2014 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分）设实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，$abc>0$．求证：

$$ab+bc+ca<\frac{\sqrt{abc}}{2}+\frac{1}{4}.$$

证明 1 若 $ab+bc+ca\le\frac{1}{4}$，则命题已成立.

若 $ab+bc+ca>\frac{1}{4}$，不妨设 $a=\max\{a,b,c\}$，则由 $a+b+c=1$ 知 $a\ge\frac{1}{3}$. 我们有

$$ab+bc+ca-\frac{1}{4}\le\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\le\frac{a}{4}, \qquad ①$$

……………………10 分

以及

$$ab+bc+ca-\frac{1}{4}=a(b+c)-\frac{1}{4}+bc$$

$$=a(1-a)-\frac{1}{4}+bc\le\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+bc=bc, \qquad ②$$

其中①式等号在 $a=\frac{1}{3}$ 时成立，②式等号在 $a=\frac{1}{2}$ 时成立，因此①，②中等号不能同时成立.

……………………30 分

由于 $ab+bc+ca-\frac{1}{4}>0$，将①，②式相乘得

$$\left(ab+bc+ca-\frac{1}{4}\right)^2<\frac{abc}{4},$$

即

$$ab+bc+ca-\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{abc}}{2},$$

从而

$$ab+bc+ca<\frac{\sqrt{abc}}{2}+\frac{1}{4}.\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 40\text{ 分}$$

证明 2 由于$abc>0$，故a,b,c中或者一个正数，两个负数；或者三个都是正数. 对于前一种情形，不妨设$a>0$，$b,c<0$，则

$$ab+bc+ca=b(a+c)+ca<b(a+c)=b(1-b)<0,$$

结论显然成立. ……………………10 分

下面假设$a,b,c>0$，不妨设$a\ge b\ge c$，则$a\ge\frac{1}{3}$，$0<c\le\frac{1}{3}$. 我们有

$$ab+bc+ca-\frac{\sqrt{abc}}{2}=c(a+b)+\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right)$$

$$=c(1-c)+\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right).$$

由于$\sqrt{ab}\ge\sqrt{\frac{b}{3}}\ge\sqrt{\frac{c}{3}}>\frac{\sqrt{c}}{2}$， 且$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=\frac{1-c}{2}$， 因此

$$c(1-c)+\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right)\le c(1-c)+\frac{1-c}{2}\left(\frac{1-c}{2}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3c^2}{4}+\frac{c\sqrt{c}}{4}+\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{c}}{4}.\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 30\text{ 分}$$

于是只需证明$\frac{3c^2}{4}-\frac{c\sqrt{c}}{4}-\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{c}}{4}>0$，即

$$3c\sqrt{c}-c-2\sqrt{c}+1>0.\qquad ①$$

由于$0<c\le\frac{1}{3}$，故

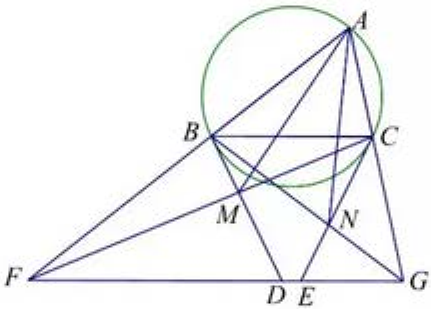
$$\frac{1}{3}-c\ge 0.\qquad ②$$

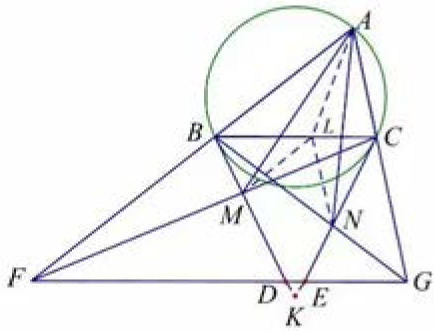
由平均不等式

$$3c\sqrt{c}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ge 3\left(3c\sqrt{c}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{9}\sqrt{c}>2\sqrt{c}.\qquad ③$$

将②，③两式相加即得①式成立，因此原不等式成立. ……………40 分

二、（本题满分 40 分） 如图，在锐角三角形 ABC 中，$\angle BAC \neq 60^\circ$，过点 B,C 分别作三角形 ABC 的外接圆的切线 BD,CE，且满足 $BD=CE=BC$．直线 DE 与 AB,AC 的延长线分别交于点 F,G．设 CF 与 BD 交于点 M，CE 与 BG 交于点 N．证明：$AM=AN$．





证明 1 如图，设两条切线 BD,CE 交于点 K，则 $BK=CK$．结合 $BD=CE$ 可知 $DE \parallel BC$．作 $\angle BAC$ 的平分线 AL 交 BC 于点 L，连接 LM,LN．

由 $DE \parallel BC$ 知，$\angle ABC=\angle DFB$，$\angle FDB=\angle DBC=\angle BAC$，故 ΔABC 与 ΔDFB 相似. ………………10 分

由此并结合 $DE \parallel BC$，$BD=BC$ 及内角平分线定理可得

$$\frac{MC}{MF}=\frac{BC}{FD}=\frac{BD}{FD}=\frac{AC}{AB}=\frac{LC}{LB},$$

因此 $LM \parallel BF$． ………………20 分

同理，$LN \parallel CG$．由此推出

$$\begin{aligned}\angle ALM &= \angle ALB+\angle BLM=\angle ALB+\angle ABL=180^\circ-\angle BAL\\ &=180^\circ-\angle CAL=\angle ALC+\angle ACL=\angle ALC+\angle CLN\\ &=\angle ALN.\end{aligned}$$

………………30 分

再结合 $BC \parallel FG$ 以及内角平分线定理得到

$$\frac{LM}{LN}=\frac{LM}{BF}\cdot\frac{BF}{CG}\cdot\frac{CG}{LN}=\frac{CL}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BL}=\frac{CL}{BL}\cdot\frac{AB}{AC}=1,$$

即 $LM = LN$.

故由 $AL = AL$ ，$\angle ALM = \angle ALN$ ，$LM = LN$ 得到 ΔALM 与 ΔALN 全等，因而 $AM = AN$ ，证毕. ………………40 分

证明 2 由于 BD 和 EC 都是 ω 的切线，故 $\angle DBC = \angle BAC = \angle ECB$. 再由 $BD = CE$ ，可得四边形 $BCED$ 是等腰梯形，从而 $DE \parallel BC$.

由于 $\angle BFD = \angle ABC = B$ ，$\angle FDB = \angle DBC = \angle BAC = A$ ，故 $\Delta DFB \backsim \Delta ABC$.

………………10 分

设三角形 ABC 的三内角分别为 A,B,C ，三条边长分别为 $BC = a$ ，$CA = b$ ，$AB = c$. 由 $\Delta DFB \backsim \Delta ABC$ 有 $\dfrac{FD}{c} = \dfrac{BD}{b} = \dfrac{a}{b}$，可得 $FD = \dfrac{ac}{b}$.

由 $BC \parallel FD$ ，可得 $\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{BC}{FD} = \dfrac{b}{c}$，故由 $BD = a$ 可得

$$BM = \frac{ab}{b+c}. \tag{①}$$

在三角形 ABM 中，$\angle ABM = B + A$，由余弦定理得

$$AM^2 = c^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - \frac{2abc}{b+c}\cos(A+B)$$

$$= c^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} + \frac{2abc}{b+c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{1}{(b+c)^2}\left(c^2(b+c)^2 + a^2b^2 + c(a^2+b^2-c^2)(b+c)\right)$$

$$= \frac{1}{(b+c)^2}\left(b^2c^2 + 2bc^3 + c^4 + a^2b^2 + a^2bc + a^2c^2 + b^3c + b^2c^2 - bc^3 - c^4\right)$$

$$= \frac{1}{(b+c)^2}\left(2b^2c^2 + bc^3 + b^3c + a^2b^2 + a^2c^2 + a^2bc\right). \tag{②}$$

………………30 分

用同样方法计算 CN 和 AN^2 时，只需在上述 BM 与 AM^2 的表达式①，②中将 b,c 交换. 而由②可见 AM^2 的表达式关于 b,c 对称，因此 $AN^2 = AM^2$ ，即 $AM = AN$ ，结论获证. ………………40 分

三、（本题满分 50 分）设 $S=\{1,2,3,\cdots,100\}$．求最大的整数 k，使得 S 有 k 个互不相同的非空子集，具有性质：对这 k 个子集中任意两个不同子集，若它们的交非空，则它们交集中的最小元素与这两个子集中的最大元素均不相同.

解 对有限非空实数集 A，用 $\min A$ 与 $\max A$ 分别表示 A 的最小元素与最大元素.考虑 S 的所有包含 1 且至少有两个元素的子集，一共 $2^{99}-1$ 个，它们显然满足要求，因为 $\min(A_i\cap A_j)=1<\max A_i$．故 $k_{\max}\geq 2^{99}-1$．　……………………10 分

下面证明 $k\geq 2^{99}$ 时不存在满足要求的 k 个子集．我们用数学归纳法证明：对整数 $n\geq 3$，在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意 $m(\geq 2^{n-1})$ 个不同非空子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中，存在两个子集 A_i,A_j，$i\neq j$，满足

$$A_i\cap A_j\neq\varnothing,\quad 且\ \min(A_i\cap A_j)=\max A_i. \qquad ①$$

显然只需对 $m=2^{n-1}$ 的情形证明上述结论.

当 $n=3$ 时，将 $\{1,2,3\}$ 的全部 7 个非空子集分成 3 组，第一组：$\{3\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$；第二组：$\{2\}$，$\{1,2\}$；第三组：$\{1\}$，$\{1,2,3\}$．由抽屉原理，任意 4 个非空子集必有两个在同一组中，取同组中的两个子集分别记为 A_i,A_j，排在前面的记为 A_i，则满足①.　……………………20 分

假设结论在 $n(\geq 3)$ 时成立，考虑 $n+1$ 的情形．若 $A_1,A_2,\cdots,A_{2^n}$ 中至少有 2^{n-1} 个子集不含 $n+1$，对其中的 2^{n-1} 个子集用归纳假设，可知存在两个子集满足①.

……………………30 分

若至多有 $2^{n-1}-1$ 个子集不含 $n+1$，则至少有 $2^{n-1}+1$ 个子集含 $n+1$，将其中 $2^{n-1}+1$ 子集都去掉 $n+1$，得到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $2^{n-1}+1$ 个子集.

由于 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全体子集可分成 2^{n-1} 组，每组两个子集互补，故由抽屉原理，在上述 $2^{n-1}+1$ 个子集中一定有两个属于同一组，即互为补集．因此，相应地有两个子集 A_i,A_j，满足 $A_i\cap A_j=\{n+1\}$，这两个集合显然满足①．故 $n+1$ 时结论成立.

综上所述，所求 $k_{\max}=2^{99}-1$．　……………………50 分

四、（本题满分 50 分）设整数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2014}$ 模 2014 互不同余， 整数 $y_1,y_2,\cdots,y_{2014}$ 模 2014 也互不同余．证明：可将 $y_1,y_2,\cdots,y_{2014}$ 重新排列为 $z_1,z_2,\cdots,z_{2014}$， 使得

$$x_1+z_1,\ x_2+z_2,\ \cdots,\ x_{2014}+z_{2014}$$

模 4028 互不同余.

证明 记 $k=1007$．不妨设 $x_i\equiv y_i\equiv i \pmod{2k}$， $1\le i\le 2k$．对每个整数 i，$1\le i\le k$， 若 $x_i+y_i\not\equiv x_{i+k}+y_{i+k} \pmod{4k}$，则令 $z_i=y_i$， $z_{i+k}=y_{i+k}$；否则， 令 $z_i=y_{i+k}$，$z_{i+k}=y_i$． ……………………20 分

如果是前一种情形，则

$$x_i+z_i=x_i+y_i\not\equiv x_{i+k}+y_{i+k}=x_{i+k}+z_{i+k} \pmod{4k}.$$

如果是后一种情形， 则也有

$$x_i+z_i=x_i+y_{i+k}\not\equiv x_{i+k}+y_i=x_{i+k}+z_{i+k} \pmod{4k}.$$

若不然， 我们有 $x_i+y_i\equiv x_{i+k}+y_{i+k} \pmod{4k}$， $x_i+y_{i+k}\equiv x_{i+k}+y_i \pmod{4k}$，两式相加可得 $2x_i\equiv 2x_{i+k} \pmod{4k}$，于是 $x_i\equiv x_{i+k} \pmod{2k}$，但 $x_1,x_2,\cdots,x_{2014}$ 模 $2014(=2k)$ 互不同余，特别地，$x_i\not\equiv x_{i+k}\pmod{2k}$，矛盾. ……………30 分

由上述构造方法知 $z_1,z_2,\cdots,z_{2k}$ 是 $y_1,y_2,\cdots,y_{2k}$ 的排列．记 $w_i=x_i+z_i$，$i=1,2,\cdots,2k$．下面验证 $w_1,w_2,\cdots,w_{2k}$ 模 $4k$ 互不同余. 这只需证明，对任意整数 i,j， $1\le i<j\le k$，

$$w_i,w_j,w_{i+k},w_{j+k}\text{ 模 }4k\text{ 两两不同余.} \qquad (*)$$

注意，前面的构造方式已保证

$$w_i\not\equiv w_{i+k}\pmod{4k},\ w_j\not\equiv w_{j+k}\pmod{4k}. \qquad (**)$$

情形一：$z_i=y_i$， 且 $z_j=y_j$．则由前面的构造方式可知

$$w_i\equiv w_{i+k}\equiv 2i \pmod{2k}, \quad w_j\equiv w_{j+k}\equiv 2j \pmod{2k}.$$

由于 $2i\not\equiv 2j\pmod{2k}$，故易知 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余，w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余，从而模 $4k$ 更不同余，再结合（**）可见（*）得证.

情形二：$z_i=y_{i+k}$， 且 $z_j=y_{j+k}$．则由前面的构造方式可知

$$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i+k \pmod{2k}, \qquad w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j+k \pmod{2k}.$$

同样有 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余，w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余.与情形一相同地可知（*）得证. ……………………40 分

情形三：$z_i = y_i$， 且 $z_j = y_{j+k}$（$z_i = y_{i+k}$，且 $z_j = y_j$ 的情形与此相同）. 则由前面的构造方式可知

$$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i \pmod{2k}, \quad w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j+k \pmod{2k}.$$

由于 k 是奇数， 故 $2i \not\equiv 2j+k \pmod 2$，更有 $2i \not\equiv 2j+k \pmod{2k}$， 因此仍然有 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余，w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余. 从而（*）得证.

因此本题得证. ……………………50 分