形，

可得 $AC\perp BC$，$AC\perp DP$，

而平面 $D'AC\perp$ 平面 BAC，平面 $D'AC\cap$ 平面 $BAC=AC$，

$D'O\subset$ 平面 $D'AC$，$D'O\perp AC$，

$\therefore D'O\perp$ 平面 BAC，所以 OA，OP，OD' 两两互相垂直，

如图，以点 O 为坐标原点，OA，OP，OD' 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$C\left(-\sqrt{3},0,0\right)$，$B\left(-\sqrt{3},2,0\right)$，$D'\left(0,0,1\right)$，$P\left(0,1,0\right)$，

$\therefore\overrightarrow{AD'}=\left(-\sqrt{3},0,1\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(-2\sqrt{3},2,0\right)$，$\overrightarrow{BD'}=\left(\sqrt{3},-2,1\right)$，$\overrightarrow{CD'}=\left(\sqrt{3},0,1\right)$，

设平面 ABD' 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD'}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+z_1=0\\ -2\sqrt{3}x_1+2y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，则 $y_1=z_1=\sqrt{3}$，

$\therefore\vec{m}=\left(1,\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，

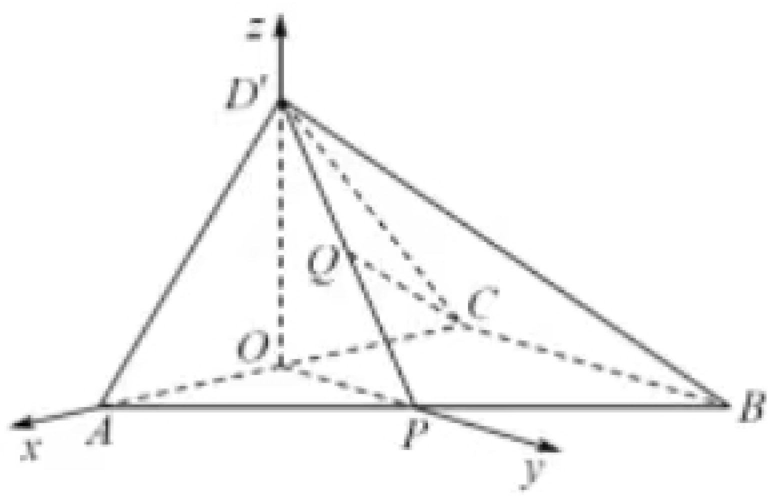
设平面 CBD' 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD'}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD'}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_2-2y_2+z_2=0\\ \sqrt{3}x_2+z_2=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，则 $y_2=0$，$z_2=-\sqrt{3}$，

$\therefore\vec{n}=\left(1,0,-\sqrt{3}\right)$，

$$\therefore\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{1\times1+\sqrt{3}\times0+\sqrt{3}\times\left(-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+3+3}\times\sqrt{1+3}}=-\frac{\sqrt{7}}{7},$$

所以二面角 $A-BD'-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.



【小问 2 详解】

线段 PD' 上存在点 Q，使得 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$.

设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PD'}\ (0\le\lambda\le1)$，因为 $\overrightarrow{CP}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$，$\overrightarrow{PD'}=\left(0,-1,1\right)$，所以

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CP}+\lambda\overrightarrow{PD'}=\left(\sqrt{3},1-\lambda,\lambda\right)$，

设 CQ 与平面 BCD' 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{CQ},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{CQ}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CQ}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{2\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$，

即 $3\lambda^2-7\lambda+2=0$，$\because 0\le\lambda\le1$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，

所以线段 PD' 上存在点 Q，且 $\dfrac{PQ}{PD'}=\dfrac{1}{3}$，使得 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$.

20.【答案】（1）证明见解析

（2）1

（3）$M\in$ 平面 CFG，理由见解析

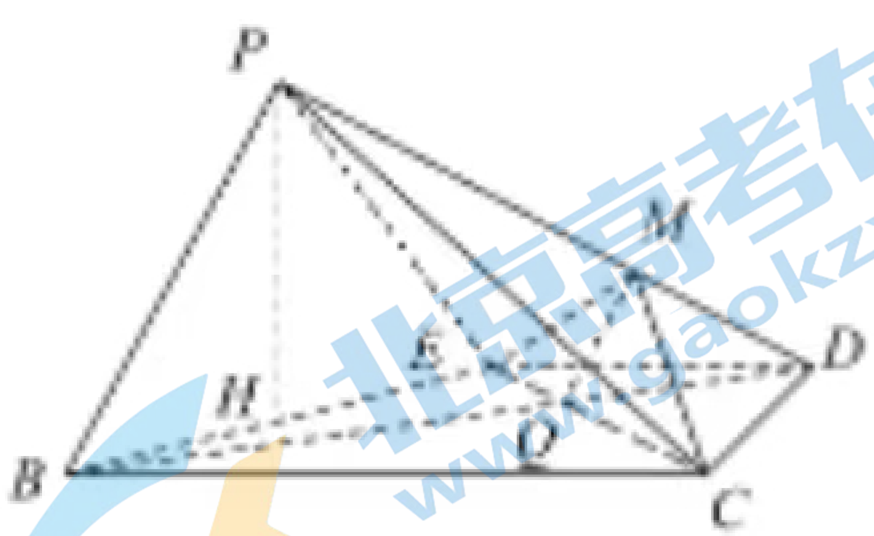
【分析】（1）连接 BD 与 CE 交于点 Q，连接 MQ，确定 $PB/\!/MQ$，根据相似得到答案.

（2）过 P 作 $PH\perp BE$ 交 BE 于 H，计算 $V_{P-BCE}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，确定 $EC\perp PE$，根据体积法计算距离即可.

（3）延长 ED 到 N，使得 $DE=DN$，确定 $CNGE$ 四点共面，根据 $MP=2DM$，得到 M 为 $\triangle PEN$ 重心，得到 $M\in NG$，得到证明.

【小问 1 详解】

如图所示：连接 BD 与 CE 交于点 Q，连接 MQ，



$PB/\!/$ 平面 CEM，$PB\subset$ 平面 PBD，平面 $PBD\cap$ 平面 $MEC=MQ$，故 $PB/\!/MQ$，

$\triangle BCQ \backsim \triangle DEQ$，故 $\frac{BQ}{QD}=\frac{BC}{DE}=2$，即 $BQ=2QD$，

$\triangle PBD \backsim \triangle MQD$，故 $\frac{PM}{MD}=\frac{BQ}{QD}=2$，即 $MP=2DM$.

【小问 2 详解】

过 P 作 $PH\perp BE$ 交 BE 于 H，$PB=PE=1$，故 $PH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$V_{P-BCE}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCE}\times PH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，

$PH\perp BE$，平面 $PBE\perp$ 平面 $BCDE$，平面 $PBE\cap$ 平面 $BCDE=BE$，

$PH\subset$ 平面 PBE，故 $PH\perp$ 平面 $BCDE$，$EC\subset$ 平面 $BCDE$，则 $PH\perp EC$，

$BE=\sqrt{2}$，$EC=\sqrt{2}$，$BC=2$，故 $BC^2=BE^2+EC^2$，故 $BE\perp EC$，

$BE\cap PH=H$，$BE,PH\subset$ 平面 PBE，故 $EC\perp$ 平面 PBE，

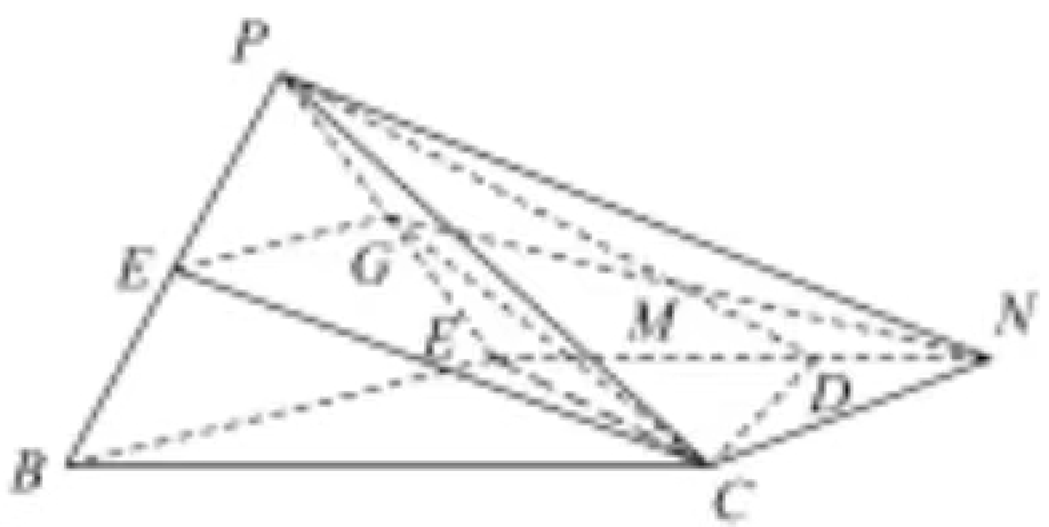
$PE\subset$ 平面 PBE，故 $EC\perp PE$，$S_{\triangle PEC}=\frac{1}{2}\times PE\times CE=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

设点 B 到面 PEC 的距离为 h，则 $\frac{1}{3}S_{\triangle PEC}\cdot h=V_{P-BCE}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，故 $h=1$.

即点 B 到面 PEC 的距离为1.

【小问 3 详解】

如图所示：延长 ED 到 N，使得 $DE=DN$，连接 PN，GN，



四边形 $BCNE$ 为平行四边形，E,G 分别为 PB,PG 中点，则 $EG/\!/BE$，

故 $EG/\!/CN$，则 $CNGE$ 四点共面，

D 为 EN 中点，且 $MP=2DM$，故 M 为 $\triangle PEN$ 重心，

G 是 PE 中点，NG 为 $\triangle PEN$ 中线，故 $M\in NG$，即 $M\in$ 平面 $ECNG$.

21.【答案】（1）具有，过程见解析；

（2）不存在，过程见解析.

【分析】（1）根据题目直接运算判断即可；

（2）对 p 进行分类讨论，逐个验证是否符合该性质.

【小问 1 详解】

对于 $A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$，

则 $(1,1,0)\cdot(1,1,0)=1+1+0=2$，同理 $(1,0,1)\cdot(1,0,1)=(0,1,1)\cdot(0,1,1)=2$，

而 $(1,1,0)\cdot(1,0,1)=1+0+0=1$，同理 $(1,1,0)\cdot(0,1,1)=(1,0,1)\cdot(0,1,1)=1$，

所以 A 具有性质 $T(3,2)$.

【小问 2 详解】

假设存在集合 A 具有性质 $T(4,p)$，易知集合 A 有 4 个元素且 $p\in\{0,1,2,3,4\}$，

①若 $p=0$，则 $A=\{(0,0,0,0)\}$，不符合 4 个元素，舍去；

②若 $p=1$，则 $A\subseteq\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$，又因为 $(1,0,0,0)\cdot(0,1,0,0)=0$，所以不满足，舍去；

③若 $p=2$，则 $A\subseteq\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$，

又因为 $(1,1,0,0)\cdot(0,0,1,1)=(1,0,1,0)\cdot(0,1,0,1)=(1,0,0,1)\cdot(0,1,1,0)=0$，

所以这 3 组每组至多只能有一个包含于 A，所以 A 至多只有 3 个元素，矛盾，舍去；

④若 $p=3$，则 $A\subseteq\{(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$，又因为 $(1,1,1,0)\cdot(1,1,0,1)=2$，所以不满足，舍去；

⑤若 $p=4$，则 $A=\{(1,1,1,1)\}$，只有一个元素，舍去，

综上可知，不存在具有性质 $T(4,p)$ 的集合 A .

【点睛】方法点睛：本题可以利用反证法逐个矛盾（元素个数矛盾或者与题干性质矛盾）来判断.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！