2023 北京四中高一（下）期中

数　　学

（试卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟）

I卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项正确）

1. 已知角 θ 的终边经过点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，则 $\cos\theta$ 等于（　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 已知 $|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{CD}|=1$，$<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}>=\frac{\pi}{6}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 0

3. 函数 $y=\sin x$，$x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 的值域是（　）

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

C. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$　　D. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

4. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 为单位向量，其夹角为 60°，则 $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=$

A. －1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

5. 已知 $\tan\alpha=2$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$（　）

A. －3　　B. 1　　C. 3　　D. 不存在

6. 若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，则下列关系中正确的是（　）

A. $\tan\alpha<\cos\alpha$　　B. $\tan\alpha<\sin\alpha$

C. $\sin\alpha<\cos\alpha$　　D. $\sin\alpha>\cos\alpha$

7. 如果$\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量，则“存在负数λ，使得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$”是“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$”的（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 下列命题中的假命题是（　）

A. 函数$y=1-2\sin^2\pi x$的图象关于y轴对称

B. 函数$y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称

C. 函数$y=\tan 2\pi x$的最小正周期为1

D. 函数$y=\sin\pi x\cos\pi x$是奇函数

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

9. $\cos\frac{4\pi}{3}=$________.

10. 已知θ为第二象限角，且$\sin\theta=\frac{2}{3}$，则$\cos\theta=$______，$\sin(\theta+\pi)=$______.

11. 若$\tan\alpha=3$，则$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=$________.

12. 已知点$P(\cos\theta,\sin\theta)$，点$A(-2,0)$，O为原点，则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$的最小值为_______.

13. 当$x=\theta$时，函数$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$取得最大值，则$\theta$的一个取值为__________.

14. 自出生之日起，一个人的体力、情绪、智力等生理、心理状况就呈周期变化．心理学家经过统计发现，人体节律可以简单地分为体力节律、情绪节律和智力节律，在设计引入一些数据量化后，人的体力、情绪、智力的变化可以近似地分别用函数：$f_1(x)=A_1\sin\frac{2\pi}{23}x+M_1$，$f_2(x)=A_2\sin\frac{\pi}{14}x+M_2$，$f_3(x)=A_3\sin\frac{2\pi}{33}x+M_3$进行描述，其中变量$x$为出生之后的时间天数，规定$x=1$表示出生当天.

（1）情绪节律的时间周期为_____________天；

（2）已知$A_i>0$（$i=1$，2，3），心理学家认为，某年某月某一天对某人来说，若这天他对应的某种节律函数值满足$f_i(x)-M_i>0$（$i=1$，2，3），则判断他这天该项人体节律处于高潮期；若这天对应的该节律函数值满足$f_i(x)-M_i<0$（$i=1$，2，3）．则判断他这天该项人体节律处于低潮期；若$f_i(x)-M_i=0$（$i=1$，2，3），则判断这天他该项人体节律处于临界日．一些心理医生通常就根据“$f_i(x)-M_i$”（$i=1$，2，3）运算结果的正负情况，对就诊者提出生活学习的活动建议.

小明同学于2007年4月27日出生，那么今天（2023年4月27日）他的人体节律处于高潮期的有_____________.（填序号即可）

①体力节律　　②情绪节律　　③智力节律

注：2007 年以来有 4 个闰年，分别是 2008 年、2012 年、2016 年、2020 年.

三、解答题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

15. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{OB}=\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，$\overrightarrow{OC}=\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{7}{5}\right)$.

（1）求 $|\overrightarrow{OB}|$ 与 $|\overrightarrow{OC}|$ 的值；

（2）求 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角；

（3）若 $\overrightarrow{OD}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，$m$，$n\in\mathrm{R}$，且 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，求 $m-n$ 的值.

16. 已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$，从下列两个条件：

① $f(x)$ 图象的一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{12}$；

② $f(0)=\sqrt{3}$ 中任选一个作为已知，并解决下列问题

（1）求出函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）用五点法作 $f(x)$ 在一个周期内的图象，并直接写出函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（3）直接写出由 $y=\sin 2x$ 的图象经过怎样的图象变换得到 $f(x)$ 的图象.

（注：如果选择条件①和条件②分别作答，按第一个解答计分）

17. 已知向量 $\vec{a}=(\cos x,\sin x)$，$\vec{b}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，记 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

（1）求方程 $f(x)=1$ 的解集；

（2）若函数 $g(x)=f(x)\sin x$，求 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上的最值.

II卷

一、选择题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项正确）

18. 设 ΔABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $a=3,b=\sqrt{3},A=\dfrac{\pi}{3}$，则 $B=$

A. $\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{5\pi}{6}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

19. 设函数 $f(x)=\left|\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$，则下列说法正确的是（　）.

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(x)$ 的最小正周期是 π

C. $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right]$上是增函数

D. $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$对称

20. 设$a=\frac{\pi}{6}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 59°-\frac{1}{2}\cos 59°$，$c=2\cos^2 31°-1$，则（　）

A. $c<a<b$

B. $b<c<a$

C. $a<b<c$

D. $c<b<a$

二、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

21. 已知$f(\sin x)=1-\cos 2x$，则$f\left(\frac{1}{2}\right)=$____________.

22. 在$\triangle ABC$中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则$AB=$______.

23. 若整数m满足不等式$x-\frac{1}{2}\le m<x+\frac{1}{2},x\in R$，则称$m$为$x$的“亲密整数”，记作$\{x\}$，即$\{x\}=m$，已知函数$f(x)=x-\{x\}$. 给出以下四个命题：

① 函数$y=f(x),x\in R$是周期函数且其最小正周期为1；

② 函数$y=f(x),x\in R$的图象关于点$(k,0),k\in Z$中心对称；

③ 函数$y=f(x),x\in R$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上单调递增；

④ 方程$f(x)=\frac{1}{2}\sin(\pi\cdot x)$在$[-2,2]$上共有 7 个不相等的实数根.

其中正确命题的序号是____. （写出所有正确命题的序号）.

三、解答题（本大题共 2 小题，共 20 分）

24. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c, 已知$b^2+c^2=a^2+bc$.

（1）求A的大小；

（2）如果$\cos B=\frac{\sqrt{6}}{3},b=2$，求$\triangle ABC$的面积.

25. 给定正整数$n\ge 2$，设集合$M=\{\alpha|\alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,\cdots,n\}$. 对于集合$M$中的任意元素$\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$\gamma=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记$\beta\cdot\gamma=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. 设$A\subseteq M$，且集合$A=\{\alpha_i|\alpha_i=(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{in}),i=1,2,\cdots,n\}$，对于 A 中任意元素$\alpha_i,\alpha_j$，若$\alpha_i\cdot\alpha_j=\begin{cases}p, & i=j,\\ 1, & i\ne j,\end{cases}$则称 A 具有性质$T(n,p)$.

（1）判断集合$A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$是否具有性质$T(3,2)$？说明理由；

（2）判断是否存在具有性质$T(4,p)$的集合 A，并加以证明；

（3）若集合 A 具有性质$T(n,p)$，证明：$t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}=p\ (j=1,2,\cdots,n)$.

参考答案

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项正确）

1.【答案】B

【解析】

【分析】注意到 P 在单位圆上，根据三角函数的定义即可求解.

【详解】$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=1$，故 P 在单位圆上，根据三角函数值的定义，P 的横坐标的值即为 $\cos\theta$，

故 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：B

2.【答案】A

【解析】

【分析】根据向量数量积的计算方法计算即可.

【详解】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}>=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：A

3.【答案】D

【解析】

【分析】根据正弦函数的值域求解即可.

【详解】因为函数 $y=\sin x$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递减，

所以当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数取得最大值1，

又当 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$y=\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当 $x=\dfrac{5\pi}{6}$ 时，$y=\sin x=\dfrac{1}{2}$，

所以函数 $y=\sin x$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$，

所以函数 $y=\sin x$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 的值域是 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

故选：D.

4.【答案】B

【解析】

【详解】$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=2\times|\vec{a}|\times|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-|\vec{b}|^2$

$=2\times1\times1\times\cos60^\circ-1=0$.

故选：B.

5.【答案】A

【解析】

【分析】利用两角和的正切公式即可求解.

【详解】因为 $\tan\alpha=2$，

则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{2+1}{1-2}=-3$.

故选：A

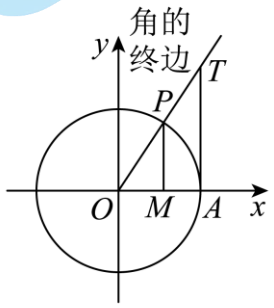
6.【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，在坐标系画出单位圆，并且作出角 α 的正弦线、余弦线和正切线，再由 α 的范围比较三角函数线的大小即可.

【详解】由三角函数线定义作出如图：

OP 是角 α 的终边，圆 O 是单位圆，



则 $AT=\tan\alpha>1$，$OM=\cos\alpha$，$MP=\sin\alpha$，

$\because\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore OM<MP<1$，即 $\tan\alpha>\sin\alpha>\cos\alpha$.

故选：D

7.【答案】B

【解析】

【分析】根据充分性必要性的定义，结合向量的运算进行判断.

【详解】若存在负数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}+\lambda\vec{a}|=|1+\lambda||\vec{a}|$，$|\vec{a}|-|\vec{b}|=|\vec{a}|-|\lambda\vec{a}|=(1+\lambda)|\vec{a}|$，注意到 $|1+\lambda|=1+\lambda$ 不一定成立，于是充分性不成立；

若 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$，两边平方可得，$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|+\vec{b}^2$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$，

根据数量积的定义，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，即 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=-1$，故 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 夹角为 π，此时 $\vec{b}=-\vec{a}$，于是必要性成立.

故“存在负数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$”是“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$”的必要不充分条件.

故选：B

8.【答案】ABD

【解析】

【分析】根据正余弦函数及正切函数的性质注意分析判断即可.

【详解】对于 A，$y=f(x)=1-2\sin^2\pi x=\cos 2\pi x$，

因为 $f(-x)=\cos 2\pi x=f(x)$，

所以函数 $y=1-2\sin^2\pi x$ 为偶函数，图象关于 y 轴对称，故 A 正确；

对于 B，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$y=2\cos\frac{\pi}{2}=0$，

所以函数 $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，故 B 正确；

对于 C，函数 $y=\tan 2\pi x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$，故 C 错误；

对于 D，$y=f(x)=\sin\pi x\cos\pi x=\frac{1}{2}\sin 2\pi x$，

因为 $f(-x)=\frac{1}{2}\sin(-2\pi x)=-\frac{1}{2}\sin 2\pi x$，

所以函数 $y=\sin\pi x\cos\pi x$ 是奇函数，故 D 正确.

故选：ABD.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9.【答案】$-\frac{1}{2}$ ##-0.5

【解析】

【分析】利用诱导公式直接计算即可.

【详解】$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

10.【答案】 ①. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ②. $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】根据商数关系即可求得$\cos\theta$，利用诱导公式即可求得$\sin(\theta+\pi)$.

【详解】因为θ为第二象限角，且$\sin\theta=\frac{2}{3}$，

所以$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta=-\frac{2}{3}$.

故答案为：$-\frac{\sqrt{5}}{3}$；$-\frac{2}{3}$.

11.【答案】$\frac{3}{5}$##0.6

【解析】

【分析】分子分母同时除以$\cos\alpha$即可.

【详解】对待求表达式分子分母同时除以$\cos\alpha$，即$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha+2}=\frac{3}{5}$.

故答案为：$\frac{3}{5}$

12.【答案】2

【解析】

【分析】由题可得$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=2\cos\theta+4$，即可得答案.

【详解】由题，$\overrightarrow{AO}=(2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(\cos\theta+2,\sin\theta)$.则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=2\cos\theta+4$.

则当$\theta=\pi+2k\pi,k\in Z$，即$\cos\theta=-1$时，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$有最小值 2.

故答案为：2

13.【答案】$\frac{5\pi}{6}$（答案不唯一，只要满足$\theta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$即可）

【解析】

【分析】先利用辅助角公式化一，再根据正弦函数的性质即可得解.

【详解】$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，即$x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$时，函数$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$取得最大值，

所以θ的一个取值可以为$\frac{5\pi}{6}$.

故答案为：$\frac{5\pi}{6}$.（答案不唯一，只要满足$\theta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$即可）

14.【答案】 ①. 28 ②. ①③

【解析】

【分析】（1）根据正弦函数的周期性即可得解；

（2）先求出小明同学在 2023 年 4 月 27 日是第多少天，然后在判断 $f_i(x)-M_i$ 的符号即可得解.

【详解】（1）情绪节律对应的函数为 $f_2(x)=A_2\sin\frac{\pi}{14}x+M_2$，

则周期为 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{14}}=28$ 天；

（2）小明同学在 2023 年 4 月 27 日是第 $16\times365+4+1=5845$ 天，

则 $f_1(5845)-M_1=A_1\sin\left(\frac{2\pi}{23}\times5845\right)=A_1\sin\left(254\times2\pi+\frac{6\pi}{23}\right)=A_1\sin\frac{6\pi}{23}>0$，

所以体力节律处于高潮期，

$f_2(5845)-M_2=A_2\sin\left(\frac{\pi}{14}\times5845\right)=A_2\sin\left(416\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=-A_2<0$，

所以情绪节律处于低潮期，

$f_3(5845)-M_3=A_3\sin\left(\frac{2\pi}{33}\times5845\right)=A_3\sin\left(177\times2\pi+\frac{8\pi}{33}\right)=A_3\sin\frac{8\pi}{33}>0$，

所以智力节律处于高潮期，

综上所述，①③处于高潮期.

故答案为：28；①③.

【点睛】关键点点睛：求出小明同学在 2023 年 4 月 27 日是第多少天，是解决本题的关键.

三、解答题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

15.【答案】（1）$\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{2}$；

（2）45°；

（3）0

【解析】

【分析】（1）直接利用平面向量模长的坐标公式计算即可；

（2）直接利用平面向量夹角的坐标公式计算即可；

（3）根据平面向量数量积的坐标公式待定系数计算即可.

【小问 1 详解】

由 $\overrightarrow{OB}=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，$\overrightarrow{OC}=\left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$

可得 $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=1$，$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2}=\sqrt{2}$；

【小问 2 详解】

设 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 α，则 $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}=\dfrac{-\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{7}{5}}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^{\circ}$

【小问 3 详解】

由题意可得 $\overrightarrow{OD}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=\left(m-\frac{3}{5}n,\frac{4}{5}n\right)$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$，则

$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow-\frac{8}{5}\times\left(m-\frac{3}{5}n\right)+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}n=-\frac{8}{5}(m-n)=0$，所以 $m-n=0$.

16.【答案】（1） $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

（2）答案见解析　（3）答案见解析

【解析】

【分析】（1）若选①，由 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 可得答案；若选②，由 $f(0)=2\sin\varphi\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ 可得答案；（2）分别令 $2x+\frac{\pi}{3}=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi,2\pi$ 可得画图所需 5 点坐标，即可得图象，后写出单调递增区间即可；（3）由图象变换知识可得答案.

【小问 1 详解】

若选①，则 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in Z$.

因 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则 $k=0$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$.此时，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；

若选②，则 $f(0)=2\sin\varphi\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，此时 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

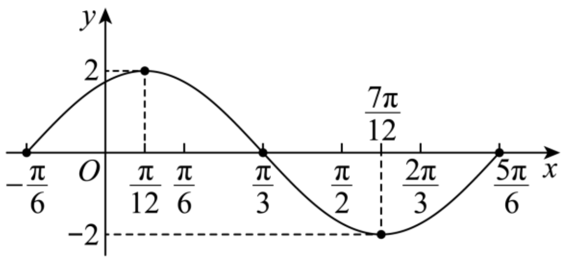
【小问 2 详解】

现列相应表格如下：

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	2	0	-2	0

则对应五点为 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right),\left(\frac{\pi}{12},2\right),\left(\frac{\pi}{3},0\right),\left(\frac{7\pi}{12},-2\right),\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$.

将其画在同一坐标系下，再用光滑曲线相连可得图象如下：



$f(x)$ 的单调递增区间为：$\left(-\frac{5\pi}{12}+k\pi, \frac{\pi}{12}+k\pi\right), k \in \mathrm{Z}$.

【小问 3 详解】

将 $y=\sin 2x$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位即可.

17. 【答案】(1) $\left\{x \middle| x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi \text{ 或 } x+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right\}, k \in \mathrm{Z}$

(2) $g(x)_{\max}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}, g(x)_{\min}=0$

【解析】

【分析】(1) 根据数量积得坐标表示结合辅助角公式化一，再根据正弦函数的性质即可得解；

(2) 先根据二倍角的正弦公式、降幂公式及辅助角公式化一，再根据正弦函数的性质即可得解.

【小问 1 详解】

$f(x)=\vec{a} \cdot \vec{b}=\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

由 $f(x)=1$，得 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$,

所以 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k \in \mathrm{Z}$,

所以 $x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$ 或 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}+2k\pi, k \in \mathrm{Z}$,

所以方程 $f(x)=1$ 的解集为 $\left\{x \middle| x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi \text{ 或 } x+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right\}, k \in \mathrm{Z}$;

【小问 2 详解】

$g(x)=f(x)\sin x=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sqrt{2}\sin^2 x$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\sqrt{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$,

当 $x \in\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{4} \in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$,

所以当 $g\left(x\right)_{\max}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, g\left(x\right)_{\min}=0$.

II卷

一、选择题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项正确）

18.【答案】B

【解析】

【分析】

根据正弦定理求解即可得到所求结果.

【详解】由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

$\therefore \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\dfrac{1}{2}$.

又 $b<a$，

$\therefore B$ 为锐角，

$\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$.

故选 B.

【点睛】在已知两边和其中一边的对角解三角形时，需要进行解的个数的讨论，解题时要结合三角形中的边角关系，即“大边（角）对大角（边）”进行求解，属于基础题.

19.【答案】C

【解析】

【分析】运用函数奇偶性的定义，结合诱导公式即可判断 A；由周期函数的定义，结合诱导公式即可判断 B；根据复合函数单调性以及函数单调性规律即可判断 C；根据函数 $f\left(x\right)=\left|\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$ 的图象即可判断 D.

【详解】对于 A： $f\left(x\right)=\left|\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$ 的定义域为 R，

$\therefore f\left(-x\right)=\left|\sin\left[2\left(-x\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]\right|=\left|-\sin 2x+\dfrac{\pi}{3}\right|=\left|\sin 2x-\dfrac{\pi}{3}\right|\neq f\left(x\right)$

$\therefore A$ 错误；

对于 B： $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]\right|=\left|\sin\left(2x+\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$

$=\left|\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right|=f(x)$

$\therefore f(x)$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$，B错误；

对于C：$\because x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right]$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$

$\therefore g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right]$上为负，且是减函数

$\therefore f\quad x$ 在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right]$上是增函数，C正确；

对于D：$f(x)=\left|\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$的图象恒在$x$轴上方，

所以$f(x)$的图象不关于点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$对称，D错误.

故选：C.

20.【答案】D

【解析】

【分析】用辅助角公式可将b化为$b=\sin 29°$，用余弦二倍角公式和诱导公式可将c化为$c=\cos 62°=\sin 28°$后，即可比较大小

【详解】因为$b=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 59°-\frac{1}{2}\cos 59°=\sin(59°-30°)=\sin 29°$，$c=\cos 62°=\sin 28°$，

又$\sin 28°<\sin 29°<\sin 30°=\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$，所以$c<b<a$.

故选：D.

二、填空题（本大题共3小题，每小题5分，共15分）

21.【答案】$\frac{1}{2}$##0.5

【解析】

【分析】利用特殊角的三角函数值，取x使得$\sin x=\frac{1}{2}$即可.

【详解】由题意，取$x=\frac{\pi}{6}$，则$f\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$

22.【答案】$4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

利用二倍角的余弦公式可计算出 $\cos C$ 的值，再利用余弦定理可求得 AB 边的长.

【详解】由二倍角的余弦公式得 $\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$，

由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C=5^2+1^2-2\times5\times(-1)\times\left(-\frac{3}{5}\right)=32$，

因此，$AB=4\sqrt{2}$.

故答案为：$4\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查利用余弦定理解三角形，同时也考查了二倍角余弦公式的应用，考查计算能力，属于基础题.

23.【答案】①④

【解析】

【分析】①根据周期函数的定义判断；②取两个特殊值计算 $f(k-\frac{1}{2})=f(k+\frac{1}{2})$ 可判断对称性；

③由②得 $f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，从而不单调；④可求出具体的解进行判断即可.

【详解】① $f(x+1)=(x+1)-\{x+1\}=x-\{x\}=f(x)$，$f(x)$ 是周期函数其最小正周期为1．正确；

② $f(k-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$f(k+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 的图象不可能关于点 $(k,0)$ 对称，错误；

③ $f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，因此 $y=f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 不是单调递增的，错误；

④ 根据 $f(x)$ 的定义，$f(x)=\frac{1}{2}\sin(\pi x)$ 在 $[-2,2]$ 的解为 -2，$-\frac{3}{2}$，-1，0，$\frac{1}{2}$，1，2 共7个，正确.

故答案为：①④.

三、解答题（本大题共 2 小题，共 20 分）

24.【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$；(2) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 利用余弦定理的变形：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 即可求解.

(2) 利用正弦定理求出 $a=3$，再根据三角形的内角和性质以及两角和的正弦公式求出 $\sin C$，由三角形的面积公式即可求解.

【详解】(1) $b^2+c^2=a^2+bc$。

由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，

又因为$0<A<\pi$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由$\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$0<B<\pi$，

所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

在$\triangle ABC$中，由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

所以$a=\dfrac{2\sin A}{\sin B}=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=3$，

$\sin C=\sin\left(A+B\right)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$，

所以$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本题考查了余弦定理、正弦定理解三角形、三角形的面积公式，需熟记公式，属于基础题.

25.【答案】（1）具有，理由见解析

（2）不存在，证明见解析

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据集合具有性质$T(n,p)$的特征，即可根据集合A中的元素进行检验求解，

（2）假设集合A具有性质$T(4,p)$，分别考虑$p=1,2,3,4$时，集合A中的元素，即可根据$T(n,p)$的定义求解.

（3）根据假设存在j使得$c_j\geqslant p+1$，考虑当$c_1=n$时以及$p+1\leqslant c_1<n$时，分量为1的个数即可讨论求解.

【小问1详解】

因为$(1,1,0)\cdot(1,1,0)=1\times1+1\times1+0\times0=2$，同理$(1,0,1)\cdot(1,0,1)=(0,1,1)\cdot(0,1,1)=2$.

又$(1,1,0)\cdot(1,0,1)=1\times1+1\times0+0\times1=1$，同理$(1,1,0)\cdot(0,1,1)=(1,0,1)\cdot(0,1,1)=1$.

所以集合$A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$具有性质$T(3,2)$.

【小问2详解】

当$n=4$时，集合A中的元素个数为4．由题设$p\in\{0,1,2,3,4\}$.

假设集合A具有性质$T(4,p)$，则

①当$p=0$时，$A=\{(0,0,0,0)\}$，矛盾.

②当$p=1$时，$A=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$，不具有性质$T(4,1)$，矛盾.

③当 $p=2$ 时， $A\subseteq\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$.

因为 $(1,1,0,0)$ 和 $(0,0,1,1)$ 至多一个在 A 中； $(1,0,1,0)$ 和 $(0,1,0,1)$ 至多一个在 A 中；

$(1,0,0,1)$ 和 $(0,1,1,0)$ 至多一个在 A 中，故集合 A 中的元素个数小于 4 ，矛盾.

④当 $p=3$ 时， $A=\{(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$ ，不具有性质 $T(4,3)$ ，矛盾.

⑤当 $p=4$ 时， $A=\{(1,1,1,1)\}$ ，矛盾.

综上，不存在具有性质 $T(4,p)$ 的集合 A .

【小问 3 详解】

记 $c_j=t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ ，则 $c_1+c_2+\cdots+c_n=np$.

若 $p=0$ ，则 $A=\{(0,0,\cdots,0)\}$ ，矛盾．若 $p=1$ ，则 $A=\{(1,0,0,\cdots,0)\}$ ，矛盾．故 $p\geq 2$.

假设存在 j 使得 $c_j\geqslant p+1$ ，不妨设 $j=1$ ，即 $c_1\geqslant p+1$.

当 $c_1=n$ 时，有 $c_j=0$ 或 $c_j=1$ $(j=2,3,\cdots,n)$ 成立.

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中分量为1的个数至多有 $n+(n-1)=2n-1<2n\leqslant np$.

当 $p+1\leqslant c_1<n$ 时，不妨设 $t_{11}=t_{21}=\cdots=t_{p+1,1}=1,t_{n1}=0$.

因为 $\alpha_n\cdot\alpha_n=p$ ，所以 α_n 的各分量有 p 个1，不妨设 $t_{n2}=t_{n3}=\cdots=t_{n,p+1}=1$.

由 $i\neq j$ 时， $\alpha_i\cdot\alpha_j=1$ 可知， $\forall q\in\{2,3,\cdots,p+1\}$ ， $t_{1q},t_{2q},\cdots,t_{p+1,q}$ 中至多有1个1，

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p+1}$ 的前 $p+1$ 个分量中，至多含有 $p+1+p=2p+1$ 个1.

又 $\alpha_i\cdot\alpha_n=1$ $(i=1,2,\cdots,p+1)$ ，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p+1}$ 的前 $p+1$ 个分量中，含有

$(p+1)+(p+1)=2p+2$ 个1，矛盾.

所以 $c_j\leqslant p$ $(j=1,2,\cdots,n)$.　因为 $c_1+c_2+\cdots+c_n=np$ ，

所以 $c_j=p$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

所以 $t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}=p$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

【点睛】求解新定义运算有关的题目，关键是理解和运用新定义的概念以及元算，利用化归和转化的数学思想方法，将不熟悉的数学问题，转化成熟悉的问题进行求解.

对于新型集合，首先要了解集合的特性，抽象特性和计算特性，抽象特性是将集合可近似的当作数列或者函数分析.计算特性，将复杂的关系通过找规律即可利用已学相关知识求解.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。