北大附中预科部 2022—2023 学年度阶段练习

数　学

2022.12

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

（1）已知集合 $A=\{-2,-1,1,2,3\}$，集合 $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x|>1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1,1,2,3\}$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $\{2,3\}$　　D. $\{-2,2,3\}$

（2）已知复数 $z=(-1+3\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}$，则在复平面内 z 对应点的坐标为

A. $(1,-3)$　　B. $(1,3)$　　C. $(-3,-1)$　　D. $(-1,-3)$

（3）已知抛物线 $C: y^2=-4x$，则其准线方程为

A. $x=1$　　B. $x=-1$　　C. $x=2$　　D. $x=-2$

（4）已知直线 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于 P，Q 两点，PQ 的中点是 $(1,1)$，则直线 l 的方程是

A. $x+y-2=0$　　B. $x-y=0$

C. $x+y=0$　　D. $x+y+2=0$

（5）已知 $x>y>0$，则

A. $\cos x>\cos y$　　B. $2^x<2^y$

C. $\ln x>\ln y$　　D. $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$

（6）若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=3n-6$，则下列结论正确的是

A. 108 是数列 $\{a_n\}$ 的第 39 项

B. 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列

C. 前 n 项和有最大值

D. 前 n 项和无最小值

（7）已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则“$q>0$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

（8）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$f(-1)=3$，对于任意 $a,b\in[0,+\infty)$ 且 $a\neq b$，

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 恒成立，则使得 $f(x)<3$ 成立的 x 的取值范围是

A. $(1,+\infty)$

B. $(-\infty,-1)$

C. $(-1,1)$

D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

（9）若关于 x 的方程 $\cos 2x-2\cos x+a=0$ 有解，则实数 a 的取值范围是

A. $[1,\dfrac{3}{2}]$

B. $[-3,\dfrac{3}{2}]$

C. $(-\infty,\dfrac{3}{2}]$

D. $[\dfrac{3}{2},+\infty)$

（10）成书于约两千多年前的我国古代数学典籍《九章算术》中记载了通过加减消元求解 n 元一次方程组的算法，直到拥有超强算力计算机的今天，这仍然是一种效率极高的算法. 按照这种算法，求解 n 元一次方程组大约需要对实系数进行 $C\cdot n^3$（C 为给定常数）次计算. 1949 年，经济学家莱昂提夫为研究“投入产出模型”（该工作后来获得 1973 年诺贝尔经济学奖），利用当时的计算机求解一个 42 元一次方程组，花了约 56 机时. 事实上，他的原始模型包含 500 个未知数，受限于机器算力而不得不进行化简以减少未知数. 如果不进行化简，根据未知数个数估计所需机时，结果最接近于

A. 10^3 机时

B. 10^4 机时

C. 10^5 机时

D. 10^6 机时

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

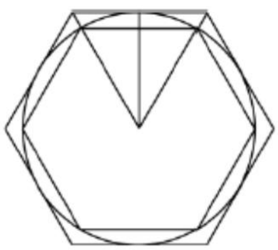
（11）双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的离心率为__________，渐近线方程为__________.

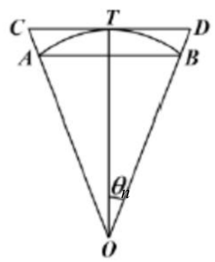
（12）圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 上的点到直线 $2x-y-1=0$ 距离的最大值为__________.

（13）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$ ，$\boldsymbol{b}=(0,2)$，能够说明“若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ ”是假命题的向量 $\boldsymbol{c}$ 为__________（写出符合要求的一个坐标即可）.

（14）若函数 $y=g(x)$ 与 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图像关于点 $(\frac{\pi}{12},0)$ 对称，则函数 $y=g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为__________.

（15）作单位圆的外切和内接正 3×2^n 边形（ $n=1,2,\cdots$ ），记外切正 3×2^n 边形周长的一半为 a_n，内接正 3×2^n 边形周长的一半为 b_n . 计算可得 $a_n=3\times2^n\tan\theta_n$ ，其中 θ_n 是正 3×2^n 边形的一条边所对圆心角的一半.





给出下列四个结论：

① $b_n=3\times2^n\sin\theta_n$ ；　② $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}$ ；

③ $b_{n+1}^2=a_{n+1}b_n$ ；　④记 $c_n=a_n-b_n$ ，则 $\forall n\in N_+$ ，$\frac{c_{n+1}}{c_n}<\frac{1}{4}$.

其中正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

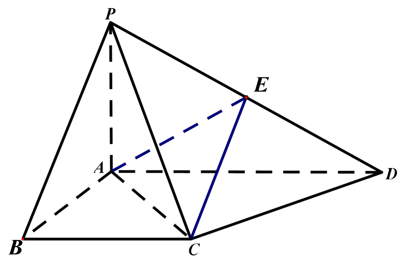
已知函数 $f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最大值及对应 x 的取值集合；

（Ⅱ）若函数 $g(x)=\cos x\cdot f(x)+\frac{1}{2}$ 在 $(0,m)$ 上有且只有两个零点，求 m 的取值范围.

（17）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AP\perp$ 平面 $ABCD$，$AD//BC$，$\angle ABC=90°$，$AP=AB=BC=\frac{1}{2}AD=1$，点 E 是线段 PD 中点.



（Ⅰ）求证：$CE//$ 平面 PAB；

（Ⅱ）求二面角 $E-AC-D$ 的余弦值；

（Ⅲ）求点 P 到平面 ACE 的距离.

（18）（本小题 14 分）

在$\triangle ABC$ 中，$b\sin 2A=a\sin B$.

（Ⅰ）求 $\angle A$ 的大小；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③、条件④这四个条件中选择两个作为已知，使$\triangle ABC$ 存在且唯一，求$\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$\sin C=\frac{19}{20}$；

条件②：$\cos B=\frac{1}{7}$；

条件③：$a=\frac{7}{5}c$；

条件④：$b+c=13$.

（19）（本小题 14 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的长轴长和离心率；

（Ⅱ）已知 A 为椭圆 E 的左顶点，过点 $P(-\sqrt{3},1)$ 作直线与椭圆 E 交于不同的两点 B,C，直线 AB,AC 分别与 y 轴交于点 M,N，且点 N 位于 x 轴下方，求 $|OM|-|ON|$.

（20）（本小题 15 分）

已知 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{kx}$.

（Ⅰ）若 $k=1$，求 $f(x)$ 在 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅲ）证明：当 $k>0$ 时，$\forall m,n\in(0,+\infty)$, $f(m+n)+1>f(m)+f(n)$.

（21）（本小题 15 分）

已知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是各项均为正整数的无穷数列，如果同时满足下面两个条件：

① $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是递增数列；

② $\{a_n\}$ 中任意两个不同的项的和不是 $\{b_n\}$ 中的项.

则称 $\{a_n\}$ 被 $\{b_n\}$ 屏蔽，记作 $\{a_n\}\propto\{b_n\}$.

（Ⅰ）若 $a_n=2n-1$，$b_n=2n$.

（i）判断 $\{a_n\}\propto\{b_n\}$ 是否成立，并说明理由；

（ii）判断 $\{b_n\}\propto\{a_n\}$ 是否成立，并说明理由.

（Ⅱ）设 $\{b_n\}$ 是首项为正偶数，公差是 2 的无穷等差数列，判断是否存在数列 $\{a_n\}$，使得 $\{a_n\}\propto\{b_n\}$. 如果存在，写出一个符合要求的数列 $\{a_n\}$；如果不存在，说明理由；

（Ⅲ）设 $\{b_n\}$ 是取值于正整数集的无穷递增数列，且对任意正整数 M，存在正整数 $f(M)$，使得 $b_{f(M)+1}-b_{f(M)}\geq M$. 证明：存在数列 $\{a_n\}$，使得 $\{a_n\}\propto\{b_n\}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。