2023 北京一六一中高二 12 月月考

数　　学

2023.12

班级__________姓名__________学号__________

本试卷共 2 页，共 120 分.考试时长 90 分钟.考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效.

一、选择题：本大题共 10 道小题，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求.把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1. 椭圆 $\frac{y^2}{5}+\frac{x^2}{4}=1$ 的焦点坐标是（　）

A. $(1,0)$，$(-1,0)$　　B. $(0,1)$，$(0,-1)$

C. $(3,0)$，$(-3,0)$　　D. $(0,3)$，$(0,-3)$）

2. 在空间直角坐标系中，$A(1,-2,-3)$，$B(-1,-1,-1)$，$C(0,0,-5)$，则 $\triangle ABC$ 是（　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 形状不确定

3. 已知抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点 F 到准线的距离为 4，若抛物线上一点 P 到 y 轴的距离是 1，则$|PF|$等于（　　）

A.2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

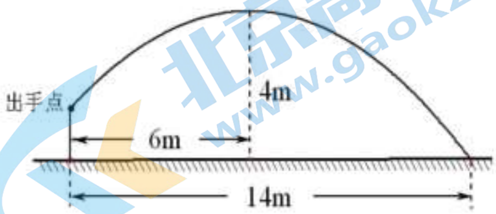
4. 直线 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$ 截圆 $x^2+y^2=4$ 得到的劣弧所对的圆心角的大小为（　）

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

5. 双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$，则双曲线离心率为（　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{15}}{3}$　　B. $\frac{5}{4}$ 或 $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. 2

6. 如图，一位运动员投掷铅球的成绩是 14m，当铅球运行的水平距离是 6m 时，达到最大高度 4m.若铅球运行的路线是抛物线，则铅球出手时距地面的高度是（　）



A. 2.25m　　B. 2.15m　　C. 1.85m　　D. 1.75m

7. “$k=\pm 1$”是“直线$kx-y+k=0$与抛物线$y^2=4x$有唯一公共点”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

8. 将正方形$ABCD$沿对角线折成直二面角$A-BD-C$，以下结论中错误的是（　）

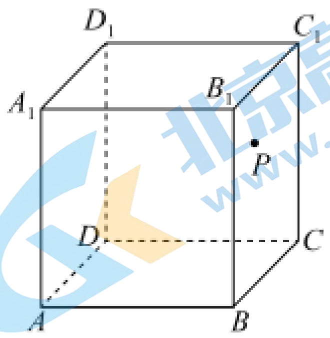
A. $AC\perp BD$　　B. $\triangle ACD$是等边三角形

C. AB与平面BCD所成的角为$60°$　　D. AB与CD所成的角为$60°$

9. 若曲线C：$x^2+y^2+2ax-4ay+5a^2-4=0$上所有的点均在第二象限内，则a的取值范围为（　）

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,-1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

10. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P是侧面BB_1C_1C内一动点，若P到直线BC与直线C_1D_1的距离相等，则动点P的轨迹是（　）



A. 直线　　B. 圆

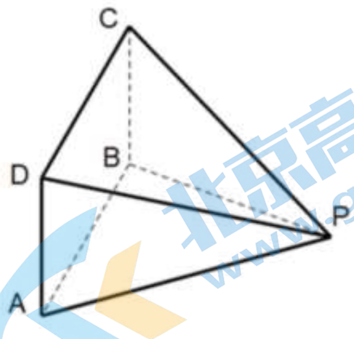
C. 双曲线　　D. 抛物线

二、填空题：本大题共5小题，共25分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

11. 点$(2,3)$关于直线$y=x+3$的对称点坐标为____________.

12. 已知F_1，F_2为椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$的两个焦点，过$F_1$的直线交椭圆于$A$，$B$两点，$|AB|=6$，则$|AF_2|+|BF_2|=$____________.

13. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PAB\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$为矩形，$AD:AB=1:2$，$\triangle PAB$为等边三角形，则直线PD与平面$ABCD$所成角的正弦值为____________.



14. 已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{m}=1(m>0)$的一个焦点到它的一条渐近线的距离为$\sqrt{2}$，则$m=$________；

若双曲线C_1与C不同，且与C有相同的渐近线，则C_1的方程可以为__________.（写出一个答案即可）

15. 曲线C是平面内与定点$F(2,0)$和定直线$x=-2$的距离的积等于4的点的轨迹，给出下列四个命题：

①曲线C过坐标原点；

②曲线C关于x轴对称；

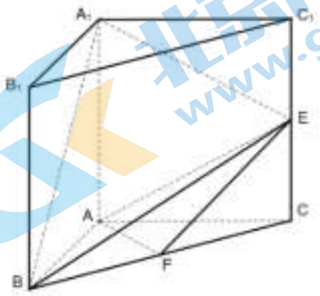
③曲线C与y轴有3个交点；

④若点M在曲线C上，则$|MF|$的最小值是$2\sqrt{2}-2$；

其中，所有正确结论的序号是________.

三、解答题：本大题共4小题，共55分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程，并把答案写在答题纸中相应位置上.

16. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AC=AA_1=2$，$\angle BAC=90°$，E，F分别为CC_1，BC的中点.



（1）求异面直线A_1B与EF所成角的余弦值；

（2）求点B_1到平面AEF的距离；

（3）求二面角B_1-A_1B-E的余弦值.

17. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点是$F_1$，$F_2$，且$|F_1F_2|=2$，离心率为$\frac{1}{2}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）若椭圆C与直线$y=x+m$交于M，N两点，且$|MN|=\frac{12\sqrt{2}}{7}$，求实数$m$的值.

18. 已知圆C：$x^2+y^2+2x-4y+3=0$.

（1）求圆心C的坐标及半径的大小；

（2）已知直线l与圆C相切，且在x，y轴上的截距相等且不为0，求直线l的方程；

（3）从圆C外一点$P(x,y)$向圆引一条切线，切点为M，O为坐标原点，且有$|MP|=|OP|$，求点P的轨迹方程.

19. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$（1，0），短轴长为2.直线$l$过点$F$且不平行于坐标轴，$l$与$C$有两个交点$A$，$B$，线段$AB$的中点为$M$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

（3）延长线段 OM 与椭圆 C 交于点 P，若四边形 $OAPB$ 为平行四边形，求此时直线 l 的斜率.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 道小题，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求.把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1.【答案】B

【分析】先根据椭圆的标准方程判断焦点的位置；再根据a，b，c关系求出c即可写出焦点坐标.

【详解】由椭圆$\frac{y^2}{5}+\frac{x^2}{4}=1$可得：椭圆的焦点在$y$轴上，$a^2=5$，$b^2=4$.

则$c^2=a^2-b^2=1$，即$c=1$.

所以椭圆的焦点坐标为：$(0,1)$，$(0,-1)$.

故选：B

2.【答案】B

【分析】根据空间中两点距离公式即可求解长度，进而可判断.

【详解】由$A(1,-2,-3)$，$B(-1,-1,-1)$，$C(0,0,-5)$，

可得$|AB|=\sqrt{(1+1)^2+(-2+1)^2+(-3+1)^2}=3,|AC|=\sqrt{(1-0)^2+(-2-0)^2+(-3+5)^2}=3$，

$|CB|=\sqrt{(-1-0)^2+(-1-0)^2+(-1+5)^2}=3\sqrt{2}$，

故$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2,|AB|=|AC|$，

因此$\triangle ABC$是等腰直角三角形，

故选：B

3.【答案】B

【分析】由题意可得$p=4$，再结合抛物线的定义可求出$|PF|$

【详解】因为抛物线$y^2=2px$（$p>0$）的焦点F到准线的距离为 4，

所以$p=4$，

所以抛物线的焦点$F(2,0)$，准线方程为$x=-2$，

因为抛物线上一点P到y轴的距离是 1，

所以点P到准线的距离为 3，

所以由抛物线的定义可得$|PF|=3$，

故选：B

4.【答案】D

【分析】由圆的标准方程找出圆心坐标和半径r，利用点到直线的距离公式求出圆心C到已知直线的距离d，由垂径定理及勾股定理求出直线被圆截得的弦长，即可根据等边三角形求解.

【详解】过O作$OC\perp AB$，垂足为点C，

由圆的方程 $x^2+y^2=4$，得到圆心 O 的坐标为 $(0,0)$，半径 $r=2$，

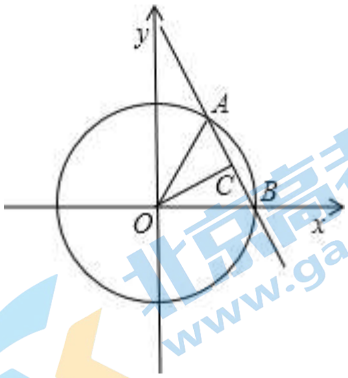
$\because$ 圆心到直线 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$ 的距离 $\dfrac{|\sqrt{3}\times 0+0-2\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 直线被圆截得的弦 $|AB|=2\sqrt{4-3}=2$，

$\therefore |AB|=|OA|=|OB|=2$，

$\therefore \angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，

故选：D.



5.【答案】B

【分析】根据焦点位置，分两种情况即可根据渐近线方程以及离心率公式求解.

【详解】设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，故 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$，

离心率为 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{5}{4}$，

设双曲线方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$，则渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{a}{b}x$，故 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$，

离心率为 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{5}{3}$，

故选：B

6.【答案】D

【分析】建立坐标系，根据题意可设抛物线方程为 $y=a(x-6)^2+4$，其中 $a<0$，再根据点 $B(14,0)$ 在抛物线上，代入抛物线方程，得到该抛物线方程，令 $x=0$，可得结论.

【详解】以该运动员脚所在的水平线为 x 轴，该运动员所处位置的铅垂线为 y 轴，建立坐标系如图.

$\because$ 铅球运行的水平距离是 6m 时，达到最大高度 4m，

$\therefore$ 该抛物线的顶点坐标是 $(6,4)$，开口向下，

设抛物线方程为 $y=a(x-6)^2+4$，其中 $a<0$，

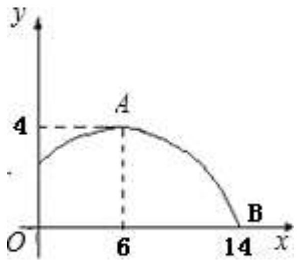
$\because$ 运动员投掷铅球的成绩是 14m，所以点 $B(14,0)$ 在抛物线上，

$\therefore 0=a(14-6)^2+4$，可得 $a=-\dfrac{1}{16}$

因此，抛物线方程为 $y=-\dfrac{1}{16}(x-6)^2+4$，

令 $x=0$，则 $y=-\dfrac{1}{16}\times 36+4=1.75$

故选：D.



7.【答案】A

【分析】联立 $kx-y+k=0$ 与 $y^2=4x$，分 $k=0$ 与 $k\neq 0$ 两种情况，结合根的判别式得到 $k=0$ 或 ± 1，从而求出答案.

【详解】联立 $kx-y+k=0$ 与 $y^2=4x$ 得，$k^2x^2+\left(2k^2-4\right)x+k^2=0$，

当 $k=0$ 时，$-4x=0$，只有一个根，满足要求，

当 $k\neq 0$ 时，令 $\Delta=\left(2k^2-4\right)^2-4k^4=0$，解得 $k=\pm 1$，

故直线 $kx-y+k=0$ 与抛物线 $y^2=4x$ 有唯一公共点”时，$k=0$ 或 ± 1，

故 $k=\pm 1$ 是“直线 $kx-y+k=0$ 与抛物线 $y^2=4x$ 有唯一公共点”的充分不必要条件.

故选：A

8.【答案】C

【分析】根据直二面角可得面面垂直，即可根据线面垂直求解 A,根据长度关系即可求解 B，根据线面垂直得线面角的几何角，即可求解 C，根据平行关系以及线线角的定义即可求解 D.

【详解】如图，其中二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $90°$，

O 是 BD 的中点，则 $AO\perp BD$，$CO\perp BD$，

$\therefore$ 直二面角 $A-BD-C$ 的平面角 $\angle AOC=90°$，

对于 A，$\because AO\perp BD$，$CO\perp BD$，$AO\cap CO=O$，$AO\subset$ 平面 AOC，$CO\subset$ 平面 AOC，

$\therefore BD\perp$ 平面 AOC，$\because AC\subset$ 平面 AOC，$\therefore AC\perp BD$，故 A 正确;

对于 B，设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，在直角 $\triangle AOC$ 中，$AO=BO=\sqrt{2}$，

$\therefore AC=\sqrt{2+2}=2$，$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形，故 B 正确;

对于 D，可取 AD 中点 F，AC 的中点 H，

连接 OF，OH，FH，设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，由于 $OF//AB, HF//CD$，所以

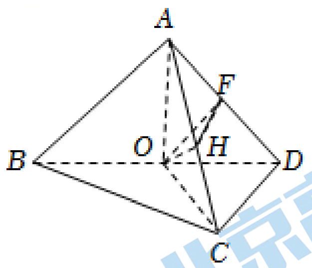
$OF=HF=\frac{1}{2}AB=1$，而 $OH=\frac{1}{2}AC=1$，

故$\triangle OFH$ 是等边三角形，$\angle OFH$ 即为 AB 与 CD 所成的角,由于$\angle OFH=60°$，所以 AB 与 CD 所成角为 $60°$，故 D 正确.

对于 C，由于平面 $ABD\perp$平面 BCD，且交线为 BD，$AO\perp BD, AO\subset$平面 ABD，所以 $AO\perp$平面 BCD,故 AB 与平面 BCD 所成的线面角的平面角是$\angle ABO=45°$，

故 AB 与平面 BCD 成$60°$的角不正确，故 C 错误.

故选：C



9. 【答案】D

【分析】根据曲线方程可判断出曲线C是圆心为$(-a,2a)$，半径为 2 的圆，根据圆的位置可得关于 a 的不等式组，解不等式组求得结果.

【详解】由题意，曲线 C 的标准方程为：$(x+a)^2+(y-2a)^2=4$

因此曲线 C 为圆心为$(-a,2a)$，半径为 2 的圆

$\because$曲线C上所有的点均在第二象限内　$\therefore\begin{cases}-a<-2\\2a>2\end{cases}$，解得：$a>2$

$\therefore a$的取值范围是$(2,+\infty)$

故选：D

10. 【答案】D

【分析】由于 P 在平面 BC_1 内，而 $C_1D_1\perp$平面 BC_1，因此有 $PC_1\perp C_1D_1$，这样结合抛物线的定义可得结论.

【详解】在正方体中，一定有 $PC_1\perp C_1D_1$，$\therefore P$ 点为平面 BC_1 内到直线 BC 和到点 C_1 的距离相等的点，其轨迹为抛物线.

故选 D.

【点睛】本题考查抛物线的定义，考查立体几何中的垂直关系．属于跨章节综合题，难度不大.

二、填空题：本大题共 5 小题，共 25 分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

11. 【答案】$(0,5)$

【分析】根据中点关系以及垂直斜率关系即可求解.

【详解】设点$(2,3)$关于直线$y=x+3$的对称点坐标为(a,b)，

则$\begin{cases}\dfrac{b-3}{a-2}=-1\\ \dfrac{b+3}{2}=\dfrac{a+2}{2}+3\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=0\\ b=5\end{cases}$，

所以对称点为$(0,5)$，

故答案为：$(0,5)$

12.【答案】14

【分析】根据焦点三角形的周长即可求解.

【详解】椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$中，$a=5$，

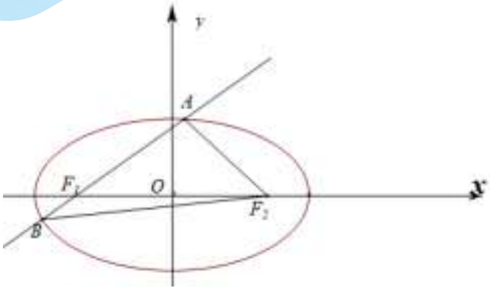
$\because F_1$，F_2为椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$的两个焦点，过$F_1$的直线交椭圆于A，$B$两点，

$\therefore$由椭圆定义知：$|AB|+|AF_2|+|BF_2|=4a=20$，

$\because |AB|=6$，

$\therefore |AF_2|+|BF_2|=20-6=14$.

故答案为：14



13.【答案】$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$##$\dfrac{1}{5}\sqrt{15}$

【分析】根据面面垂直可得线面垂直，即可根据线面角的定义找到其平面角，结合三角形的边角关系即可求解.

【详解】取AB中点为O，连接PO,DO，

由于$\triangle PAB$是等边三角形，所以$PO\perp AB$

因为平面$PAB\perp$平面$ABCD$，其交线为AB，$PO\subset$平面PAB，

所以$PO\perp$平面$ABCD$，$\angle PDO$是直线PD与平面$ABCD$所成角.

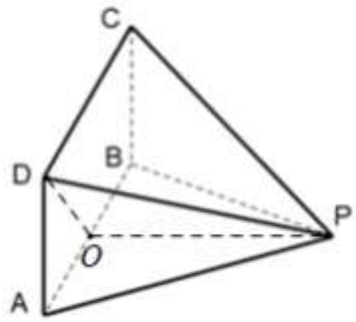
不妨设$AD=1,AB=2$，

在等边$\triangle PAB$中，$PO=\sqrt{3}$，$DO=\sqrt{AD^2+DO^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，所以$DP=\sqrt{DO^2+OP^2}=\sqrt{5}$，

故$\tan\angle PDO=\dfrac{OP}{DP}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

故直线 PD 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$



14.【答案】 ①. 2 ②. $x^2-y^2=1$

【分析】根据题意，由双曲线方程可得焦点坐标以及渐近线方程，再由点到直线的距离公式，代入计算，即可得到结果.

【详解】因为双曲线 C：$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{m}=1\left(m>0\right)$，所以其焦点坐标为 $\left(\pm\sqrt{2+m},0\right)$，

渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{\dfrac{m}{2}}x$，且双曲线的一个焦点到它的一条渐近线的距离为 $\sqrt{2}$，

则 $\dfrac{\left|\sqrt{m}\times\sqrt{2+m}\right|}{\sqrt{m+2}}=\sqrt{2}$，所以 $m=2$；

所以双曲线 C：$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$，渐近线方程为 $y=\pm x$，

若双曲线 C_1 与 C 不同，且与 C 有相同的渐近线，则该双曲线只需满足 $a=b$ 即可，

则 C_1 的方程可以为 $x^2-y^2=1$.

故答案为：2；$x^2-y^2=1$

15.【答案】①②④.

【分析】将所求点用 (x,y) 直接表示出来，然后根据条件列出方程即可求出轨迹方程，然后根据方程研究性质即可求解①②③，利用消元法，然后利用函数的单调性求最值即可判断④.

【详解】设动点的坐标为 (x,y)，

$\because$ 曲线 C 是平面内与定点 $F(2,0)$ 和定直线 $x=-2$ 的距离的积等于 4 的点的轨迹，

$\therefore$ $\sqrt{(x-2)^2+y^2}\cdot|x+2|=4$，

$\because$ 当 $x=0$ 时，$y=0$，$\therefore$ 曲线 C 过坐标原点，故①正确；

$\because$ 将 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}\cdot|x+2|=4$ 中的 y 用 $-y$ 代入该等式不变，

$\therefore$ 曲线 C 关于 x 轴对称，故②正确；

令 $x=0$ 时，$y=0$，故曲线 C 与 y 轴只有 1 个交点，故③不正确；

$\because \sqrt{(x-2)^2+y^2}\cdot|x+2|=4$，

$\therefore y^2=\dfrac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2\geq 0$，解得 $-2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}$，

$\therefore$若点 M 在曲线 C 上，则 $|MF|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\dfrac{4}{|x+2|}\geq\dfrac{4}{2+2\sqrt{2}}=2(\sqrt{2}-1)$，故④正确.

故答案为：①②④.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 55 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程，并把答案写在答题纸中相应位置上.

16.【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；

（2）$\sqrt{6}$；

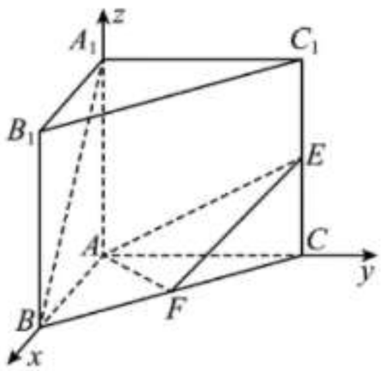
（3）$\dfrac{1}{3}$；

【分析】（1）构建空间直角坐标系，然后根据向量的数量积求解直线夹角；

（2）求解面 AEF 的法向量，然后根据距离公式求解；

（3）根据面 B_1A_1B 与面 A_1BE 的法向量，求解二面角 B_1-A_1B-E 的余弦值；

【小问 1 详解】



故以 A 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$，$A_1=(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，$B_1=(2,0,2)$，$E(0,2,1)$，$F(1,1,0)$

$\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{EF}=(1,-1,-1)$，

$$\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{EF}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\frac{2\times1+(-2)\times(-1)}{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

所以异面直线 A_1B 与 EF 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【小问 2 详解】

设面 AEF 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$, $\overrightarrow{AF}=(1,1,0)$

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}2b+c=0\\ a+b=0\end{cases}$

令 $a=1$，可得 $\vec{n}=(1,-1,2)$，

因为 $\overrightarrow{AB_1}=(2,0,2)$,所以 $d=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$,

所以点 B_1 到平面 AEF 的距离为 $\sqrt{6}$.

【小问 3 详解】

$AC\perp$ 面 B_1A_1B，所以面 B_1-A_1B 的法向量为 $\overrightarrow{AC}(0,0,1)$，

设面 A_1BE 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

又 $\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{A_1E}=(0,2,-1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x-z=0\\ 2y-z=0\end{cases}$，

令 $y=1$，可得 $\vec{m}=(2,1,2)$，

$\cos\overrightarrow{AC},\ \vec{m}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{1}{1\times3}=\dfrac{1}{3}$,

所以二面角 B_1-A_1B-E 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

17.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

(2) ±2

【分析】(1) 由题意求出 $c=1, a=2$，进而得到 b^2，求出椭圆方程;

(2) 联立直线与椭圆方程，根据根的判别式得到 $-\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$，得到两根之和，两根之积，利用弦长公式表达出弦长，得到方程，检验后求出答案

【小问 1 详解】

由题意得：$|F_1F_2|=2c=2$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，解得 $c=1, a=2$，

故 $b^2=a^2-c^2=4-1=3$，

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

【小问 2 详解】

联立 $y=x+m$ 与 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得，$7x^2+8mx+4m^2-12=0$，

$\Delta=64m^2-28\left(4m^2-12\right)>0$，解得 $-\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$，

设 $M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8m}{7},x_1x_2=\frac{4m^2-12}{7}$，

故 $|MN|=\sqrt{1+1^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{8m}{7}\right)^2-4\cdot\frac{4m^2-12}{7}}$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{64m^2}{49}-\frac{16m^2-48}{7}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{336-48m^2}{49}}$，

又 $|MN|=\frac{12\sqrt{2}}{7}$，

所以 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{336-48m^2}{49}}=\frac{12\sqrt{2}}{7}$，解得 $m=\pm2$，满足 $-\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$，

故实数 m 的值为 ±2

18. 【答案】（1）圆心坐标 $C(-1,2)$，半径 $r=\sqrt{2}$；

（2）$x+y+1=0$ 或 $x+y-3=0$；

（3）$2x-4y+3=0$

【分析】（1）化圆的一般方程为标准方程，从而得到圆心坐标和半径；

（2）设出直线的截距式方程，由圆心到切线的距离等于半径列式求得 a 的值，则切线方程可求；

（3）由切线垂直于过切点的半径及 $|MP|=|OP|$ 列式求点 P 的轨迹方程.

【小问 1 详解】

由圆 $C:x^2+y^2+2x-4y+3=0$，得：$(x+1)^2+(y-2)^2=2$，

$\therefore$ 圆心坐标 $C(-1,2)$，半径 $r=\sqrt{2}$；

【小问 2 详解】

$\because$ 切线在两坐标轴上的截距相等且不为零，

设直线方程 $x+y=a(a\neq0)$，

$\because$ 圆 $C:(x+1)^2+(y-2)^2=2$，

$\therefore$ 圆心 $C(-1,2)$ 到切线的距离等于圆半径 $\sqrt{2}$，

即：$\frac{|-1+2-a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore a=-1$ 或 $a=3$，

所求切线方程为：$x+y+1=0$ 或 $x+y-3=0$；

【小问 3 详解】

$\because$ 切线 PM 与半径 CM 垂直，设 $P(x,y)$

$\therefore |PM|^2=|PC|^2-|CM|^2$，

由 $|MP|=|OP|$ 可得 $(x+1)^2+(y-2)^2-2=x^2+y^2$

所以点 P 的轨迹方程为 $2x-4y+3=0$.

19.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

(2) 证明见解析　(3) $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】(1) 由题可知，$c=1$，$2b=2$，再结合 $a^2=b^2+c^2$，解出 a 值即可得解；

(2) 设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，联立直线 l 的方程和椭圆的方程，得韦达定理；利用中点坐标公式以及斜率公式得直线 OM 的斜率，进而得解；

(3) 若四边形 $OAPB$ 为平行四边形，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$，利用平面向量的线性坐标运算可以用 k 表示点 P 的坐标，再将其代入椭圆方程即可得到关于 k 的方程，解之即可得解.

【小问 1 详解】

由题意可知，$c=1$，$2b=2$，

$\because a^2=b^2+c^2$，$\therefore a=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

【小问 2 详解】

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，消去 y 得，$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$，

$\because M$ 为线段 AB 的中点，$\therefore x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k^2}{2k^2+1}$，$y_M=k(x_M-1)=\dfrac{-k}{2k^2+1}$，

$\therefore k_{OM}=\dfrac{y_M}{x_M}=-\dfrac{1}{2k}$，

$\therefore k_{OM}\cdot k_l=-\dfrac{1}{2k}\times k=-\dfrac{1}{2}$ 为定值.

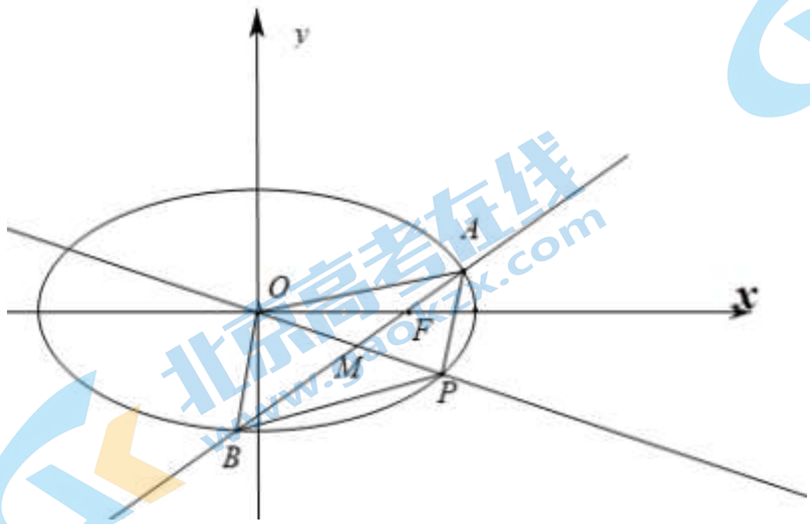
【小问 3 详解】

若四边形 $OAPB$ 为平行四边形，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$，

$\therefore x_P=x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$， $y_P=y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2k=\dfrac{-2k}{2k^2+1}$，

$\because$ 点 P 在椭圆上，$\therefore (\dfrac{4k^2}{2k^2+1})^2+2\times(\dfrac{-2k}{2k^2+1})^2=2$，解得 $k^2=\dfrac{1}{2}$，即 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 当四边形 $OAPB$ 为平行四边形时，直线 l 的斜率为 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！