一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．设集合 $A=\{x||x-1|<2\}$，$B=\{y|y=2^x，x\in[0，2]\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．[0，2]　　B．（1，3）　　C．[1，3）　　D．（1，4）

2．下列函数中，既不是奇函数，也不是偶函数的是（　　）

A．$y=x+e^x$　　B．$y=x+\frac{1}{x}$　　C．$y=2^x+\frac{1}{2^x}$　　D．$y=\sqrt{1+x^2}$

3．已知 $a=\ln\frac{1}{2},b=\sin\frac{1}{2},c=2^{-\frac{1}{2}}$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

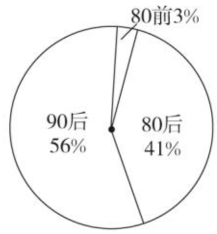
A.$a<b<c$　　B.$a<c<b$　　C.$b<a<c$　　D.$b<c<a$

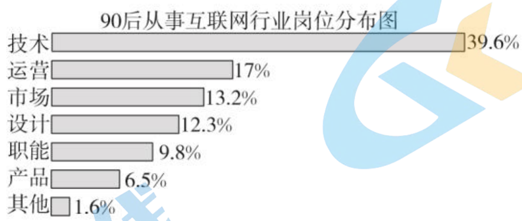
4.在复平面内，复数 $\frac{2+3i}{i}$ 对应的点位于

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

5.某调查机构对全国互联网行业进行调查统计，得到整个互联网行业从业者年龄分布饼状图、90 后从事互联网行业岗位分布条形图，则下列结论不正确的是(　　)注：90 后指 1990 年及以后出生，80 后指 1980～1989 年之间出生. 80 前指 1979 年及以前出生.





A．互联网行业从业人员中从事技术和运营岗位的人数占总人数的三成以上

B．互联网行业中从事技术岗位的人数超过总人数的 20%

C．互联网行业中从事运营岗位的人数 90 后比 80 前多

D．互联网行业中从事技术岗位的人数 90 后比 80 后多

6．已知抛物线 $C:y^2=x$ 的焦点为 $F,A(x_0,y_0)$ 是 C 上一点，$|AF|=\frac{5}{4}x_0$，则 $x_0=$

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1\quad(a>0)$ 的一条渐近线与圆 $(x-3)^2+y^2=8$ 相交于 M,N 两点，且 $|MN|=4$，则此双曲线的离心率为

A. 5　　B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 P 是圆 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上的动点．若 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$a\neq0$，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的最大值为（　　）

A. 16　　B. 12　　C. 8　　D. 6

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=n^2-2\lambda n$，则 " $\lambda<0$ " 是 " $\forall n\in N^*,a_{n+1}>a_n$ " 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 给定函数 $f(x)$，若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，则称数列 $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的牛顿数列．已知 $\{x_n\}$ 为 $f(x)=x^2-x-2$ 的牛顿数列，$a_n=\ln\frac{x_n-2}{x_n+1}$，且 $a_1=1$，$(n\in N_+)$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．则 $S_{2023}=$（　　）

A. $2^{2023}-1$　　B. $2^{2024}-1$

C. $(\frac{1}{2})^{2022}-1$　　D. $(\frac{1}{2})^{2023}-1$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11. 已知 $4^a=2$，$lgx=a$，则 $x=$__________________．

12. 已知角 α 终边过点 $P(1,2)$，角 β 终边与角 α 终边关于 y 轴对称，则 $\tan\alpha=$_______；$\cos(\beta-\alpha)=$_______．

13. 若 $\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n(n\in\mathbf{N},n\geq1)$ 展开式中含有常数项，则 n 的最小值是______．

14. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，当 $x\geq0$ 时，$f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x, & 0\leq x<2\\ \log_{16}x, & x\geq2\end{cases}$，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2+af(x)+b=0(a,b\in R)$ 有且仅有 7 个不同实数根，则 $a+b=$

____

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

15. 已知平面直角坐标系中的点集 $S=\{(x,y)\mid(x-k)^2+(y-k^2)^2=4|k|,k\in\mathbf{Z}\}$，给出下列四个结论：

①当直线 l 为 $y=x-2$ 时，l 与 S 没有公共点；

②存在直线 l 与 S 有且只有一个公共点；

③存在直线 l 经过 S 中的无穷个点；

④存在直线 l 与 S 没有公共点，且 S 中存在两点在 l 的两侧.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. （本小题 13 分）

电影公司随机收集了电影的有关数据，经分类整理得到下表：

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指：一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

假设所有电影是否获得好评相互独立.

（Ⅰ）从电影公司收集的电影中随机选取1部，求这部电影是获得好评的第四类电影的概率；

（Ⅱ）从第四类电影和第五类电影中各随机选取1部，估计恰有1部获得好评的概率；

（Ⅲ）假设每类电影得到人们喜欢的概率与表格中该类电影的好评率相等. 用“$\xi_k=1$”表示第 k 类电影得到人们喜欢，“$\xi_k=0$”表示第 k 类电影没有得到人们喜欢 $(k=1,2,3,4,5,6)$. 写出方差 $D\xi_1,D\xi_2,D\xi_3,D\xi_4,D\xi_5,D\xi_6$ 的大小关系.

17.（14 分）如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AD=AB=\sqrt{2}$，$\angle BAD=90°$，$\angle BCD=45°$，E 为对角线 BD 的中点．现将△ABD 沿 BD 折起到△PBD 的位置，使平面 $PBD\perp$ 平面 BCD，如图 2．

（Ⅰ）求证直线 $PE\perp$ 平面 BCD;

（Ⅱ）求异面直线 BD 和 PC 所成角的余弦值；

（Ⅲ）已知空间存在一点 Q 到点 P，B，C，D 的距离相等，写出这个距离的值（不用说明

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

理由).

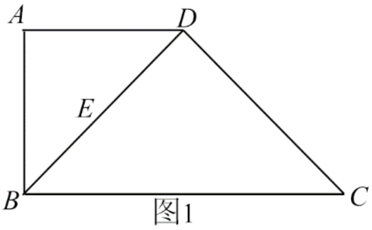


图1

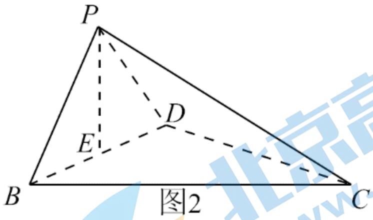


图2

18.（14 分）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})+m-\sqrt{3}(\omega>0)$．在下列条件①、条件②、条件③这三个条件中，选择可以确定 ω 和 m 值的两个条件作为已知.

（I）求 $f(\dfrac{\pi}{6})$ 的值；

（II）若函数 $f(x)$ 在区间［0，a］上是增函数，求实数 a 的最大值

条件①：$f(0)=2$；

条件②：$f(x)$ 最大值与最小值之和为 0；

条件③：$f(x)$ 最小正周期为 π.

19.（14 分）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的焦距为 2，长轴长为 4.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；求离心率；

（Ⅱ）过点 $M(-3,0)$ 且与 x 轴不重合的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，点 B 关于 x 轴的对称点为 B'．问：平面内是否存在定点 P，使得 B' 恒在直线 PC 上？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

20.（15 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+a\ln x$，$(a>0)$.

（1）若 $a=1$，求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

（2）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（3）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)>\dfrac{-3-2\ln 2}{4}$.

21.（15 分）已知集合 P 的元素个数为 $3n\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 且元素均为正整数，若能够将集合 P 分成元素个数相同且两两没有公共元素的三个集合 A，B，C，即 $P=A\cup B\cup C$，$A\cap B=\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，$B\cap C=\varnothing$，其中 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$，且满足 $c_1<c_2<\cdots<c_n$，$a_k+b_k=c_k$，$k=1,2,\cdots,n$，则称集合 P 为“完美集合”.

（Ⅰ）若集合 $P=\{1,2,3\}$，$Q=\{1,2,3,4,5,6\}$，判断集合 P 和集合 Q 是否为“完美集合”？并说明理由；

（Ⅱ）已知集合 $P=\{1,x,3,4,5,6\}$ 为“完美集合”，求正整数 x 的值；

（Ⅲ）设集合 $P=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 3n,n\in\mathbf{N}^*\}$，证明：集合 P 为“完美集合”的一个必要条件是 $n=4k$ 或 $n=4k+1$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.（4 分）设集合 $A=\{x||x-1|<2\}$，$B=\{y|y=2^x，x\in[0，2]\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．[0，2]　　　B．（1，3）　　　C．[1，3）　　　D．（1，4）

2.（4 分）下列函数中，既不是奇函数，也不是偶函数的是（　　）

A．$y=x+e^x$　　　B．$y=x+\frac{1}{x}$　　　C．$y=2^x+\frac{1}{2^x}$　　　D．$y=\sqrt{1+x^2}$

3．已知 $a=\ln\frac{1}{2},b=\sin\frac{1}{2},c=2^{-\frac{1}{2}}$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A.$a<b<c$　　　B.$a<c<b$　　　C.$b<a<c$　　　D.$b<c<a$

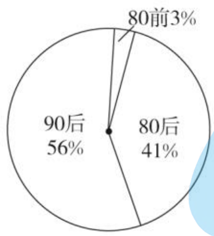
4.在复平面内，复数 $\frac{2+3i}{i}$ 对应的点位于

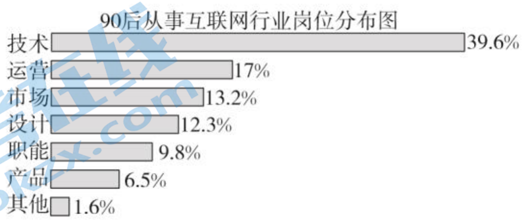
(A) 第一象限　　　(B) 第二象限

(C) 第三象限　　　(D) 第四象限

5.某调查机构对全国互联网行业进行调查统计，得到整个互联网行业从业者年龄分布饼状图、90 后从事互联网行业岗位分布条形图，则下列结论不正确的是(　　)

注：90 后指 1990 年及以后出生，80 后指 1980～1989 年之间出生.80 前指 1979 年及以前出生．





A．互联网行业从业人员中从事技术和运营岗位的人数占总人数的三成以上

B．互联网行业中从事技术岗位的人数超过总人数的 20%

C．互联网行业中从事运营岗位的人数 90 后比 80 前多

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

D．互联网行业中从事技术岗位的人数 90 后比 80 后多

解析　由整个互联网行业从业者年龄分布饼状图、90 后从事互联网行业岗位分布条形图得到：$56\%\times(39.6\%+17\%)=31.696\%>30\%$，所以互联网行业从业人员中从事技术和运营岗位的人数占总人数的三成以上，故 A 正确；由整个互联网行业从业者年龄分布饼状图、90 后从事互联网行业岗位分布条形图得到：$56\%\times39.6\%=22.176\%>20\%$，所以互联网行业中从事技术岗位的人数超过总人数的 20%，故 B 正确；由整个互联网行业从业者年龄分布饼状图、90 后从事互联网行业岗位分布条形图得到：$17\%\times56\%=9.52\%$，所以互联网行业中从事运营岗位的人数 90 后比 80 前多，故 C 正确；由整个互联网行业从业者年龄分布饼状图、90 后从事互联网行业岗位分布条形图得到：互联网行业中从事技术岗位的人数 90 后不一定比 80 后多，故 D 错误.

6. 已知抛物线 $C: y^2=x$ 的焦点为 $F, A(x_0,y_0)$ 是 C 上一点，$|AF|=\frac{5}{4}x_0$，则 $x_0=$

A. 1　B. 2　C. 4　D. 8

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1\ (a>0)$ 的一条渐近线与圆 $(x-3)^2+y^2=8$ 相交于 M,N 两点，且 $|MN|=4$，则此双曲线的离心率为

(A) 5　(B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$　(C) $\sqrt{5}$　(D) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

8.（4 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知 P 是圆 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上的动点．若 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$a\neq0$，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$的最大值为（　　）

A．16　B．12　C．8　D．6

8.【解答】解：因为 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=2|\overrightarrow{PO}|$，$|\overrightarrow{PO}|_{max}=|OC|+1=\sqrt{3^2+4^2}+1=6$，

所以 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|_{max}=12$．

故选：B．

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=n^2-2\lambda n$，则“$\lambda<0$”是“$\forall n\in N^*, a_{n+1}>a_n$”的

(A) 充分不必要条件　（B）必要不充分条件

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

(C) 充要条件　　　　(D) 既不充分也不必要条件

10.（4 分）给定函数 $f(x)$，若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，则称数列 $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的牛顿数列．已知 $\{x_n\}$ 为 $f(x)=x^2-x-2$ 的牛顿数列，$a_n=\ln\frac{x_n-2}{x_n+1}$，且 $a_1=1$，$x_n>2$（$n\in\mathbf{N}_+$），数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．则 $S_{2023}=$（　　）

A．$2^{2023}-1$　　　　B．$2^{2024}-1$

C．$(\frac{1}{2})^{2022}-1$　　　　D．$(\frac{1}{2})^{2023}-1$

10.【解答】解：由题意得 $f'(x)=2x-1$，

则 $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-x_n-2}{2x_n-1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n-1}$，$\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}+1}=\frac{\frac{x_n^2+2}{2x_n-1}-2}{\frac{x_n^2+2}{2x_n-1}+1}=(\frac{x_n-2}{x_n+1})^2$，

则两边取对数可得 $\ln\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}+1}=2\ln\frac{x_n-2}{x_n+1}$．

即 $a_{n+1}=2a_n$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列．

所以 $S_{2023}=\frac{1\times(1-2^{2023})}{1-2}=2^{2023}-1$．

故选：A．

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11.（5 分）已知 $4^a=2$，$lgx=a$，则 $x=$__________．

11.【解答】解：∵$4^a=2$，

∴$2^{2a}=2$，

即 $2a=1$

解得 $a=\frac{1}{2}$

∵$lgx=a$，

∴$lgx=\frac{1}{2}$

∴$x=\sqrt{10}$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

故答案为：$\sqrt{10}$

(12) 已知角α终边过点$P(1,2)$，角β终边与角α终边关于y轴对称，则$\tan\alpha=$_______；

$\cos(\beta-\alpha)=$_______.

13．若$\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n(n\in\mathbf{N},n\geq1)$展开式中含有常数项，则$n$的最小值是______.

13．4

【分析】写出通项公式，由常数项指数为 0 得出 n 与 k 的关系式，即可进一步得出n的最小值

【详解】由二项式展开项通项公式$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$可得

$T_{k+1}=C_n^k\left(\sqrt{3}x\right)^{n-k}\cdot\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^k=C_n^k\cdot3^{\frac{n-k}{2}}\cdot x^{n-\frac{4k}{3}}$，要含有常数项且$n$最小，则$n-\frac{4k}{3}=0$，即

$n=\frac{4k}{3}$，□$n\in\mathbf{N}^*,k\in\mathbf{N}$，则当$k=3$时，$n$取得最小值，为 4.

故答案为：4

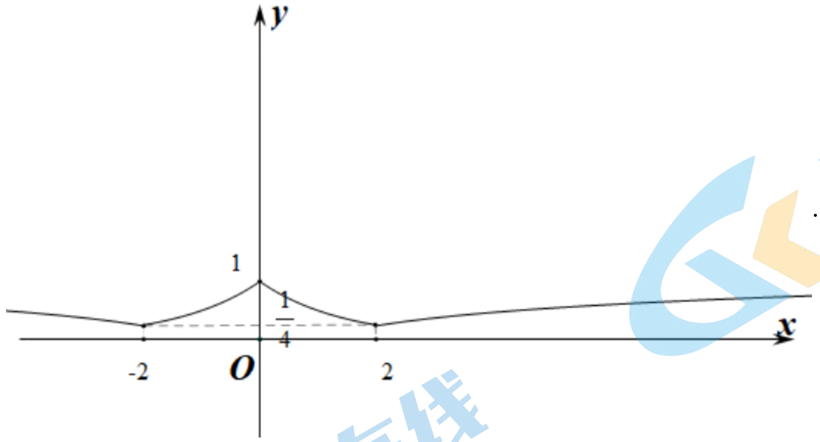
14．已知函数$y=f(x)$是定义域为R的偶函数，当$x\geq0$时，$f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x, & 0\leq x<2\\ \log_{16}x, & x\geq2\end{cases}$，若关于$x$的方程$[f(x)]^2+af(x)+b=0(a,b\in R)$有且仅有 7 个不同实数根，则$a+b=$

____

14．-1

【分析】根据题意，作出函数$f(x)$的图像，令$t=f(x)$，将原问题转化为图像交点问题，即可求解.

【详解】根据题意，作出函数$f(x)$的图像，如下，



由关于 x 的方程 $[f(x)]^2+af(x)+b=0(a,b\in R)$ 有且仅有 7 个不同实数根，

结合图像，令 $t=f\left(x\right)$，则关于 t 的方程 $t^2+at+b=0$ 有两个根，且 $t_1=1$，$\frac{1}{4}<t_2<1$，

故 $1^2+a+b=0$，即 $a+b=-1$.

故答案为：-1.

（15）已知平面直角坐标系中的点集 $S=\{(x,y)\,|\,(x-k)^2+(y-k^2)^2=4|k|,k\in\mathbf{Z}\}$，给出下列四个结论：

①当直线 l 为 $y=x-2$ 时，l 与 S 没有公共点；

②存在直线 l 与 S 有且只有一个公共点；

③存在直线 l 经过 S 中的无穷个点；

④存在直线 l 与 S 没有公共点，且 S 中存在两点在 l 的两侧.

其中所有正确结论的序号是________.

答案：②④.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

（16）（本小题 12 分）

电影公司随机收集了电影的有关数据，经分类整理得到下表：

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指：一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

假设所有电影是否获得好评相互独立.

（Ⅰ）从电影公司收集的电影中随机选取1部，求这部电影是获得好评的第四类电影的概率；

（Ⅱ）从第四类电影和第五类电影中各随机选取1部，估计恰有1部获得好评的概率；

（Ⅲ）假设每类电影得到人们喜欢的概率与表格中该类电影的好评率相等. 用“$\xi_k=1$”表示第 k 类电影得到人们喜欢，“$\xi_k=0$”表示第 k 类电影没有得到人们喜欢 $(k=1,2,3,4,5,6)$. 写出方差 $D\xi_1,D\xi_2,D\xi_3,D\xi_4,D\xi_5,D\xi_6$ 的大小关系.

解：（Ⅰ）由题意知，样本中电影的总部数是 $140+50+300+200+800+510=2\,000$，

第四类电影中获得好评的电影部数是 $200\times0.25=50$.

故所求概率为 $\dfrac{50}{2\,000}=0.025$.

（Ⅱ）设事件 A 为“从第四类电影中随机选出的电影获得好评”，

事件 B 为“从第五类电影中随机选出的电影获得好评”.

故所求概率为 $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$

$=P(A)(1-P(B))+(1-P(A))P(B)$.

由题意知：$P(A)$ 估计为 0.25，$P(B)$ 估计为 0.2.

故所求概率估计为 $0.25\times0.8+0.75\times0.2=0.35$.

（Ⅲ）$D\xi_1>D\xi_4>D\xi_2=D\xi_5>D\xi_3>D\xi_6$.

17.（14 分）如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD\,/\!/\,BC$，$AD=AB=\sqrt{2}$，$\angle BAD=90°$，$\angle BCD=45°$，E 为对角线 BD 的中点．现将△ABD 沿 BD 折起到△PBD 的位置，使平面 $PBD\perp$ 平面 BCD，如图 2．

（Ⅰ）求证直线 $PE\perp$ 平面 BCD；

（Ⅱ）求异面直线 BD 和 PC 所成角的余弦值；

（Ⅲ）已知空间存在一点 Q 到点 P，B，C，D 的距离相等，写出这个距离的值（不用说明理由）．

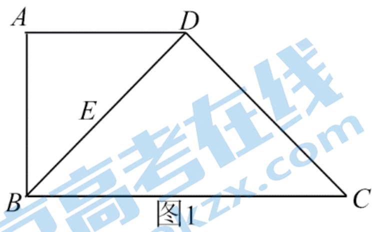


图1

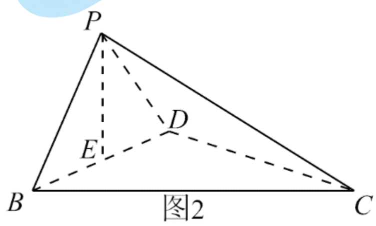


图2

16.【解答】（Ⅰ）证明：∵E 为 BD 的中点，$PB=PD$，

∴$PE\perp BD$，

∵平面 $PBD\perp$ 平面 BCD，且平面 $PBD\cap$ 平面 $BCD=BD$，

$PE\subset$ 平面 PBD，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

∴直线 PE⊥平面 BCD.

（Ⅱ）解：如图所示，建立空间直角坐标系，

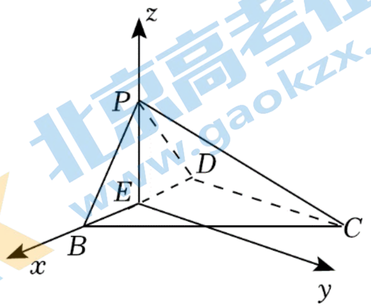
依题意得 $E(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(-1,2,0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,0,1)$，

∴$\overrightarrow{BD}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{PC}=(-1,2,-1)$，

∴$\cos<\overrightarrow{BD},\overrightarrow{PC}>=\dfrac{2}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

∴异面直线 BD 和 PC 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

（Ⅲ）空间存在一点 Q 到点 P，B，C，D 的距离相等，这个距离的值为$\sqrt{2}$.



18.已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})+m-\sqrt{3}(\omega>0)$. 在下列条件①、条件②、条件③这三个条件中，选择可以确定 ω 和 m 值的两个条件作为已知.

（I）求 $f(\dfrac{\pi}{6})$ 的值；

（II）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上是增函数，求实数 a 的最大值

条件①：$f(0)=2$；

条件②：$f(x)$ 最大值与最小值之和为 0；

条件③：$f(x)$ 最小正周期为 π.

解：（I）函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})+m-\sqrt{3}(\omega>0)$.

选条件①③：

由条件③得，$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，又因为 $\omega>0$，所以 $\omega=2$.

由①知，$f(0)=2\sin(\dfrac{\pi}{3})-\sqrt{3}+m=2$，所以 $m=2$.

则 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+2-\sqrt{3}$.

所以 $f(\dfrac{\pi}{6})=2\sin(\dfrac{2\pi}{3})+2-\sqrt{3}=2$.

（II）

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以函数 f（x）的单调增区间为 $[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$.

因为函数在区间［0，a]上单调递增，且 $0\in[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}]$，此时 k=0，

所以 $a\le\frac{\pi}{12}$，故 a 的最大值为 $\frac{\pi}{12}$． ……………………………10 分

选条件②③：

由于 $f(x)$ 最小正周期为 π，所以 ω=2，所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+m-\sqrt{3}$；

由 $f(x)$ 最大值与最小值之和为 0，

$f(x)_{\min}=-2-\sqrt{3}+m$，$f(x)_{\max}=2-\sqrt{3}+m$，

故 $-2-\sqrt{3}+m+2-\sqrt{3}+m=0$，解得 $m=\sqrt{3}$.

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$． 故 $f(\frac{\pi}{6})=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$． ……………………5 分

（II）解法同选条件①③.

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$.

因为函数在区间［0，a]上单调递增，且 $0\in[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}]$，此时 k=0，

所以 $a\le\frac{\pi}{12}$，故 a 的最大值为 $\frac{\pi}{12}$． ………………………10 分

说明：不可以选择条件①②：

由①知，$f(0)=2\sin(\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}+m=2$，所以 m=2；

由②知，$(2-\sqrt{3}+m)+(-2-\sqrt{3}+m)=0$，所以 $m=\sqrt{3}$；矛盾.

所以函数 $f(x)$ 不能同时满足条件①和②.

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的焦距为2，长轴长为4.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）过点 $M(-3,0)$ 且与 x 轴不重合的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，点 B 关于 x 轴的对称点为 B'. 问：平面内是否存在定点 P，使得 B' 恒在直线 PC 上？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

解：（Ⅰ）因为 椭圆 E 的焦距为2，长轴长为4，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $c=1$，$a=2$．

所以 $b^2=a^2-c^2=3$．

所以 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． …………3

分

（Ⅱ）存在定点 $P(-\frac{4}{3},0)$，使得 B' 恒在直线 PC 上．理由如下： …………4

分

设直线 $l: x=my-3$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $B'(x_1,-y_1)$．

所以 $\overrightarrow{PC}=(x_2+\frac{4}{3},y_2)$，$\overrightarrow{PB'}=(x_1+\frac{4}{3},-y_1)$．

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my-3\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2-18my+15=0$． …………6

分

所以 $\Delta=48(3m^2-5)>0$，$y_1+y_2=\frac{18m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{15}{3m^2+4}$． …………8

分

因为 $x_1=my_1-3$，$x_2=my_2-3$，

所以 $(x_1+\frac{4}{3})y_2+(x_2+\frac{4}{3})y_1=2my_1y_2-\frac{5}{3}(y_1+y_2)$

$=2m\times\frac{15}{3m^2+4}-\frac{5}{3}\times\frac{18m}{3m^2+4}$

$=0$．

所以 $\overrightarrow{PC}\,//\,\overrightarrow{PB'}$．

所以 点 B'，P，C 共线．

20．（14 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a\ln x$，$(a>0)$．

（1）若 $a=1$，求 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（3）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)>\frac{-3-2\ln 2}{4}$．

20．【解答】解：（1）$a=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln x$，$f'(x)=x-1+\frac{1}{x}$ $(x>0)$，

故 $f(1)=-\frac{1}{2}$，$f'(1)=1$，

故切线方程为：$y-(-\frac{1}{2})=1\cdot(x-1)$，

即 $y=x-\frac{3}{2}$；

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（2）$f'(x)=x-1+\frac{a}{x}=\frac{x^2-x+a}{x}$（$x>0$），$\Delta=1-4a$，

当 $a\geq\frac{1}{4}$ 时，$\Delta=1-4a\leq0$，$f'(x)\geq0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$\Delta=1-4a>0$，令 $f'(x)=0$，解得：$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$ 且 $\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}>0$，

$x\in\left(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$x\in\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

综上：$a\geq\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$0<a<\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty\right)$ 单调递增；

（3）证明：$\because f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a\ln x$，$(a>0)$，$f'(x)=x-1+\frac{a}{x}=\frac{x^2-x+a}{x}$（$x>0$），

由题意知 $x^2-x+a=0$ 的两根为 x_1，x_2，且 $1-4a>0$，故 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=a\\a\in\left(0,\frac{1}{4}\right)\end{cases}$，

$\therefore f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-(x_1+x_2)+a\ln x_1x_2$

$=\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-(x_1+x_2)+a\ln x_1x_2$

$=\frac{1}{2}(1-2a)-1+a\ln a=-\frac{1}{2}-a+a\ln a$，

令 $g(a)=a\ln a-a-\frac{1}{2}$（$a\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$），

则 $g'(a)=\ln a$，$a\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 时，$g'(a)<0$，$g(a)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 递减，

$\therefore f(x_1)+f(x_2)>g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-3-2\ln2}{4}$，

$\therefore f(x_1)+f(x_2)>\frac{-3-2\ln2}{4}$ 成立.

42．已知集合 P 的元素个数为 $3n\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 且元素均为正整数，若能够将集合 P 分成元素个数相同且两两没有公共元素的三个集合 A,B,C，即 $P=A\cup B\cup C$，$A\cap B=\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$B\cap C=\varnothing$，其中 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$，且满足 $c_1<c_2<\cdots<c_n$，$a_k+b_k=c_k$，$k=1,2,\cdots,n$，则称集合 P 为“完美集合”.

（Ⅰ）若集合 $P=\{1,2,3\}$，$Q=\{1,2,3,4,5,6\}$，判断集合 P 和集合 Q 是否为“完美集合”？并说明理由；

（Ⅱ）已知集合 $P=\{1,x,3,4,5,6\}$ 为“完美集合”，求正整数 x 的值；

（Ⅲ）设集合 $P=\{x|1\leqslant x\leqslant 3n,n\in\mathbf{N}^*\}$，证明：集合 P 为“完美集合”的一个必要条件是 $n=4k$ 或 $n=4k+1$.

【详解】(I) $P=\{1,2,3\}$ 是“完美集合”，此时，$A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$C=\{3\}$，

满足 $c_1<c_2<\cdots<c_n$，$a_k+b_k=c_k$.

$Q=\{1,2,3,4,5,6\}$ 不是“完美集合”，

若 Q 为“完美集合”，将 Q 分成 3 个集合，每个集合中有两个元素，则 $a_1+b_1=c_1$，

$a_2+b_2=c_2$.

Q 中所有元素之和为 21，$21\div 2=10.5$ 不符合要求.

(II) 由 (I) 可得 $x\neq 2$，

若 $A=\{1,3\}$，$B=\{4,6\}$，根据“完美集合”的定义，

则 $C=\{5,x\}$，$x=3+6=9$.

若 $A=\{1,4\}$，$B=\{5,3\}$，根据“完美集合”的定义，

则 $C=\{6,x\}$，$x=3+4=7$.

若 $A=\{1,5\}$，$B=\{6,3\}$，根据“完美集合”的定义，

则 $C=\{4,x\}$，$x=5+6=11$.

综上：正整数 x 的值为，9，7，11 中任一个.

(III) 设集合 P 中所有元素的和为 $1+2+3+\ldots+3n=\dfrac{3n(3n+1)}{2}$，

而 $a_1+b_1+c_1+a_2+b_2+c_2+\ldots+a_{3n}+b_{3n}+c_{3n}=2(c_1+c_2+c_3+c_{n-1}+\ldots+c_n)$，

因为 $c_n=3n$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $\dfrac{3n(3n+1)}{2}=2(c_1+c_2+c_3+c_{n-1}+\ldots+c_n)$，$\dfrac{3n(3n+1)}{4}=c_1+c_2+c_3+c_{n-1}+\ldots+c_n$，

$\dfrac{9n(n-1)}{4}=c_1+c_2+c_3+c_{n-1}$，

等号右边为正整数，

则等式左边 $9n(n-1)$ 可以被 4 整除，

所以 $n=4k$ 或 $n-1=4k$，

即 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ $(n\in N^*)$．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜
北京高考资讯