数 学 试 卷

2023．5

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A=\{-1,0,2\}$，$B=\{-1,1\}$，则集合 $A\cup B=$

(A) $\{-1\}$　(B) $\{-1,0,2\}$

(C) $\{-1,0,1,2\}$　(D) $\{0,2\}$

(2) 在 $(1-2x)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为

(A) 40　(B) -40　(C) 80　(D) -80

(3) 已知复数 $z=a+i(a\in\mathbf{R})$ 满足 $z\cdot\bar{z}=5$，则 a 的值为

(A) $\sqrt{6}$　(B) 2　(C) $\pm\sqrt{6}$　(D) ±2

(4) 已知函数 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-\dfrac{2}{x}$，则 $f(-1)=$

(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) -2

(5) 将函数 $y=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度，所得图象对应的函数

(A) 在区间 $[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递增　(B) 在区间 $[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递减

(C) 在区间 $[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}]$ 上单调递增　(D) 在区间 $[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}]$ 上单调递减

(6) 已知点 P 在直线 $\sqrt{3}x-y-10=0$ 上，点 $Q(2\cos\theta,2\sin\theta)(\theta\in\mathbf{R})$，则 $|PQ|$ 的最小值为

(A) 1　(B) 3　(C) 5　(D) 7

(7) 已知双曲线 C：$3mx^2-my^2=3$ 的一个焦点坐标为 $(-2,0)$，则双曲线 C 的离心率为

(A) $\dfrac{3}{2}$　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) 2　(D) 4

(8) 对于两个实数 a,b，设 $\min\{a,b\}=\begin{cases}b,a\geqslant b,\\a,a<b.\end{cases}$ 则"$t=1$"是"函数 $f(x)=\min\{|x|,|x-t|\}$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称" 的

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

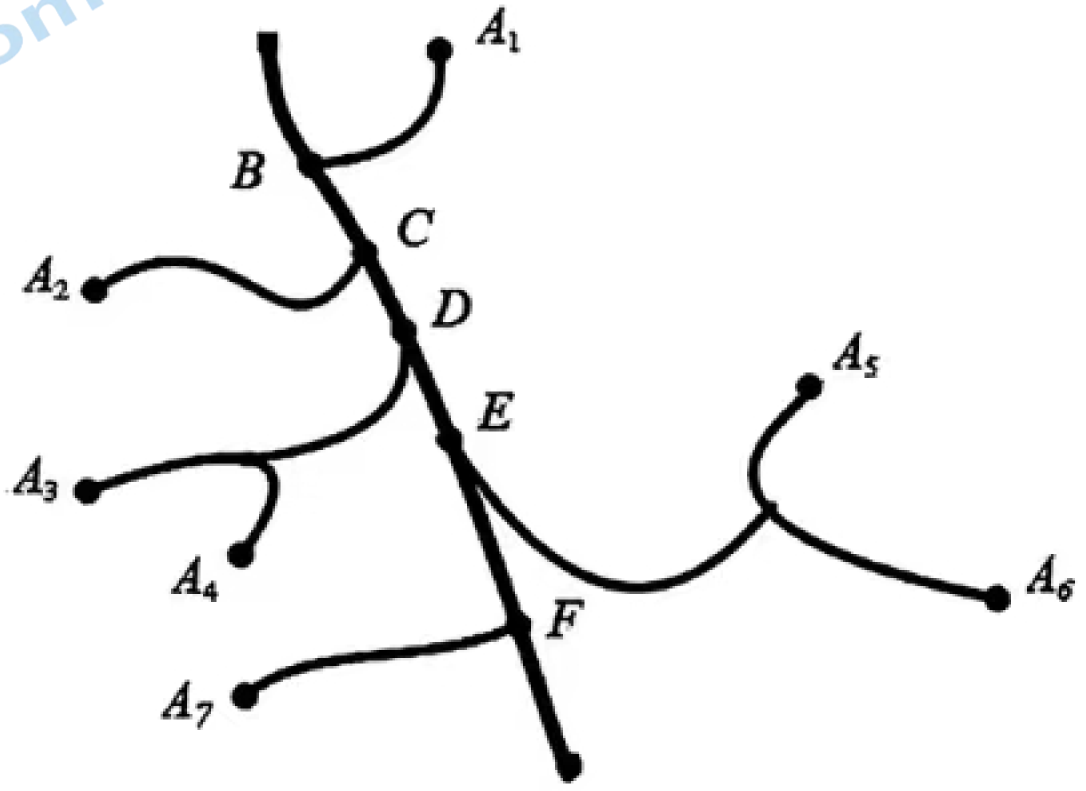
(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

(9) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则下列结论中一定成立的是

(A) 若 $a_6>0$，则 $S_{2n}<0$　　(B) 若 $a_6>0$，则 $S_{2n}>0$

(C) 若 $a_5>0$，则 $S_{2n+1}<0$　　(D) 若 $a_5>0$，则 $S_{2n+1}>0$

(10) 某市一个经济开发区的公路路线图如图所示，粗线是大公路，细线是小公路，七个公司 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$ 分布在大公路两侧，有一些小公路与大公路相连．现要在大公路上设一快递中转站，中转站到各公司（沿公路走）的距离总和越小越好，则这个中转站最好设在



(A) 路口 C　　(B) 路口 D　　(C) 路口 E　　(D) 路口 F

第二部分（非选择题　共 110 分）

、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

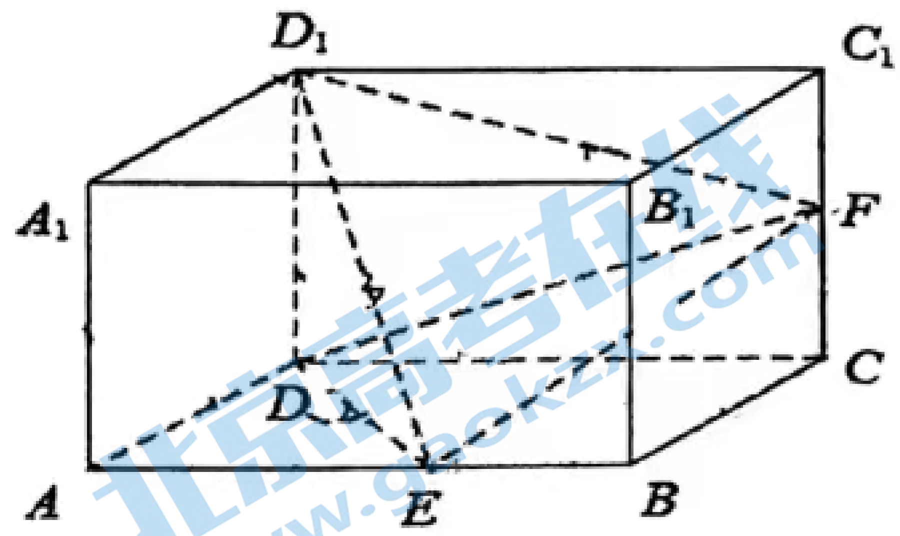
1) 3^{-2}，$2^{\frac{1}{3}}$，$\log_2 5$ 三个数中最大的数是________.

2) 已知抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上，且 M 在第一象限，则点 F 的坐标为________；若 $|MF|=3$，点 M 到直线 $x=-1$ 的距离为________.

3) 若函数 $f(x)=\cos x-A\sin x(A>0)$ 的最大值为 2，则 $A=$________，$f(x)$ 的一个对称中心为________.

) 已知点 A,B,C 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，且 $AB\perp BC$，若点 P 的坐标为 $(1,0)$，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$ 的取值范围是________

（15）如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=AD=1$，动点 E，F 分别在线段 AB 和 CC_1 上.



给出下列四个结论：

①$V_{D_1-DEF}=\dfrac{1}{3}$；

②$\triangle D_1EF$ 不可能是等边三角形；

③当 $D_1E\perp DF$ 时，$D_1F=EF$；

④至少存在两组 E，F，使得三棱锥 D_1-DEF 的四个面均为直角三角形.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

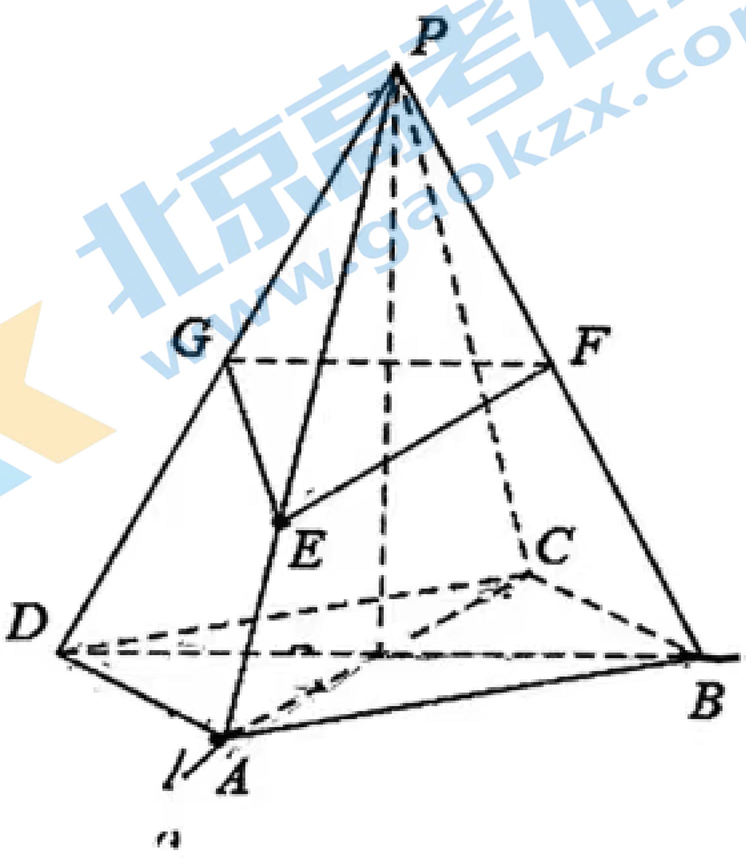
在 $\triangle ABC$ 中，$\sqrt{3}a=2b\sin A$.

（Ⅰ）求 $\angle B$；

（Ⅱ）若 $b=\sqrt{7}$，$c=3$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

（17）（本小题 13 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$AC\cap BD=O$，且 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$PO=2$，F，G 分别是 PB，PD 的中点，E 是 PA 上一点，且 $AP=3AE$.



（Ⅰ）求证：BD//平面 EFG；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线 PA 与平面 EFG 所成角的正弦值.

条件①：$BD=2\sqrt{3}$；

条件②：$\angle DAB=\dfrac{2\pi}{3}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答记分.

(18)（本小题 14 分）

2023 年 9 月 23 日至 2023 年 10 月 8 日，第 19 届亚运会将在中国杭州举行. 杭州某中学高一年级举办了“亚运在我心”的知识竞赛，其中 1 班，2 班，3 班，4 班报名人数如下：

班号	1	2	3	4
人数	30	40	20	10

该年级在报名的同学中按分层抽样的方式抽取 10 名同学参加竞赛，每位参加竞赛的同学从预设的 10 个题目中随机抽取 4 个作答. 至少答对 3 道的同学获得一份奖品. 假设每位同学的作答情况相互独立.

（Ⅰ）求各班参加竞赛的人数；

（Ⅱ）2 班的小张同学被抽中参加竞赛，若该同学在预设的 10 个题目中恰有 3 个答不对，记他答对的题目数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）若 1 班每位参加竞赛的同学答对每个题目的概率均为 $\frac{1}{3}$，求 1 班参加竞赛的同学中至少有 1 位同学获得奖品的概率.

(19)（本小题 15 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点到两个焦点的距离之和为 4，且右焦点为 $(1,0)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 A，B 分别为椭圆 C 的左、右顶点，P 为椭圆 C 上一点（不与 A，B 重合），直线 AP，BP 分别与直线 $x=4$ 相交于点 M，N. 当点 P 运动时，求证：以 MN 为直径的圆截 x 轴所得的弦长为定值.

(20)（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=kx-\ln(1+x)(k>0)$.

（Ⅰ）当 $k=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值，求 k 的取值范围；

（Ⅲ）如果存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得当 $x\in(0,x_0)$ 时，恒有 $f(x)<x^2$ 成立，求 k 的取值范围.

(21)（本小题 15 分）

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{k+1}-a_k|=1(k=1,2,3,\cdots,n-1(n\geqslant 2))$，则称数列 $\{a_n\}$ 为 η 数列. 记 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

（Ⅰ）写出一个满足 $a_1=a_5=1$，且 $S_5=5$ 的 η 数列；

（Ⅱ）若 $a_1=24$，$n=2000$，证明：η 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列的充要条件是 $a_n=2023$；

（Ⅲ）对任意给定的整数 $n(n\geqslant 3)$，是否存在首项为 1 的 η 数列 $\{a_n\}$，使得 $S_n=1$？如果存在，写出一个满足条件的 η 数列 $\{a_n\}$；如果不存在，说明理由.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。