北京市西城区 2017— 2018 学年度第一学期期末试卷

高二数学（理科）

2018.1

试卷满分：150 分　考试时间：120 分钟

题号	一	二	三						本卷总分
			15	16	17	18	19	20	
分数									

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1. 直线 $x+y+\sqrt{3}=0$ 的倾斜角为（　　）

（A）30　　（B）45　　（C）60　　（D）135

2. 命题“对任意 $x>3$，都有 $\ln x>1$”的否定是（　　）

（A）存在 $x>3$,使得 $\ln x>1$　　（B）对任意 $x>3$,都有 $\ln x\leqslant 1$

（C）存在 $x>3$,使得 $\ln x\leqslant 1$　　（D）对任意 $x\leqslant 3$,都有 $\ln x>1$

3. 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的焦点到其渐近线的距离为（　　）

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）2　　（D）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 设 α,β 是两个不同的平面，a,b,c 是三条不同的直线，（　　）

（A）若 $a\perp b$，$b\perp c$，则 $a//c$　　（B）若 $a//\alpha$，$b//\alpha$，则 $a//b$

（C）若 $a\perp b$，$a\perp\alpha$，则 $b//\alpha$　　（D）若 $a\perp\alpha$，$a\perp\beta$，则 $\alpha//\beta$

5. “$n>m>0$” 是“方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示的曲线为椭圆”的（　　）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

6. 设 α,β 是两个不同的平面，l 是一条直线，若 $l//\alpha$，$l//\beta$，$\alpha\quad\beta=m$，则（　　）

（A）l 与 m 平行　　（B）l 与 m 相交

（C）l 与 m 异面　　（D）以上三个答案均有可能

7. 设 O 为坐标原点，P 是以 F 为焦点的抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 上任意一点，M 是线段 PF 的中点，则直线 OM 的斜率的最大值为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	（B）1	（C）$\sqrt{2}$	（D）2

8. 设 α 为空间中的一个平面，记正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的八个顶点中到 α 的距离为 $d(d>0)$ 的点的个数为 m，m 的所有可能取值构成的集合为 M，则有（　　）

（A）$4\in M$，$6\notin M$	（B）$5\notin M$，$6\notin M$	（C）$4\notin M$，$6\in M$	（D）$5\notin M$，$6\in M$

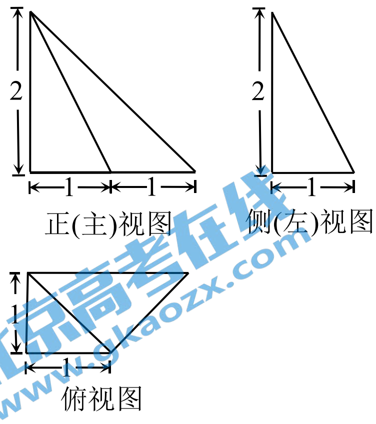
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.把答案填在题中横线上.

9. 命题“若 $a^2-b^2=0$，则 $a=b$”的逆否命题为_______.

10. 经过点 $M(2,1)$ 且与直线 $3x-y+8=0$ 垂直的直线方程为_______.

11. 在 ΔABC 中，$AB=3$，$BC=4$，$AB\perp BC$．以 BC 所在的直线为轴将 ΔABC 旋转一周，则旋转所得圆锥的侧面积为____.

12. 若双曲线 C 的一个焦点在直线 l: $4x-3y+20=0$ 上，一条渐近线与 l 平行，且双曲线 C 的焦点在 x 轴上，则 C 的标准方程为_______；离心率为_______.



13. 一个四棱锥的三视图如右图所示，那么在这个四棱锥的四个侧面三角形中，有_______个直角三角形.

14. 在平面直角坐标系中，曲线 C 是由到两个定点 $A(1,0)$ 和点 $B(-1,0)$ 的距离之积等于 $\sqrt{2}$ 的所有点组成的. 对于曲线 C，有下列四个结论：

① 曲线 C 是轴对称图形；

② 曲线 C 是中心对称图形；

③ 曲线 C 上所有的点都在单位圆 $x^2+y^2=1$ 内；

④ 曲线 C 上所有的点的纵坐标 $y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

其中，所有正确结论的序号是__________.

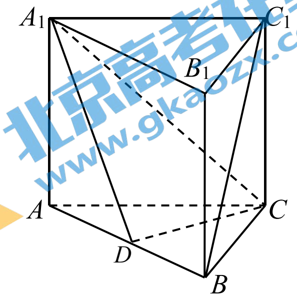
三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 AB 的中点.

（Ⅰ） 求证：$CD\perp$ 平面 ABB_1A_1；

（Ⅱ） 求证：$BC_1//$ 平面 A_1CD.



16.（本小题满分 13 分）

已知圆 C：$x^2+y^2-6x-8y+m=0$，其中 $m\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）如果圆 C 与圆 $x^2+y^2=1$ 相外切，求 m 的值；

（Ⅱ）如果直线 $x+y-3=0$ 与圆 C 相交所得的弦长为 $2\sqrt{7}$，求 m 的值.

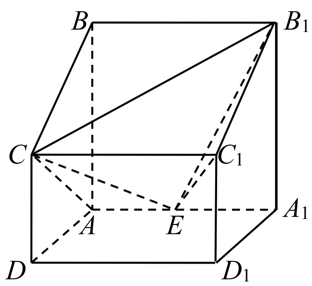
17.（本小题满分 13 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$AD=CD=1$，$AA_1=AB=2$，E 为 AA_1 的中点.

（Ⅰ）求四棱锥 $C-AEB_1B$ 的体积；

（Ⅱ）设点 M 在线段 C_1E 上，且直线 AM 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$，求线段 AM 的长度；

（Ⅲ）判断线段 B_1C 上是否存在一点 N，使得 $NE//CD$？（结论不要求证明）



18.（本小题满分 14 分）

设 F 为抛物线 C：$y^2=2x$ 的焦点，A,B 是抛物线 C 上的两个动点，O 为坐标原点.

（Ⅰ）若直线 AB 经过焦点 F，且斜率为 2，求 $|AB|$；

（Ⅱ）当 $OA\perp OB$ 时，证明：求 $|OA|\cdot|OB|$ 的最小值.

19.（本小题满分 14 分）

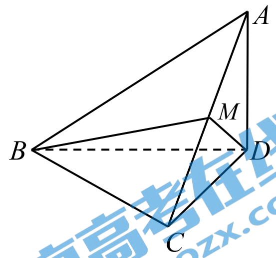
如图，在四面体 $A-BCD$ 中，$AD\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$，$BC=CD=AD=2$，M 为 AC 的中点.

（Ⅰ）求证：$BC\perp MD$；

（Ⅱ）求二面角 $B-MD-C$ 的余弦值.

（Ⅲ）求四面体 $A-BCD$ 的外接球的表面积.

（注：如果一个多面体的顶点都在球面上，那么常把该球称为多面体的外接球. 球的表面积 $S=4\pi R^2$）



20.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. 点 P 为圆 M：$x^2+y^2=13$ 上任意一点，O 为坐标原点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）记线段 OP 与椭圆 C 交点为 Q，求 $|PQ|$ 的取值范围；

（Ⅲ）设直线 l 经过点 P 且与椭圆 C 相切，l 与圆 M 相交于另一点 A，点 A 关于原点 O 的对称点为 B，试判断直线 PB 与椭圆 C 的位置关系，并证明你的结论.

北京市西城区 2017 — 2018 学年度第一学期期末试卷

高二数学（理科）参考答案及评分标准

2018.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. D　　2. C　　3. A　　4. D　　5. A　　6. A　　7. B　　8. D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 若 $a \neq b$，则 $a^2 - b^2 \neq 0$　　10. $x + 3y - 5 = 0$　　11. 15π

12. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$，$\dfrac{5}{3}$　　13. 4　　14. ①②

注：第 12 题第一空 3 分，第二空 2 分；第 14 题多选、少选或错选均不得分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）**证明**：因为正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$，D 为 AB 的中点，

所以 $CD \perp AB$，$AA_1 \perp$ 底面 ABC. ……………………1 分

又因为 $CD \subset$ 底面 ABC，

所以 $AA_1 \perp CD$. ……………………3 分

又因为 $AA_1 \quad AB = A$，$AB \subset$ 平面 ABB_1A_1，$AA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $CD \perp$ 平面 ABB_1A_1. ……………………6 分

（Ⅱ）**证明**：如图，连接 AC_1，设 $A_1C \quad AC_1 = O$，连接 OD， ……………………7 分

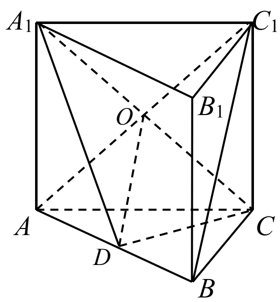
由正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$，得 $AO = OC_1$，

又因为在 ΔABC_1 中，$AD = DB$，

所以 $OD // BC_1$， ……………………10 分

又因为 $BC_1 \not\subset$ 平面 A_1CD，$OD \subset$ 平面 A_1CD，

所以 $BC_1 //$ 平面 A_1CD. ……………………13 分



16.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）**解**：将圆 C 的方程配方，得 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 - m$， ……………………1 分

所以圆 C 的圆心为 $(3,4)$，半径 $r=\sqrt{25-m}$ $(m<25)$.　　　　…………………3 分

因为圆 C 与圆 $x^2+y^2=1$ 相外切，

所以两圆的圆心距等于其半径和，即 $\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=1+\sqrt{25-m}$，　…………5 分

解得 $m=9$.　　　　…………………7 分

（Ⅱ）**解**：圆 C 的圆心到直线 $x+y-3=0$ 的距离 $d=\dfrac{|3+4-3|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.　…………………9 分

因为直线 $x+y-3=0$ 与圆 C 相交所得的弦长为 $2\sqrt{7}$，

所以由垂径定理，可得 $r^2=25-m=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{7})^2$，　　　　…………………11 分

解得 $m=10$.　　　　…………………13 分

17.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）**解**：因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$， $AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AA_1\perp AD$.

又因为 $AB\perp AD$， $AA_1 \quad AB=A$，

所以 $AD\perp$ 平面 ABB_1A_1.　　　　…………………1 分

因为 $AB//CD$，

所以四棱锥 $C-AEB_1B$ 的体积 $V_{C-AEB_1B}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{四边形AEB_1B}\cdot AD$　…………………2 分

$$=\frac{1}{3}\times[\frac{1}{2}\times(1+2)\times 2]\times 1=1.$$　……………4 分

（Ⅱ）**解**：由 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$， $AB\perp AD$，可得 AD， AA_1， AB 两两垂直，所以分别以 AD， AA_1， AB 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴，如图建立空间直角坐标系，…………5 分

则 $A(0,0,0)$， $B(0,0,2)$， $C(1,0,1)$， $E(0,1,0)$， $C_1(1,2,1)$.

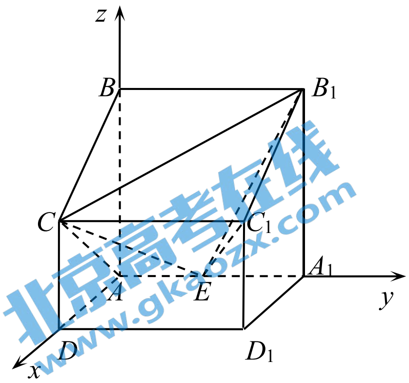
所以 $AE=(0,1,0)$， $EC_1=(1,1,1)$， $BC=(1,0,-1)$， $CC_1=(0,2,0)$.

设平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由 $\boldsymbol{m}\cdot BC=0$， $\boldsymbol{m}\cdot CC_1=0$， 得 $\begin{cases}x-z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$.　　　　…………………7 分

设 $EM = \lambda EC_1 = (\lambda,\lambda,\lambda)$，其中 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，



则 $AM = AE + EM = (\lambda, \lambda+1, \lambda)$，

记直线 AM 与平面 BCC_1B_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta = |\cos < AM, \boldsymbol{m} >| = \dfrac{2\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+2\lambda+1}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3}$，

解得 $\lambda = -\dfrac{1}{5}$（舍），或 $\lambda = \dfrac{1}{3}$. ………………9 分

所以 $AM = (\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3})$，

故线段 AM 的长度为 $|AM| = \sqrt{2}$. ……………………10 分

（III）**答**：对于线段 B_1C 上任意一点 N，直线 NE 与直线 CD 都不平行. ……………13 分

18.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）**解**：由题意，得 $F(\dfrac{1}{2},0)$，则直线 AB 的方程为 $y = 2(x-\dfrac{1}{2})$. ……………………2 分

由 $\begin{cases} y = 2(x-\dfrac{1}{2}), \\ y^2 = 2x, \end{cases}$ 消去 y，得 $4x^2-6x+1=0$. ……………………3 分

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $\Delta > 0$，且 $x_1+x_2 = \dfrac{3}{2}$，$x_1x_2 = \dfrac{1}{4}$，……………………4 分

所以 $|AB| = \sqrt{5}\,|x_1-x_2| = \sqrt{5}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = \dfrac{5}{2}$. ……………………6 分

（Ⅱ）**解**：因为 A,B 是抛物线 C 上的两点，所以设 $A(\dfrac{t^2}{2},t)$，$B(\dfrac{s^2}{2},s)$，

由 $OA \perp OB$，得 $OA\cdot OB = \dfrac{(st)^2}{4}+st = 0$，……………………8 分

所以 $st=-4$，即 $s = -\dfrac{4}{t}$.

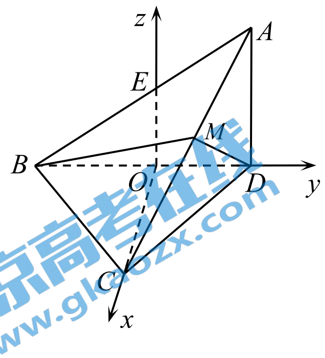
则点 B 的坐标为 $B(\dfrac{8}{t^2}, -\dfrac{4}{t})$. ……………………10 分

所以 $|OA|\cdot|OB| = \sqrt{\dfrac{t^4}{4}+t^2}\cdot\sqrt{\dfrac{64}{t^4}+\dfrac{16}{t^2}} = \sqrt{32+4t^2+\dfrac{64}{t^2}} \geqslant 8$，……………………12 分

当且仅当 $t=\pm 2$ 时，等号成立.

所以 $|OA|\cdot|OB|$ 的最小值为 8. ……………………13 分

19.（本小题满分 14 分）



（Ⅰ）**证明**：因为 $AD\perp$平面 BCD， $BC\subset$平面 BCD，

所以 $AD\perp BC$．　　　　　　　　　　　　……………………1 分

又因为 $BC\perp CD$， $AD\cap CD=D$，

所以 $BC\perp$平面 ACD．　　　　　　　　……………………3 分

又因为 $MD\subset$平面 ACD，

所以 $BC\perp MD$．　　　　　　　　　　　　……………………4 分

（Ⅱ） **解**：如图，设 BD 的中点为 O， AB 的中点为 E， 连接 OC， OE，

因为 $AD\perp$平面 BCD，

所以 $EO\perp$平面 BCD，

由 $BC\perp CD$，且 $BC=CD$，可得 OC， OD， OE 两两垂直，所以分别以 OC， OD，OE 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴，如图建立空间直角坐标系，　　　　……………………5 分

则 $A(0,\sqrt{2},2)$， $B(0,-\sqrt{2},0)$， $C(\sqrt{2},0,0)$， $D(0,\sqrt{2},0)$， $M(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1)$．

所以 $DM=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$， $BD=(0,2\sqrt{2},0)$， $CD=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$．

设平面 BMD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由 $\boldsymbol{m}\cdot DM=0$， $\boldsymbol{m}\cdot BD=0$， 得 $\begin{cases}\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2z=0,\\ 2\sqrt{2}y=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{2}$， 得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},0,-1)$．　　　　　　　　……………………7 分

设平面 CMD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\boldsymbol{n}\cdot DM=0$， $\boldsymbol{n}\cdot CD=0$， 得 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}y_1+2z_1=0,\\ -\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$， 得 $\boldsymbol{n}=(1,1,0)$．　　　　　　　　　……………………8 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

由图可知，二面角 $B-MD-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．　　　　……………………10 分

（Ⅲ）**解**：根据（Ⅱ），记 AB 的中点为 E，

由题意， ΔABD 为直角三角形，斜边 $AB=2\sqrt{3}$，

所以 $EA=EB=ED=\sqrt{3}$.　　　　　　　　　　　　　　…………………12 分

由（Ⅰ），得 $BC\perp$ 平面 ACD，

所以 $BC\perp AC$.

在直角 ΔABC 中，E 为斜边 AB 的中点，

所以 $EA=EB=EC$.

所以 E 为四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心，

故四面体 $A-BCD$ 的外接球的表面积 $S=4\pi\cdot EA^2=12\pi$.　　　　…………………14 分

20.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）**解**：由题意，知 $c=\sqrt{5}$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，　　　　　　…………………1 分

所以 $a=3$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=2$，　　　　　　　　　　　…………………2 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.　　　　　　　…………………3 分

（Ⅱ）**解**：由题意，得 $|PQ|=|OP|-|OQ|=\sqrt{13}-|OQ|$.　　　　　…………………4 分

设 $Q(x_1,y_1)$，则 $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1$.

所以 $|OQ|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+(4-\frac{4}{9}x_1^2)}=\sqrt{4+\frac{5}{9}x_1^2}$，　　…………………5 分

因为 $x_1\in[-3,3]$，

所以当 $x_1=0$ 时，$|OQ|_{\min}=2$；当 $x_1=\pm3$ 时，$|OQ|_{\max}=3$.　　…………………6 分

所以 $|PQ|\in[\sqrt{13}-3,\sqrt{13}-2]$.　　　　　　　　　　…………………7 分

（Ⅲ）**结论**：直线 PB 与椭圆 C 相切.　　　　　　　　　　…………………8 分

证明：由题意，点 B 在圆 M 上，且线段 AB 为圆 M 的直径，

所以 $PA\perp PB$.

当直线 $PA\perp x$ 轴时，易得直线 PA 的方程为 $x=\pm3$，

由题意，得直线 PB 的方程为 $y=\pm2$，

显然直线 PB 与椭圆 C 相切.

同理当直线 $PA/\!/x$ 轴时，直线 PB 也与椭圆 C 相切.　　　　　…………………9 分

当直线 PA 与 x 轴既不平行也不垂直时，

设点 $P(x_0,y_0)$，直线 PA 的斜率为 k，则 $k\neq 0$，直线 PB 的斜率 $-\dfrac{1}{k}$，

所以直线 PA：$y-y_0=k(x-x_0)$，直线 PB：$y-y_0=-\dfrac{1}{k}(x-x_0)$， …………10 分

由 $\begin{cases} y-y_0=k(x-x_0), \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 消去 y，

得 $(9k^2+4)x^2+18(y_0-kx_0)kx+9(y_0-kx_0)^2-36=0$.

因为直线 PA 与椭圆 C 相切，

所以 $\Delta_1=[18(y_0-kx_0)k]^2-4(9k^2+4)[9(y_0-kx_0)^2-36]=0$，

整理，得 $\Delta_1=-144[(x_0^2-9)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-4]=0$. （1） ……………12 分

同理，由直线 PB 与椭圆 C 的方程联立，

得 $\Delta_2=-144[(x_0^2-9)\dfrac{1}{k^2}+2x_0y_0\dfrac{1}{k}+y_0^2-4]$. （2）

因为点 P 为圆 M：$x^2+y^2=13$ 上任意一点，

所以 $x_0^2+y_0^2=13$，即 $y_0^2=13-x_0^2$.

代入（1）式，得 $(x_0^2-9)k^2-2x_0y_0k+(9-x_0^2)=0$，

代入（2）式，得

$$\begin{aligned}\Delta_2&=-\frac{144}{k^2}[(x_0^2-9)+2x_0y_0k+(y_0^2-4)k^2]\\&=-\frac{144}{k^2}[(x_0^2-9)+2x_0y_0k+(9-x_0^2)k^2]\\&=\frac{144}{k^2}[(x_0^2-9)k^2-2x_0y_0k+(9-x_0^2)]\\&=0.\end{aligned}$$

所以此时直线 PB 与椭圆 C 相切.

综上，直线 PB 与椭圆 C 相切. …………………14 分