2018 北京市房山区高三（一模）

数　　学（文）

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）若集合 $M=\{-1,0,1,2\}$，$N=\{y\,|\,y=2x+1,x\in M\}$，则集合 $M\cap N$ 等于

（A）$\{-1,1\}$　　（B）$\{1,2\}$　　（C）$\{-1,1,3,5\}$　　（D）$\{-1,0,1,2\}$

（2）已知 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\le 3 \\ y\ge x \\ x\ge 1 \end{cases}$，那么 $x+3y$ 的最大值是

（A）4　　（B）6　　（C）7　　（D）8

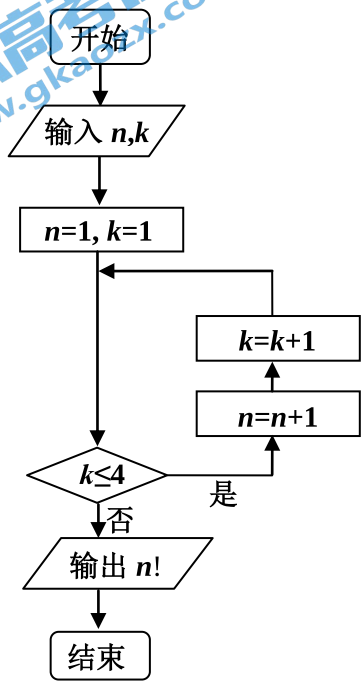
（3）下列函数中，与函数 $y=x^3$ 的单调性和奇偶性相同的函数是

（A）$y=\sqrt{x}$　　（B）$y=\ln x$　　（C）$y=\tan x$　　（D）$y=e^x-e^{-x}$

（4）阶乘(factorial)是基斯顿·卡曼于1808年发明的运算符号，n 的阶乘 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$. 例如：$2!=1\times2$，$3!=1\times2\times3$. 执行如图所示的程序框图．则输出 $n!$ 的值是

（A）2　　（B）6

（C）24　　（D）120

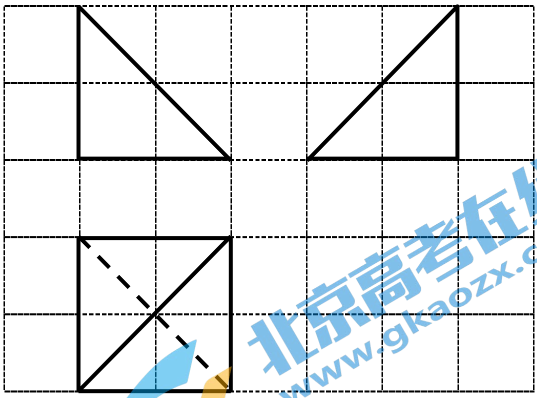


（5）圆 $x^2+y^2=4$ 被直线 $y=-\sqrt{3}x+b$ 截得的劣弧所对的圆心角的大小为 120°，则 b 的值

（A）±2　　（B）$\pm2\sqrt{3}$

（C）2　　（D）$\sqrt{3}$

（6）如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为



（A）$8+4\sqrt{2}$

（B）$2+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

（C）$2+6\sqrt{3}$

（D）$2+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

（7）“$a>2$”是“函数 $f(x)=\log_a x(a>0,\text{且}a\neq 1)$ 的图象与函数 $f(x)=x^2-4x+4$ 的图象的交点个数为2个的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）若五位同学围成一圈依序循环报数，规定：①第一位同学首次报出的数为2．第二位同学首次报出的数也为2，之后每位同学所报出的数都是前两位同学所报出的数之和；②若报出的数为3的倍数，则报该数的同学需拍手一次，当第27个数被报出时，五位同学拍手的总次数为

（A）7　　（B）6　　（C）5　　（D）4

第二部分　（非选择题　共110分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）抛物线 $x^2=4y$ 的焦点到双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的渐近线的距离为_____.

（10）如果复数 $(2+\mathrm{i})(1-m\mathrm{i})$（其中i是虚数单位）是实数，则实数 $m=$_____.

（11）已知命题 $p:\forall x\in(0,+\infty)$，$2^x>1$，则 $\neg p$ 为_____.

（12）已知 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $|\vec{a}-2\vec{b}|=$_____.

（13）已知函数 $f(x)$ 同时满足以下条件：　周期为 π；　值域为 $[0,1]$；　$f(x)-f(-x)=0$.

试写出一个满足条件的函数解析式 $f(x)=$_____.

（14）设函数 $f(x)=\begin{cases}x+a,-2\le x<0,\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x,0\le x<1.\end{cases}$ 则

① $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=$_____;

② 若 $f(x)$ 有最小值，且无最大值，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（15）（本小题13分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_3+a_8=37$，$a_7=23$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=a_n+2^n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

（16）（本小题13分）

在△ ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\cos 2B+\cos B=0$.

（Ⅰ）求角 B 的值；

（Ⅱ）若 $b=\sqrt{7}$，$a+c=5$，求△ ABC 的面积.

（17）（本小题14分）

2017 年冬，北京雾霾天数明显减少．据环保局统计三个月的空气质量，达到优良的天数超过 70 天，重度污染的天数仅有 4 天．主要原因是政府对治理雾霾采取了有效措施，如①减少机动车尾气排放；②实施了煤改电或煤改气工程；③关停了大量的排污企业；④部分企业季节性的停产．为了解农村地区实施煤改气工程后天燃气使用情况，从某乡镇随机抽取100 户，进行月均用气量调查，得到的用气量数据（单位：千立方米）均在区间 $(0,5]$ 内，将数据按区间列表如下：

分组	频数	频率
$(0,1]$	14	0.14
$(1,2]$	x	m
$(2,3]$	55	0.55
$(3,4]$	4	0.04
$(4,5]$	2	0.02
合计	100	1

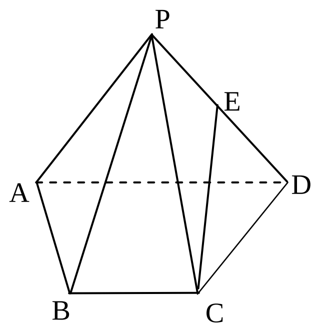
（Ⅰ）求表中 x，m 的值；

（Ⅱ）若同组中的每个数据用该组区间的中点值代替，估计该乡镇每户月平均用气量；

（Ⅲ）从用气量高于 3 千立方米的用户中任选 2 户，进行燃气使用的满意度调查，求这 2 户用气量处于不同区间的概率.

（18）（本小题14分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，△ PAD 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，$PD=CD=\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{3}$，$BC \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}AD$，$CD\perp AD$.



（Ⅰ）若 E 为 PD 中点，求证：$CE\mathbin{/\!/}$ 平面 PAB；

（Ⅱ）求证：$CD\perp$ 平 面 PAD；

（Ⅲ）求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

（19）（本小题13分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $\left(0,-1\right)$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 $F\ \left(1,0\right)$ 作斜率为 $k\left(k\neq 0\right)$ 的直线 l，l 与椭圆 C 交于 M，N 两点，若线段 MN 的垂直平分线交 x 轴于点 P，求证：$|MN|=2\sqrt{2}|PF|$.

（20）（本小题13分）

已知函数 $f(x)=(2x+1)\ln x-\dfrac{1}{2}x^2-2x$，$l$ 为曲线 $C:y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线.

（Ⅰ）求 l 的方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）设 $g(x)=f'(x)+x-a$，若关于 x 的不等式 $g(x)<0$ 有解，求实数 a 的取值范围.

数学试题答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	A	C	D	D	A	D	A	B

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）（0，1）　（10）$\frac{1}{2}$　（11）$\exists x\in(0,+\infty),2^x\le 1$　（12）$\sqrt{13}$

（13）$y=|\sin x|$ 或 $y=|\cos x|$ 等　（14）$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$(1,\frac{5}{2}]$

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（15）（本小题13分）

（Ⅰ）由等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_3+a_8=37$，$a_7=23$.

得 $a_1=5$，所以 $d=\frac{32-5}{10-1}=3$.

所以 $a_n=5+3(n-1)=3n+2$.　…………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，

$$S_n=\frac{n(5+3n+2)}{2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=\frac{n(7+3n)}{2}+2^{n+1}-2$$　…………13 分

（16）（本小题13分）

（Ⅰ）解：由已知得 $2\cos^2 B+\cos B-1=0$，

即 $(2\cos B-1)(\cos B+1)=0$.

解得 $\cos B=\frac{1}{2}$，或 $\cos B=-1$.

因为 $0<B<\pi$，故舍去 $\cos B=-1$.

所以 $B=\frac{\pi}{3}$.　…………6 分

（Ⅱ）解：由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.

将 $B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{7}$ 代入上式，整理得 $(a+c)^2-3ac=7$.

因为 $a+c=5$，

所以 $ac=6$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.　　　　　　…………13 分

(17) 解：(Ⅰ) $x=100-75=25$，$m=\frac{25}{100}=0.25$

(Ⅱ) $\frac{0.5\times14+1.5\times25+2.5\times55+3.5\times4+4.5\times2}{100}=2.05$

(Ⅲ) 设 (3, 4] 组内数据为 a, b, c, d (4, 5] 组内数据为：e, f

从月均用气量高于 3 千立方米的中随机抽取 2 户的基本事件空间为

$\Omega=\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),(c,d),(c,e),(c,f),(d,e),(d,f),(e,f)\}$

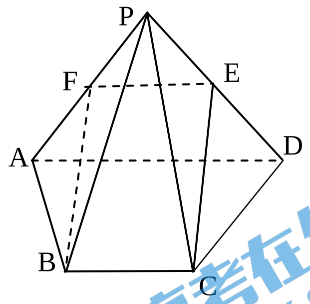
共有 15 种情况,

设随机抽取 2 户不在同一组为事件 A

则 A 中共有：$(a,e),(a,f),(b,e),(b,f),(c,e),(c,f),(d,e),(d,f)$ 共有 8 种情况

$P(A)=\frac{8}{15}$　　　　　　…………13 分

(18)　证明：(Ⅰ) 法 1：取 PA 的中点 F，连接 EF，BF



在 △APD 中，E F 分别为 PA，PD 的中点，

$\therefore EF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD$

$\because BC \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD$

$\therefore EF \mathrel{\underline{\parallel}} BC$

∴ 四边形 FECB 为平行四边形

∴ FB//CE

$\because CE \not\subset$ 面PAB, $BF \subset$ 面PAB

$\therefore CE\,//$ 平面 PAB　　　　　　…………5 分

法 2：作 AD 的中点 O，连接 EO，CO

∴ 在△APD 中，$EO \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AP$

$\because BC \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD$

$\therefore BC \mathrel{\underline{\parallel}} AO$

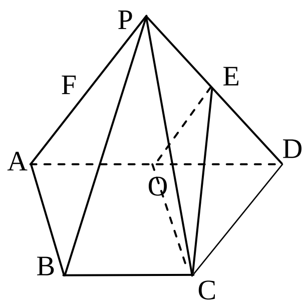
∴ 四边形 ABCO 为平行四边形

∴ AB//CO

$\because CO \cap EO = O$

∴ 面 EOC//面 PAB

$\because CE \subset$ 面EOC



$\therefore CE // 面PAB$

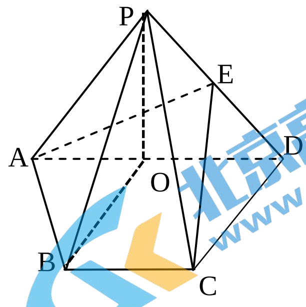
（Ⅱ）取 AD 的中点 O，连接 PO，OB

$\because BC \underline{//} \frac{1}{2}AD$ ，$O为AD的中点$

$\therefore BC \underline{//} OD$

$\therefore 四边形OBCD为平行四边形$

$\therefore BO \underline{//} CD$



$\because CD \perp OD \therefore BO \perp OD$

由题 $BO=\sqrt{2}, PO=1, PB=\sqrt{3}$

$\therefore PB^2 = PO^2 + OB^2 \therefore PO \perp OB$

$\because PO \cap OD = O$

$\therefore BO \perp 面PAD$

$\therefore CD \perp 面PAD$ …………5 分

（Ⅲ）在等腰直角三角形 PAD 中，O 为 AD 的中点

$\therefore PO \perp AD$

又 $AD \cap OB = O \therefore PO \perp 面ABCD \therefore PO为四棱锥P-ABCD的高$

$\therefore V = \frac{1}{3} PO \cdot S_{梯形ABCD} = \frac{1}{3} \cdot (1+2) \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ …………4 分

（19）（Ⅰ）根据题意

$\begin{cases} b=1 \\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=1 \end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ …………5 分

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2=1 \\ y=k(x-1) \end{cases}$

得 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$

由 $\Delta>0$ 得 $k\in R$ 且 $k\neq 0$

设 $M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$，线段 MN 中点 $Q(x_0,y_0)$

那么 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k^2}{2k^2+1},y_0=k(x_0-1)=\frac{-k}{2k^2+1}$$

设 $P(p,0)$，根据题意 $PQ\perp MN$

所以 $\dfrac{y_0}{x_0-p}=\dfrac{\dfrac{-k}{2k^2+1}}{\dfrac{2k^2}{2k^2+1}-p}=-\dfrac{1}{k}$， 得 $p=\dfrac{k^2}{2k^2+1}$

所以 $|PF|=1-\dfrac{k^2}{2k^2+1}=\dfrac{k^2+1}{2k^2+1}$

$$|MN|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

$$=\sqrt{(1+k^2)[(\frac{4k^2}{2k^2+1})^2-\frac{4(2k^2-2)}{2k^2+1}]}=\frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{2k^2+1}$$

$|MN|=2\sqrt{2}|PF|$ …………14 分

(20) 解：（Ⅰ） $f'(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-x$.

所以 $f(1)=-\dfrac{5}{2}$， 切点为 $(1,-\dfrac{5}{2})$.

$f'(1)=0$

所以 L 的方程为 $y=-\dfrac{5}{2}$ ………………………5 分

（Ⅱ）定义域为 $\{x|x>0\}$

$f'(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-x$

设 $g(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-x$

$g'(x)=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\le 0$ 恒成立

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且 $g(1)=0$

则当 $x\in(0,1)$ 时 $g(x)>0$， 即 $f'(x)>0$

则当 $x\in(1,+\infty)$ 时 $g(x)<0$， 即 $f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$， $f(x)$ 的单调递减区间 $(1,+\infty)$.

…………………… 9 分

（III）因为 $g(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-a$

$$g^{'}(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x-1}{x^2}$$

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时 $g^{'}(x)<0$ ，当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时 $g^{'}(x)>0$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g(\dfrac{1}{2})=2\ln\dfrac{1}{2}+2-a=2-2\ln 2-a$

所以若关于 x 的不等式 $g(x)<0$ 有解，则 $2-2\ln 2-a<0$，即 $a>2-2\ln 2$

…………………… 13 分