2023—2024学年(下)高三年级开学质量检测

数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|\sqrt{x-1}<3\}$，$B=\{x|5\leqslant x\leqslant 12\}$，则 $A\cap B=$

A. $(5,10)$　　B. $(1,12)$　　C. $[5,10)$　　D. $[1,12)$

2. 已知复数 $z=-1+\mathrm{i}$，$z-a\bar{z}=-6+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $b=$

A. -5　　B. -4　　C. -3　　D. -1

3. "$3<m<11$"是"方程 $\dfrac{x^2}{11-m}+\dfrac{y^2}{m-3}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知圆台的母线长为 $2\sqrt{37}$，上、下底面的直径分别为6和10，则该圆台的体积为

A. 184π　　B. 188π　　C. 192π　　D. 196π

5. 已知 $a=\log_3 7$，$b=\log_9 36$，$c=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-0.5}$，则

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

6. 已知 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\tan 2\theta=\dfrac{12}{5}$，则 $\dfrac{\sin 2\theta-\cos^2\theta}{\cos 2\theta+4\sin^2\theta}=$

A. $-\dfrac{16}{31}$　　B. $-\dfrac{1}{7}$　　C. $\dfrac{1}{7}$　　D. $\dfrac{16}{31}$

7. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$，则 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值为

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x)=mx^2-x\ln x$ 存在极小值点 x_0，且 $f(x_0)<-\mathrm{e}^3$，则实数 m 的取值范围为

A. $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$　　D. $\left(0,\dfrac{2}{\mathrm{e}^3}\right)$

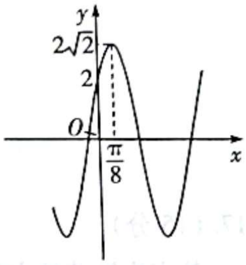
二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知$\left(\frac{1}{x}-2x^2\right)^n$的展开式中，各项的二项式系数之和为 128，则

A. $n=7$ B. 只有第 4 项的二项式系数最大

C. 各项系数之和为 1 D. x^5 的系数为 560

10. 已知函数$f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则



A. $\varphi=\frac{\pi}{4}$

B. $f(x)$图象的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},0\right),k\in\mathbf{Z}$

C. $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上的值域为$[-2\sqrt{2},2]$

D. 将$f(x)$的图象向左平移$\frac{5\pi}{8}$个单位长度后得$g(x)=-2\sqrt{2}\sin 2x$ 的图象

11. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$ABCD$ 是矩形，$AD\perp SD$，$\angle SDC=120°$，$SD=CD=2BC=2$，P 为棱 SB 上一点，则下列结论正确的是

A. 点 C 到平面 SAD 的距离为$\sqrt{3}$

B. 若 $SP=PB$，则过点 A,D,P 的平面 α 截此四棱锥所得截面的面积为$\frac{3}{2}$

C. 四棱锥 $S-ABCD$ 外接球的表面积为 17π

D. 直线 AP 与平面 SCD 所成角的正切值的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_3a_4a_5=-8$，$a_9=64$，则 $a_5=$_________.

13. 某工厂由甲、乙两条生产线来生产口罩，产品经过质检后分为合格品和次品，已知甲生产线的次品率为 4%，乙生产线的次品率为 7%，且甲生产线的产量是乙生产线产量的 2 倍. 现在从该工厂生产的口罩中任取一件，则取到合格品的概率为_________.

14. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，过点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，点 A,B 在直线 l 上的射影分别为 A_1,B_1 两点，以线段 A_1B_1 为直径的圆 C 与 y 轴交于 M,N 两点，且$|MN|=\frac{4}{5}|AB|$，则直线 AB 的斜率为_________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=3$，$na_{n+1}=2S_n+3n$.

（Ⅰ）证明：$a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$；

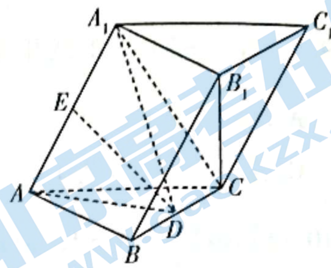
（Ⅱ）若$\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{3^{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

16. (15 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,D,E 分别是棱 BC,AA_1 的中点.

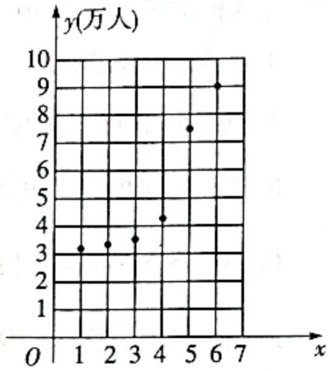
(Ⅰ)在棱 BB_1 上找一点 F,使得平面 DEF // 平面 A_1B_1C,并证明你的结论;

(Ⅱ)若 $AA_1=\sqrt{3}$,$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形,$A_1D=AD$,$BC\perp DE$,求二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 的正弦值.



17. (15 分)

某市为繁荣地方经济,大力实行人才引进政策,为了解政策的效果,统计了 2018—2023 年人才引进的数量 y(单位:万人),并根据统计数据绘制了如图所示的散点图(x 表示年份代码,年份代码 1—6 分别代表 2018—2023 年).



(Ⅰ)根据散点图判断 $y=b\ln x+a$ 与 $y=e^{c+dx}$(a,b,c,d 均为常数)哪一个适合作为 y 关于 x 的回归方程类型;(给出结论即可,不必说明理由)

(Ⅱ)根据(Ⅰ)的结果及表中的数据,求出 y 关于 x 的回归方程,并预测该市 2025 年引进人才的数量;

(Ⅲ)从这 6 年中随机抽取 4 年,记引进人才数量超过 4 万人的年数为 X,求 X 的分布列和数学期望.

参考数据:

$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(w_i-\bar{w})$
5.15	1.55	17.5	20.95	3.85

其中 $\bar{w}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}w_i$,$w_i=\ln y_i$,$e^{2.44}\approx 11.47$,$e^{2.54}\approx 12.68$.

参考公式:对于一组数据 (u_1,v_1),(u_2,v_2),$\cdots$,(u_n,v_n),其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为:$\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$,$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

18. (17 分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，左、右顶点分别为 A_1,A_2，点 $B(0,1)$，且$\triangle A_1BA_2$ 的面积为 2.

(Ⅰ)求 C 的方程;

(Ⅱ)若过点 B 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 M,N 两点，直线 A_1M,A_2N 交于点 P，直线 l 与 x 轴交于点 Q，O 为坐标原点，证明:$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$为定值.

19. (17 分)

已知函数 $f(x)=(mx^2-x+1)e^{-x}$.

(Ⅰ)当 $m\geqslant 0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ)若函数 $g(x)=e^x+f(x)e^x-2$ 恰有两个零点，求实数 m 的取值范围.