七校联合体 2022 届高三第二次联考（11 月）

数学参考答案与评分参考细则

一．单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	C	B	A	A	C

二．多项选择题

题号	9	10	11	12
答案	AD	ACD	BC	CD

三．填空题 13. 15　　14. $[1,2]$　　15. $\frac{8}{3}$　　16. 36π

四．解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 解析：(1) 在 $\triangle ABD$ 中，$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle BDA}$,

所以 $\sin\angle BDA=\frac{AB\sin\frac{\pi}{6}}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,　　…………………1 分

因为 $\angle BDA\in(0,\ \pi)$，所以 $\angle BDA=\frac{\pi}{3}$ 或 $\angle BDA=\frac{2\pi}{3}$，　　…………………2 分

$\angle BDA=\frac{2\pi}{3}$ 时，$\angle B=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle C=\frac{\pi}{3}$，　　…………………3 分

$\angle BDA=\frac{\pi}{3}$ 时，$\angle B=\frac{\pi}{2}$（舍）　　…………………4 分

所以 $\angle C=\frac{\pi}{3}$　　…………………5 分

(2) 因为 $AB=\sqrt{3}BD$, $CD=2BD$，所以 $AB=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$, $AC=\frac{\sqrt{6}}{3}BC$,　　…………………6 分

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　…………………7 分

所以 $AD^2=\frac{4}{9}AB^2+\frac{1}{9}AC^2$,　　…………………8 分

所以 $BC=6\sqrt{2}$, $AB=2\sqrt{6}$, $AC=4\sqrt{3}$,　　…………………9 分

所以 $S_{\triangle ABC}=12\sqrt{2}$.　　…………………10 分

18. 解：(1) 由已知有 $a_1=S_1=2$　　…………………1 分

$n\geq2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}=n(n-1)t+2n-[(n-1)(n-2)t+2(n-1)]=2tn-2t+2$　　…………………2 分

$n=1$ 时上式也适合

所以 $a_n=2tn-2t+2$ ………………3 分

因 $a_1-1,a_3-1,a_{13}-1$ 成等比数列

所以 $(a_3-1)^2=(a_1-1)(a_{13}-1)$ ………………4 分

即 $(4t+1)^2=1\times(24t+1)$ ………………5 分

解得 $t=1$ ………………6 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=2n$ ………………7 分

(2) 由 (1) 知 $S_n=n(n-1)+2n=n(n+1)$ ………………8 分

所以 $\dfrac{S_n+S_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{1}{S_n}+\dfrac{1}{S_{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}$ ………9 分

$T_n=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$ ………………11 分

$=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$ ………………12 分

（注：或先求 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和）

19. 解：(1) ① $\overline{x}=55\times0.1+65\times0.2+75\times0.45+85\times0.2+95\times0.05=74$. ………… 2 分

② 由 (1) 得 $\mu=\overline{x}=74$，所以 $X\sim N(74,100)$，

得 $P(54<X<94)\approx0.9545$，$P(64<X<84)\approx0.6827$， ………………………… 4 分

所以 $P(54<X<64)=\dfrac{0.9545-0.6827}{2}=0.1359$. ………………………………… 6 分

(2) 记“该同学每局获胜”为事件 A，则 $P(A)=(0.02+0.005)\times10=\dfrac{1}{4}$. ……… 7 分

Y 的可能取值为 3，4，5，

$P(Y=3)=(\dfrac{1}{4})^3+(\dfrac{3}{4})^3=\dfrac{7}{16}$， …………………………………………8 分

$P(Y=4)=C_3^2\times(\dfrac{1}{4})^2\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}+C_3^2\times(\dfrac{3}{4})^2\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{45}{128}$， ………………………… 9 分

$P(Y=5)=C_4^2\times(\dfrac{1}{4})^2\times(\dfrac{3}{4})^2\times\dfrac{1}{4}+C_4^2\times(\dfrac{3}{4})^2\times(\dfrac{1}{4})^2\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{27}{128}$. ……10 分

因此 $E(Y)=3\times\dfrac{7}{16}+4\times\dfrac{45}{128}+5\times\dfrac{27}{128}=\dfrac{483}{128}$……………12 分

20 解(1)连结 AC 交 BD 于 N，连结 MN

$\because AD=CD=2, AB=BC=1$

$\therefore BD$ 为 AC 的垂直平分线，则 $AN=CN$ …………1 分

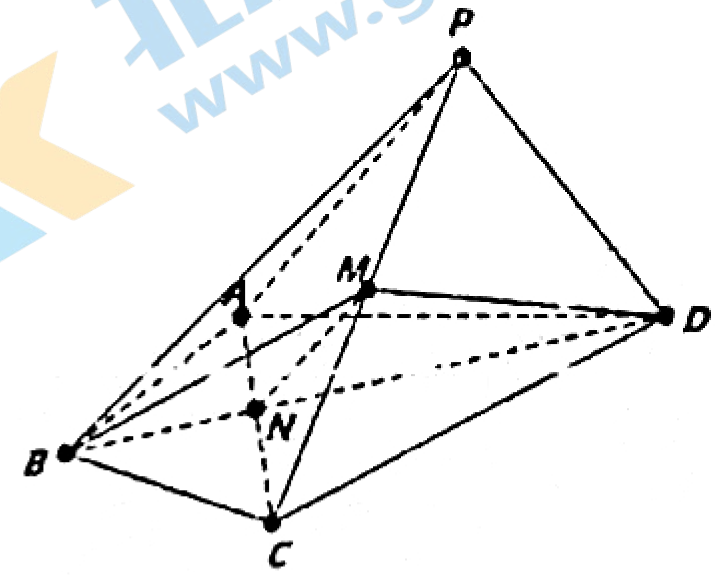
又$\because PM=MC$

$\therefore MN$ 为 ΔPAC 的中位线 …………2 分

$\therefore PA // MN$ …………3 分

又 $PA \not\subset$ 平面 MBD，$MN \subset$ 平面 MBD

$\therefore PA //$ 平面 MBD …………4 分



（2）取 AD 的中点 O，连 OP

$\because AD$ 为等腰直角三角形 PAD 的斜边

$\therefore OP \perp AD$

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore OP \perp$ 平面 $ABCD$ …………5 分

过 O 作 AD 的垂线作为 x 轴，OD, OP 分别为 y, z 轴，建立空间直角坐标系，如图………6 分

则 $P(0,0,1), A(0,-1,0), D(0,1,0)$

由已知有 $AB^2+AD^2=BD^2$

$\therefore AB \perp AD$

$\therefore B(1,-1,0)$ …………7 分

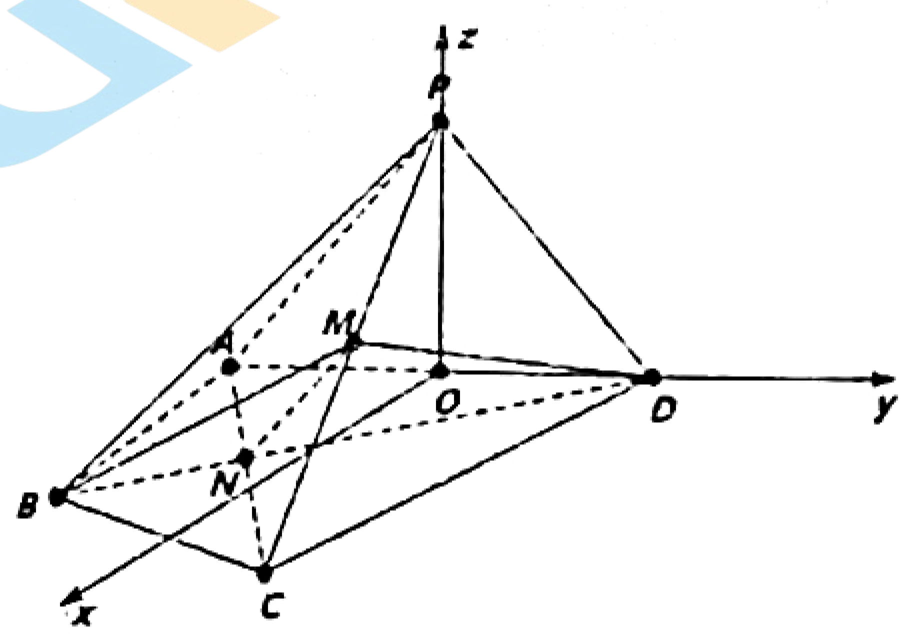
设 $C(x,y,0)$，则

$\overrightarrow{AC}=(x,y+1,0), \overrightarrow{BD}=(-1,2,0), \overrightarrow{BC}=(x-1,y+1,0), \overrightarrow{DC}=(x,y-1,0)$

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+2y+2=0\\ x^2-x+y^2-1=0\end{cases}$

解得 $x=\dfrac{8}{5}, y=-\dfrac{1}{5}$

所以 $C(\dfrac{8}{5},-\dfrac{1}{5},0)$ …………8 分



所以 $\overrightarrow{PC}=(\dfrac{8}{5},-\dfrac{1}{5},-1), \overrightarrow{DC}=(\dfrac{8}{5},-\dfrac{6}{5},0)$

设平面 MCD 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}8x_1-y_1-5z_1=0\\ 4x_1-3y_1=0\end{cases}$

取 $x_1=3$，得 $y_1=4, z_1=4$

所以 $\vec{m}=(3,4,4)$ 是平面 MCD 的一个法向量…………9 分

因平面 $MBD\perp$ 平面 $ABCD$， $AC\perp BD$

所以 $\overrightarrow{AC}=(\frac{8}{5},\frac{4}{5},0)$ 是平面 MBD 的一个法向量…………10 分

$$\cos<\vec{m},\overrightarrow{AC}>=\frac{(3,4,4)\cdot(\frac{8}{5},\frac{4}{5},0)}{\sqrt{9+16+16}\times\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{16}{25}}}=\frac{2\sqrt{205}}{41}$$ …………11 分

由图知，二面角 $B-MD-C$ 为锐二面角，所以二面角 $B-MD-C$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{205}}{41}$ …………12 分

21. 解：(1) 由已知有 $\begin{cases} e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b^2=a^2-c^2 \\ \frac{2}{4a^2}+\frac{3}{4b^2}=1 \end{cases}$ 解得 $a^2=2,b^2=1,c=1$ …………1 分

所以椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1,F(1,0)$ …………2 分

设直线 AB 的方程为 $x=my+1(m\in R),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2=1 \\ x=my+1 \end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$ …………3 分

显然 $\Delta>0$

所以 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+2},y_1y_2=-\frac{1}{m^2+2}$ …………4 分

所以 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$ …………5 分

所以四边形 $OAHB$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|OH||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}=2\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{m^2+1}{(m^2+1+1)^2}}$$ …………6 分

$$=2\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{m^2+1}{(m^2+1)^2+2(m^2+1)+1}}=2\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{(m^2+1)+2+\frac{1}{m^2+1}}}\le\sqrt{2}$$ ………7 分

当且仅当 $m^2+1=\frac{1}{m^2+1}$ 即 $m=0$ 时取等号，

所以四边形 $OAHB$ 的面积的取值范围为 $(0,\sqrt{2}]$ …………8 分

(2) 同(1)所设 $B(x_2,y_2)$，易得 $D(2,y_1)$，则

直线 BD 方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1-y_2}{2-x_2}(x-2)$ ....9 分

即 $y=y_1+\dfrac{y_1-y_2}{2-x_2}(x-2)$

$\because y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2}, y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2}$

$\therefore my_1y_2=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

$\therefore y_1+\dfrac{y_1-y_2}{2-x_2}(x-2)=y_1+\dfrac{y_1-y_2}{2-my_2-1}(x-2)=\dfrac{y_1-my_1y_2+(y_1-y_2)(x-2)}{1-my_2}$ ....10 分

$=\dfrac{\dfrac{y_1-y_2}{2}+(y_1-y_2)(x-2)}{1-my_2}=\dfrac{(y_1-y_2)}{1-my_2}(x-\dfrac{3}{2})$

所以直线 BD 方程为 $y=\dfrac{(y_1-y_2)}{1-my_2}(x-\dfrac{3}{2})$ ....11 分

所以直线 BD 过定点 $E(\dfrac{3}{2},0)$ ....12 分

22. 解：（1） $f'(x)=\dfrac{1-2x-2ax^2}{x}$，$x>0$ ....1 分

（i） $a>0$，令 $f'(x)=0$，得到 $1-2x-2ax^2=0$，

解得 $x=\dfrac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a}$， $x=\dfrac{-2-\sqrt{4+8a}}{4a}$ （舍去）

所以当 $x\in\left(0,\dfrac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a}\right)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\dfrac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a},+\infty\right)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减， ....2 分

（ii） $a=0$，令 $f'(x)=0$，得到 $x=\dfrac{1}{2}$

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，

当$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，　　　　………3 分

（iii）$-\frac{1}{2}<a<0$，

令$f'(x)=0$，得到$x=\frac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a}$，$x=\frac{-2-\sqrt{4+8a}}{4a}$

当$x\in\left(0,\frac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a}\right)\cup\left(\frac{-2-\sqrt{4+8a}}{4a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当$x\in\left(\frac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a},\frac{-2-\sqrt{4+8a}}{4a}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，　　　　………4 分

（iv）$a\le-\frac{1}{2}$，$f'(x)>0$在$(0,+\infty)$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增；………5 分

综上所述，$a>0$，$f(x)$在$\left(0,\frac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a},+\infty\right)$上单调递减；

$a=0$，$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减；

$-\frac{1}{2}<a<0$，$f(x)$在$\left(0,\frac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a}\right)$和$\left(\frac{-2-\sqrt{4+8a}}{4a},+\infty\right)$上单调递增，

在$\left(\frac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a},\frac{-2-\sqrt{4+8a}}{4a}\right)$上单调递减；

$a\le-\frac{1}{2}$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.　　　　………6 分

（2）因为对任意的$b\in\left(-\infty,-\frac{3}{e}\right)$，方程$f(x)=0$恒有2个不等的实根

等价于$\frac{\ln x-2}{x}=ax+b$有两解　　　　………7 分

令$g(x)=\frac{\ln x-2}{x}$，$x>0$有$g'(x)=\frac{3-\ln x}{x^2}$，$x>0$

$\therefore g'(e^3)=0$；$g(x)$在$(0,e^3)$递增，$(e^3,+\infty)$递减；　　　　………8 分

$x\to0$，$g(x)\to-\infty$；

$x\to+\infty$，$g(x)\to0$；　　　　……… ………9 分

$\therefore$由图象知要使$g(x)=\frac{\ln x-2}{x}$的图像和$y=ax+b$的图像有两个交点

$a>0$，过 $\left(0,-\dfrac{3}{e}\right)$ 作切线时，斜率 a 最大. ………… ………10 分

设切点为 (x_0,y_0)，有 $y=\dfrac{3-\ln x_0}{x_0^2}x+\dfrac{2\ln x_0-5}{x_0}$，

$\therefore \dfrac{2\ln x_0-5}{x_0}=-\dfrac{3}{e}$

$\therefore x_0=c$

此时斜率 a 取到最大 $\dfrac{2}{e^2}$ ………… ………11 分

$\therefore 0<a\le\dfrac{2}{e^2}$ ………… ………12 分