

姓名

座位号

(在此卷上答题无效)

# 数 学(理科)

本试卷共 1 页,全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

## 考生注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 函数  $y = \frac{1}{\ln(1-x)}$  的定义域为

- A.  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$     B.  $(-1, 0)$     C.  $(0, 1)$     D.  $[-1, 1)$

2. 集合  $A = \{x \mid (1-x)(x-2) \geq 0\}$ ,  $B = \{x \mid y = \ln \frac{1+x}{1-x}\}$ , 则集合  $A \cup B$

- A.  $\emptyset$     B.  $(-1, 1)$     C.  $(-1, 2]$     D.  $[1, 2]$

3. “ $a < 0$  且  $b < 0$ ”是“ $a + b < 2\sqrt{ab}$ ”的

- A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件    C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件

4. 已知实数  $m, n \in [1, 2]$ , 那么  $\frac{m-n}{m+n}$  的取值范围是

- A.  $[\frac{1}{2}, 2]$     B.  $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$     C.  $[0, \frac{1}{3}]$     D.  $[-\frac{1}{3}, 0]$

5. 函数  $f(x) = \sin(2x + \varphi)$  ( $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ) 在区间  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$  上恰有 3 个零点, 则  $\varphi$  可以为

- A.  $\frac{\pi}{3}$     B.  $\frac{\pi}{6}$     C.  $-\frac{\pi}{6}$     D.  $-\frac{\pi}{3}$

6. 已知曲线  $C_1: y = \sin 2x - \cos 2x$ , 曲线  $C_2: y = \sin 2x + \cos 2x$ , 则下面结论正确的是

- A. 将曲线  $C_1$  向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位, 可得  $C_2$     B. 将曲线  $C_1$  向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位, 可得  $C_2$   
 C. 将曲线  $C_1$  向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位, 可得  $C_2$     D. 将曲线  $C_1$  向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位, 可得  $C_2$

函数  $f(x) = x^2(x+1)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) 有两个极值点, 则  $n$  的最小值为

A. 1

C. 2

D. 3

已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 记  $b_n = 2a_{n+1} - a_n$ , 数列  $\{b_n\}$  中存在连续三项构成等差数列,  $q$  为

A. 1 或  $\frac{1}{2}$

B. 1 或 2

C. 1 或  $\frac{1}{2}$

D. 1

三个向量  $a, b, c$  长度各不相同,  $|a|, |b|, |c| \in \{1, 2, 3\}$ , 则  $|2c - a - b|$  的最大值和最小值分别为

B. 6, 0

C. 9, 3

D. 6, 3

已知  $\triangle ABC$  的边  $BC$  上有一点  $P$ ,  $BP = 2PC$ ,  $AP = \sqrt{5}$ , 则  $3AB^2 + 6AC^2 - 2BC^2$  的值为

A. 21

B. 4

C. 56

D. 63

已知数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 100, a_{n+1} = a_n - 2 + 2a_n - 2$ , 满足  $S_n > 0$  的最小  $n$  值为

A. 31

B. 32

C. 33

D. 34

函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  零点为  $m$ , 函数  $g(x) = e^x - \frac{1}{m} \ln x$  的极值点为  $n$ , 其中  $e$  为自然对数的底, 则

A.  $0 < m < n < \frac{1}{2}$

B.  $0 < m < n < \frac{1}{2}$

C.  $\frac{1}{2} < n < m < 1$

D.  $\frac{1}{2} < m < n < 1$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

已知向量  $a = (1, m), b = (m, 2)$ , 若  $a \parallel b$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_.

函数  $f(x) = ax^2 - 2x + 1$  仅有一个零点, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ , 若  $a_{20} = 2$ , 则  $a_1 =$  \_\_\_\_\_.

已知三角形的重心到三条边的距离分别为 3, 4, 6, 则这个三角形的面积为 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

设  $m \in \mathbb{R}$ , 命题  $p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 2\sqrt{2}m$ ; 命题  $q: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - mx + 1 = 0$ .

(1) 若  $p$  为真命题, 求  $m$  的最大值;

(2) 若  $p \vee q$  为真命题, 且  $p \wedge q$  为假命题, 求  $m$  的取值范围.

18. (12分)

已知函数  $f(x) = x^3 + mx^2 + n$ , 且  $x=1$  是函数  $g(x) = f'(x)$  的一个极值点.

(1) 证明  $y = f(x)$  图象经过一个定点, 并求该定点坐标;

(2) 函数  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上的值域为  $[a, a+1]$ , 求实数  $a$  的值.

19. (10分)

已知无穷数列  $\{a_n\}$  各项均不为 0, 记向量  $\vec{p}_n = (a_n, a_{n+1})$ , ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), 可得一个向量序列  $\{\vec{p}_n\}$ .

(1) 若  $\{\vec{p}_n\}$  是一组平行向量, 证明  $\{a_n\}$  是等比数列;

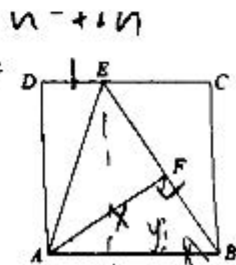
(2) 若  $a_n = 2n-1$ , 记向量  $\vec{T}_n = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n$ , 如果  $\vec{T}_n \parallel \vec{p}_n$ , 求  $n$  的值.

20. (10分)

如图, 正方形  $ABCD$  的边长为 2, 边  $CD$  上有一个动点  $E$ ,  $AF$  垂直  $BE$  于

(1) 若  $DE=1$ , 求  $AF$  长;

(2) 求  $\tan \angle EAF$  最小值.



21. (12分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  的前两项都是方程  $2\sin x = \sqrt{3}$  的根,  $0 < a_1 < a_2 < 2\pi$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项;

(2) 设  $b_n = a_n \sin a_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 求数列  $\{b_n\}$  的前 60 项和.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \frac{x-a}{\ln x}$ .

(1) 当  $a=1$ , 讨论  $f(x)$  单调性;

(2) 若  $f(x)$  有两个极值点  $m, n$  ( $m < n$ ), 求证:  $m+n > 2$ .

## 2022 届高三第三次联考理数参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	A	B	D	B	C	C	A	D	B	D

1. 【解析】根据题意得  $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 1-x \neq 1 \end{cases}$ , 解得  $x < 1$  且  $x \neq 0$ , 即所求定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ .

2. 【解析】 $A=[1, 2], B=(-1, 1)$ ,  $A \cap B = (-1, 2]$ , 故选 C.

3. 【解析】充分性是显然的,

当  $a+b < 2\sqrt{ab}$  成立时,  $ab \geq 0$ , 则  $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$  (不合题意) 或  $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$  或  $ab = 0$

当  $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$  符合题意; 当  $ab = 0$ ,  $a+b < 0$  不合题意.

4. 【解析】记点  $P(m, n)$ , 设  $k = \frac{n}{m} \in [\frac{1}{2}, 2]$ ,  $\frac{m-n}{m+n} = \frac{1-k}{1+k} = \frac{2}{1+k} - 1 \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ .

5. 【解析】 $f(x)$  周期为  $\pi$  为区间  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$  的长度, 所以  $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$  都是零点,  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$  或  $-\frac{\pi}{3}$  或  $-\frac{4\pi}{3}$ .

6. 【解析】 $C_1: y = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin 2(x - \frac{\pi}{8})$

$C_2: y = \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin 2(x + \frac{\pi}{8})$

所以将曲线  $C_1$  向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位, 可得  $C_2$ , 故选 B.

7. 【解析】 $f'(x) = (n+1)x^{n-1}(x + \frac{n}{n+1}) = 0$ , 当  $n \geq 2$  时, 方程才有两个解, 且  $n$  为偶数,  $f(x)$  有两个极值点.

8. 【解析】设  $2b_{k+1} = b_k + b_{k+2}$  等差,  $4a_{k+2} - 2a_{k+1} = 2a_{k+1} - a_k + 2a_{k+3} - a_{k+2}$

$5a_{k+2} - 4a_{k+1} = 2a_{k+3} - a_k \Leftrightarrow 2q^3 - 5q^2 + 4q - 1 = 0 \Leftrightarrow (2q-1)(q-1)^2 = 0$ ,  $q = 1, \frac{1}{2}$

9. 【解析】 $|2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}| \leq |2\vec{c}| + |\vec{a}| + |\vec{b}| = 6 + 1 + 2 = 9$ , 当  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$ , 且  $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$  同向时, 取等号

$|2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}| \geq |2\vec{c}| - |\vec{a}| - |\vec{b}| = 4 - 1 - 3 = 0$ , 当  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 2$ , 且  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  同向时, 取等号

10. 【解析】 $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ ,  $\vec{AP}^2 = \frac{1}{9}\vec{AB}^2 + \frac{4}{9}\vec{AC}^2 + \frac{4}{9}\vec{AB}\vec{AC}$ , 又  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ ,

$\vec{BC}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\vec{AB}\vec{AC}$ ,  $2\vec{AB}\vec{AC} = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - \vec{BC}^2$

$\vec{AP}^2 = \frac{1}{9}\vec{AB}^2 + \frac{4}{9}\vec{AC}^2 + \frac{2}{9}(\vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - \vec{BC}^2) = \frac{3}{9}\vec{AB}^2 + \frac{6}{9}\vec{AC}^2 - \frac{2}{9}\vec{BC}^2 = 7 \cdot 3\vec{AB}^2 + 6\vec{AC}^2 - 2\vec{BC}^2 = 63$

11. 【解析】 $a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n, a_n - 2 \geq 0 \\ a_n + 4, a_n - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3a_n, a_n \geq 2 \\ a_n + 4, a_n < 2 \end{cases}$ ,  $-100 + (n-1)4 < 2, n \leq 26, a_n = \begin{cases} 4n - 104, n \leq 27 \\ 4 \cdot 3^{n-27}, n \geq 27 \end{cases}$

$S_{26} = \frac{(-100+0)26}{4} = -650, a_{27} + a_{28} + \dots + a_n = 4 + 4 \cdot 3 + \dots + 4 \cdot 3^{n-27} = \frac{4(1-3^{n-26})}{1-3} > 650$

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息.

12. 【解析】 $e^x = \frac{1}{m}, m = -\ln m, me^x = 1, f(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 2 < 0, f(1) = e - 1 > 0, \frac{1}{2} < m < 1,$

$$g'(x) - e^x - \frac{1}{mx} = 0, e^x = \frac{1}{mn}, ne^x = \frac{1}{m} - e^x, n + \ln n = m$$

$ne^x = \frac{1}{m} > 1 = me^x,$  由  $u(x) = xe^x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $n > m > \frac{1}{2}$

$n + \ln n = m < 1 = 1 + \ln 1,$  由  $v(x) = x + \ln x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $n < 1$

13. 【答案】 $\pm\sqrt{2}$  【解析】因为  $a \perp b,$  所以  $m^2 = 2,$  故  $m = \pm\sqrt{2}$

14. 【答案】 $(0, 1]$  【解析】当  $a > 0$  时,  $f(x) = -2x + 1,$  当  $a = 0$  时,  $\Delta = 4 - 4a = 0, a = 1, f(x) = (x - 1)^2$

15. 【答案】7 【解析】 $\frac{4x^2}{x+2} + 3y = (\frac{4x^2}{x+2} + x + 2) - x - 2 + 3y \geq 4x - x - 2 + 3y = 3x + 3y - 2 = 7$

取等号的条件是:  $\frac{4x^2}{x+2} - x + 2, 0 < x < 3, x = 2,$

16. 【答案】 $\frac{144}{5}\sqrt{15}$  【解析】 $\triangle ABC$  的三条边  $a, b, c$  上的高分别为 9, 12, 18, 面积记为  $S,$  则

$$a = \frac{2S}{9}, b = \frac{2S}{12}, c = \frac{2S}{18}, \cos C = \frac{4S^2 + 4S^2 - 4S^2}{2 \cdot \frac{2S}{9} \cdot \frac{2S}{12}} = \frac{7}{8}, \sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}, S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S}{9} \cdot \frac{2S}{12} \cdot \frac{\sqrt{15}}{8}, S = \frac{144}{5}\sqrt{15}$$

17. 【解析】(1)  $P$  为真命题等价于  $(x + \frac{2}{x})_{\min} \geq 2\sqrt{2}m$

而  $x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2},$  当且仅当  $x = \sqrt{2}$  时等号成立, 所以  $x + \frac{2}{x}$  的最小值是  $2\sqrt{2}.$  2分

于是  $2\sqrt{2} \geq 2\sqrt{2}m, m \leq 1,$  故  $m$  的最大值是 1. 5分

(2) 因为  $P \vee q$  为真命题, 且  $P \wedge q$  为假命题, 所以  $P, q$  真假.

当  $q$  为真命题时,  $\Delta = m^2 - 4 \geq 0,$  所以  $m \leq -2$  或  $m \geq 2.$

若  $P$  真  $q$  假, 则  $\begin{cases} m \leq 1 \\ -2 < m < 2 \end{cases},$  解得  $-2 < m \leq 1$  7分

若  $P$  假  $q$  真, 则  $\begin{cases} m > 1 \\ m \leq -2 \text{ 或 } m \geq 2 \end{cases},$  解得  $m \geq 2.$

综上所述,  $m$  的取值范围是  $(-2, 1] \cup [2, +\infty).$  10分

18. 【解析】(1)  $g'(x) = 3x^2 + 2mx + n, g'(1) = 3 + 2m + n = 0,$

$f(2) = 4 + 2m + n = 3 + 2m + n + 1 = 1,$  所以图象经过一个定点  $(2, 1),$  4分

(2) 由(1)可知  $f(2) = 1, n = -3 - 2m$   $-\frac{m}{2}$  为函数  $f(x)$  的对称轴

当  $m=0$  时, 若  $f(x)$  在区间  $[0,2]$  递增,  $\begin{cases} f(0)=a \\ f(2)=a+1 \\ n=-3-2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ m=-\frac{3}{2} \end{cases}$ , 不合题意. 6分

当  $m < -2$  时, 若  $f(x)$  在区间  $[0,2]$  递减,  $\begin{cases} f(0)=a+1 \\ f(2)=a \\ n=-3-2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ m=-\frac{5}{2} \end{cases}$ , 不合题意. 8分

当  $-2 < m < 0$  时,  $\begin{cases} f(-\frac{m}{2})=a \\ f(2)=a+1=1 \\ n=-3-2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ m=-2 \text{ 或 } -6 \text{ (舍去)} \end{cases}$

当  $-6 < m < -2$  时,  $\begin{cases} f(-\frac{m}{2})=a \\ f(0)=a+1 \\ n=-3-2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4-2m \\ m=-2 \text{ 或 } -14 \text{ (舍去)} \end{cases}$  10分

综上所述: 当  $m=-2$  时,  $f(x)=x^2-2x+1$  适合题意, 所以  $m=-2, a=0$ . 12分

19. 【解析】(1) 证明: 对任意正整数  $n$ , 由  $\overline{p_n} \parallel \overline{p_{n+1}}$ , 可知  $\alpha_{n+1}^2 = \alpha_n \alpha_{n+2}, \alpha_n \neq 0$ . 2分

所以  $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}}$ , 故  $\{\alpha_n\}$  是等比数列. 4分

(2) 由  $\alpha_n = 2n-1$ , 所以数列  $\{\alpha_n\}$  的前  $n$  和  $S_n = n^2$ , 公差为  $d=2$ . 6分

$\overline{T_n} = \overline{p_1} + \overline{p_2} + \overline{p_3} + \dots + \overline{p_n} = (S_n, S_n + nd) = n(n, n+2)$ . 8分

$\overline{p_n} = (2n-1, 2n+1), \overline{p_8} = (9, 11)$ . 10分

$\overline{T_n} \parallel \overline{p_8}, \frac{n}{9} = \frac{n+2}{11}$ , 解得  $n=9$ . 12分

20. 【解析】(1)  $DE = EA = \sqrt{5}$

$\angle AEF = 2\angle EAD, \sin \angle AEF = 2 \sin \angle DAE \cdot \cos \angle DAE = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$

$AF = AE \cdot \sin \angle AEF = \frac{4\sqrt{5}}{5}$  6分

(2) 设  $DE = x, 0 < x < 2$  (也可建直角坐标系, 用斜率解决)

$\tan \angle EAB = \frac{2}{x}, \tan \angle EBA = \frac{2}{2-x}, \tan \angle FAB = \frac{1}{\tan \angle EBA} = \frac{2-x}{2}$

$\tan \angle EAF = \tan(\angle EAB - \angle FAB) = \frac{\frac{2}{x} - \frac{2-x}{2}}{1 + \frac{2}{x} \cdot \frac{2-x}{2}} = \frac{(x-1)^2 + 3}{4} > \frac{3}{4}$  (当  $x=1$  时取等号) 12分

21. 【解析】(1)  $\sin a_1 = \sin a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $a_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $a_2 = \frac{2}{3}\pi$ ,  $a_n = \frac{n\pi}{3}$  ..... 6分

(2)  $\sin a_n$  的周期为 6, 当  $n=6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5, 6k+6(k=0, 1, 2, \dots)$  时

$$\begin{aligned} & a_{6k+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + a_{6k+2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + a_{6k+4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a_{6k+5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(a_{6k+1} + a_{6k+2} - a_{6k+4} - a_{6k+5}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-6d) = -\sqrt{3}\pi, \text{ 所以 } S_{\infty} = -10\sqrt{3}\pi, \dots \dots \dots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

22. 【解析】(1)  $f(x)$  定义域为  $(0,1) \cup (1,+\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{x \ln x - x + a}{x(\ln x)^2}$ ,

当  $a=1$  时,  $f'(x) = \frac{x \ln x + 1 - x}{x(\ln x)^2}$ , ..... 2分

设  $v(x) = x \ln x + 1 - x$ ,  $v'(x) = \ln x$ ,  $v(x)$  在  $(0,1)$  上递减,  $(1,+\infty)$  递增,  $v(1)=0$ ,

所以  $v(x) \geq 0$ , 从而  $f'(x) \geq 0$ , 故  $f(x)$  在  $(0,1)$  和  $(1,+\infty)$  递增 ..... 5分

(2) 由  $x \ln x - x + a = 0$ ,  $a = x - x \ln x$ , 设  $g(x) = x - x \ln x$ ,  $g'(x) = -\ln x$ ,

$g(x)$  在  $(0,1)$  上递增,  $(1,+\infty)$  递减,  $g(1)=1$ ,  $g(e)=0$ ,

由  $g(x)=a$  有两个不同的根  $m, n$ ,  $0 < a < g(1)=1$ ,  $0 < m < 1 < n < e$ , ..... 8分

由题意  $a = m(1 - \ln m) = n(1 - \ln n)$ ,  $0 < m < 1 < n < e$ , 以下可用多种方法证明

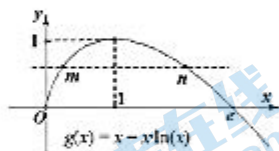
方法 1: 设  $u(t) = 2 \ln t - (t - \frac{1}{t})$ ,  $u'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = -\frac{(t-1)^2}{t^2} < 0$ ,

所以  $u(t)$  在  $(0,+\infty)$  递减,  $u(1)=0$ ,

当  $0 < t < 1$ ,  $u(t) > 0$ ,  $\ln t > \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$ ,  $a = m(1 - \ln m) < m - \frac{m^2 - 1}{2}$  ..... 10分

当  $t > 1$  时,  $u(t) < 0$ , 所以  $\ln t < \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$ ,  $a = n(1 - \ln n) > n - \frac{n^2 - 1}{2}$ ,

$n - \frac{n^2 - 1}{2} < m - \frac{m^2 - 1}{2}$ ,  $n^2 - m^2 + 2m - 2n > 0$ ,  $(n-m)(n+m-2) > 0$ , 故  $m+n > 2$ . ..... 12分



方法 2: 设  $u(x) = x(1 - \ln x)$  ( $0 < x < e$ ),  $u'(x) = -\ln x$

$u(x)$  在  $(0,1)$  上递增,  $(1,e)$  递减, 且方程  $u(x)=a$  ( $0 < a < 1$ ) 在区间  $(0,e)$  上有两个根  $m, n$

要证  $m+n > 2 \Leftrightarrow n > 2-m$ ,

$0 < m < 1, 1 < 2-m < 2$ ,  $u(x)$  在  $(1,e)$  递减, 只要证  $u(n) < u(2-m)$

又因为  $u(m)=u(n)$ , 所以只要证  $u(m) < u(2-m)$

设  $v(x) = u(x) - u(2-x)$ ,  $0 < x < 1$

$v'(x) = u'(x) + u'(2-x) = -\ln x - \ln(2-x) = -\ln(2x-x^2) = -\ln[1-(x-1)^2] > 0$

所以  $v(x)$  在  $(0,1)$  上递增,  $v(1)=0$ , 则  $v(x) < 0$

$0 < m < 1$ , 所以  $v(m) < 0$ ,  $u(m) < u(2-m)$ , 命题得证.



## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: [www.gaokzx.com](http://www.gaokzx.com)

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](https://www.gkzxx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。