成都石室中学 2019~2020 学年度上期高 2020 届 10 月月考
数学试卷（理科）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x\mid(x-1)(x-2)\le 0\}, N=\{x\mid x>0\}$，则（　）

A. $N\subseteq M$　　B. $M\subseteq N$　　C. $M\cap N=\varnothing$　　D. $M\cup N=\mathbf{R}$

2. 已知 i 为虚数单位，则 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{2019}$ 等于（　）

A. i　　B. 1　　C. $-i$　　D. -1

3. 已知命题 p：$\forall x\in(-\infty,0), 2x^2-3x+1>0$，命题 q：若 $x\ge 0$，则 $2x^2-3x+1\le 0$，则以下命题正确的为（　）

A. p 的否定为"$\exists x\in[0,+\infty), 2x^2-3x+1\le 0$"，$q$ 的否命题为"若 $x<0$，则 $2x^2-3x+1>0$"

B. p 的否定为"$\exists x\in(-\infty,0), 2x^2-3x+1\le 0$"，$q$ 的否命题为"若 $x<0$，则 $2x^2-3x+1>0$"

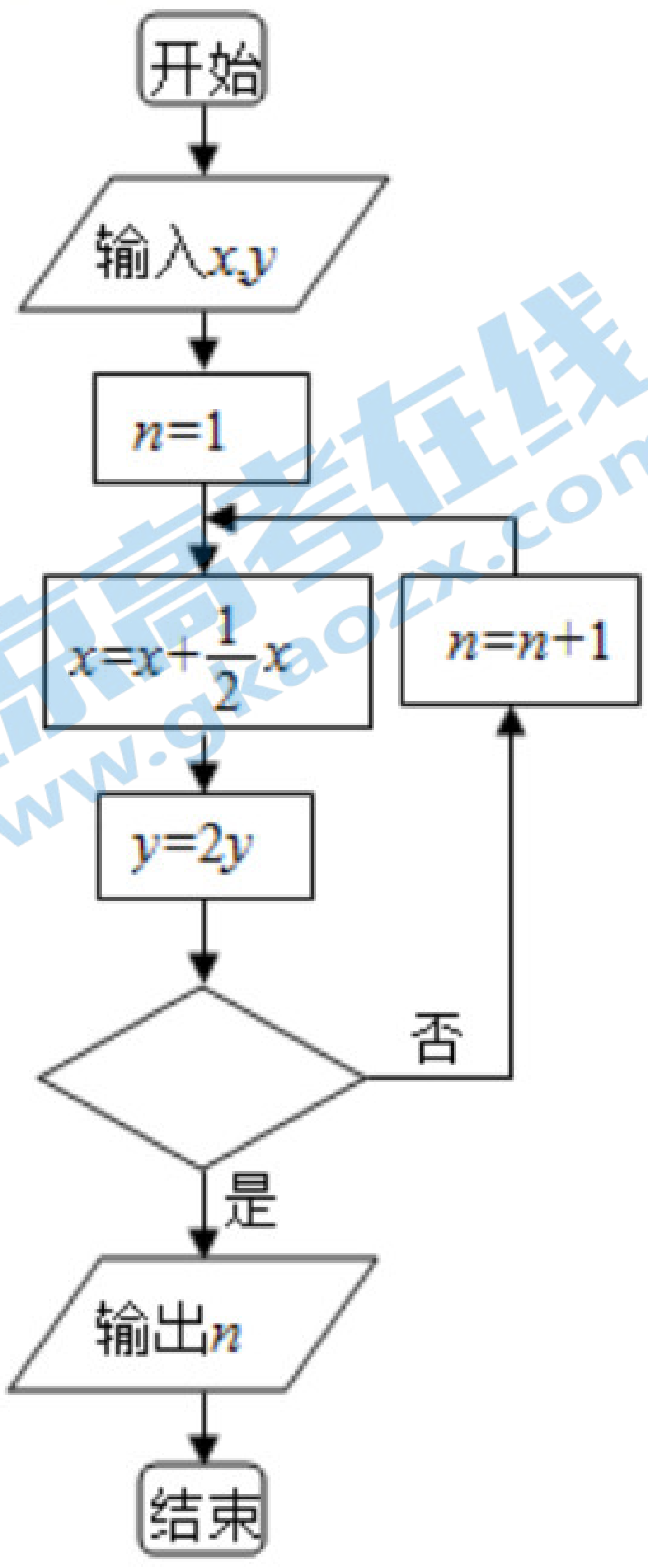
C. p 的否定为"$\exists x\in[0,+\infty), 2x^2-3x+1\le 0$"，$q$ 的否命题为"若 $x\ge 0$，则 $2x^2-3x+1>0$"

D. p 的否定为"$\exists x\in(-\infty,0), 2x^2-3x+1\le 0$"，$q$ 的否命题为"若 $x\ge 0$，则 $2x^2-3x+1>0$"

4. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 a_2,a_6,a_{14} 成等比数列，则 $S_5=$（　）

A. $\frac{35}{2}$　　B. 35　　C. $\frac{25}{2}$　　D. 25

5. 中国古代数学著作《算学启蒙》中有关于"松竹并生"的问题：松长五尺，竹长两尺，松日自半，竹日自倍，松竹何日而长等．意思是现有松树高 5 尺，竹子高 2 尺，松树每天长自己高度的一半，竹子每天长自己高度的一倍，问在第几天会出现松树和竹子一般高？如图所示是源于其思想的一个程序框图，若输入的 $x=5$，$y=2$，输出的 $n=4$，则程序框图中的 ◇ 中应填（　）



A. $x\le y$　　B. $y\le x$

C. $y<x$　　D. $x=y$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x<1\\ \frac{x}{2}, & x\ge 1\end{cases}$，则满足 $f\left[f(a)\right]=\frac{1}{2}f(a)$ 的 a 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $[0,2]$

C. $[2,+\infty)$　　D. $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

7. 若直线 $y-4=k(x-2)$ 与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 有两个交点，则 k 的取值范围是（　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $\left[-1,-\frac{3}{4}\right)$

C. $\left(\frac{3}{4},1\right]$　　D. $(-\infty,-1]$

8. 已知 $a=2\ln 3$，$b=3\ln 2$，$c=\frac{6}{e}$，其中 e 是自然对数的底数．则 a,b,c 的大小关系为（　）

A. $a>c>b$　　B. $b>c>a$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

9. 2021 年广东新高考将实行$3+1+2$模式，即语文、数学、英语必选，物理、历史二选一，政治、地理、化学生物四选二，共有 12 种选课模式. 今年高一的小明与小芳都准备选历史，假若他们都对后面四科没有偏好，则他们选课相同的概率（　）

A. $\dfrac{1}{36}$　　B. $\dfrac{1}{16}$　　C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{1}{6}$

10. 高斯函数 $f(x)=[x]$（$[x]$表示不超过实数x的最大整数），若函数$g(x)=e^x-e^{-x}-2$的零点为x_0，则$g[f(x_0)]=$（　）

A. $\dfrac{1}{e}-e-2$　　B. -2　　C. $e-\dfrac{1}{e}-2$　　D. $e^2-\dfrac{1}{e^2}-2$

11. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的焦距为$4$，其与抛物线$E:y^2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$交于$A,B$两点，$O$为坐标原点，若$\Delta OAB$为正三角形，则$C$的离心率为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

12. 已知函数$f(x)=x^3-2x+1+e^x-\dfrac{1}{e^x}$，其中$e$是自然对数的底数. 若$f(a-1)+f\left(2a^2\right)\le 2$，则实数$a$的取值范围是（　）

A. $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{3}{2},1\right]$　　C. $\left[-1,\dfrac{3}{2}\right]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\lg a_{n+1}=\lg a_n+\dfrac{1}{2}$，则$a_5=$______.

14. 现有5人要排成一排照相，其中甲与乙两人不相邻，且甲不站在两端，则不同的排法有______种.（用数字作答）

15. 已知球O的内接圆锥体积为$\dfrac{2\pi}{3}$，其底面半径为1，则球O的表面积为______.

16. 已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，且F到准线l的距离为2，直线$l_1:x-my-\sqrt{5}=0$与抛物线C交于P,Q两点（点P在x轴上方），与准线l交于点R，若$|QF|=3$，则$\dfrac{S_{\Delta QRF}}{S_{\Delta PRF}}=$______.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

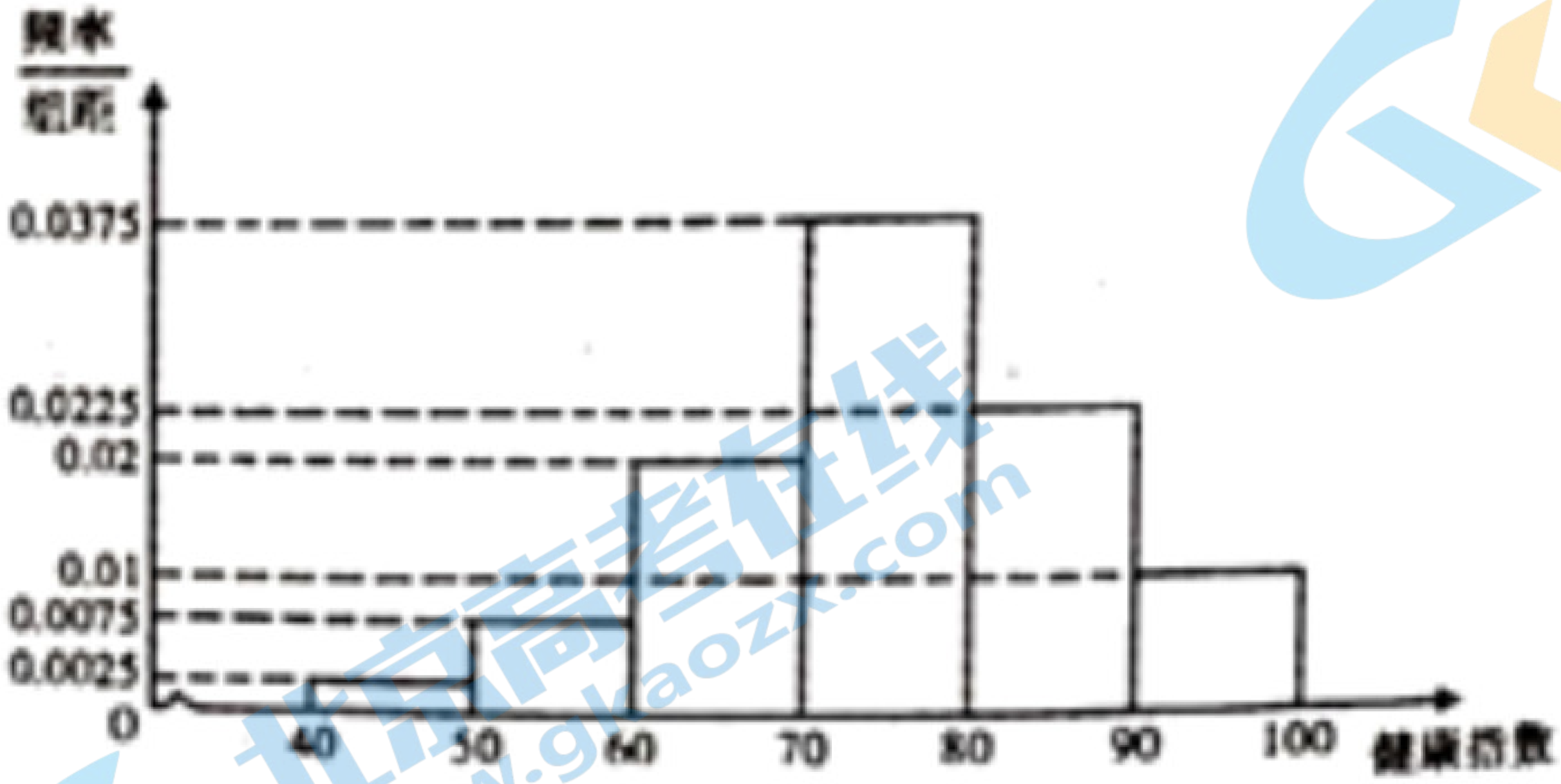
在ΔABC中，D是BC上的点，AD平分$\angle BAC$，$\sin C=2\sin B$.

（Ⅰ）求$\dfrac{BD}{CD}$；

（Ⅱ）若$AD=AC=1$，求BC的长.

18.（本小题满分 12 分）

为建立健全国家学生体质健康监测评价机制，激励学生积极参加身体锻炼，教育部印发《国家学生体质健康标准（2014 年修订）》，要求各学校每学年开展覆盖本校各年级学生的《标准》测试工作. 为做好全省的迎检工作，某市在高三年级开展了一次体质健康模拟测试（健康指数满分 100 分），并从中随机抽取了 200 名学生的数据，根据他们的健康指数绘制了如图所示的频率分布直方图.



（Ⅰ）估计这 200 名学生健康指数的平均数 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2（同一组数据用该组区间的中点值作代表）；

（Ⅱ）由频率分布直方图知，该市学生的健康指数 X 近似服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2.

①求 $P(63.4<X<98.2)$；

②已知该市高三学生约有 10000 名，记体质健康指数在区间 $\left(63.4,98.2\right)$ 的人数为 ξ，试求 $E\xi$.

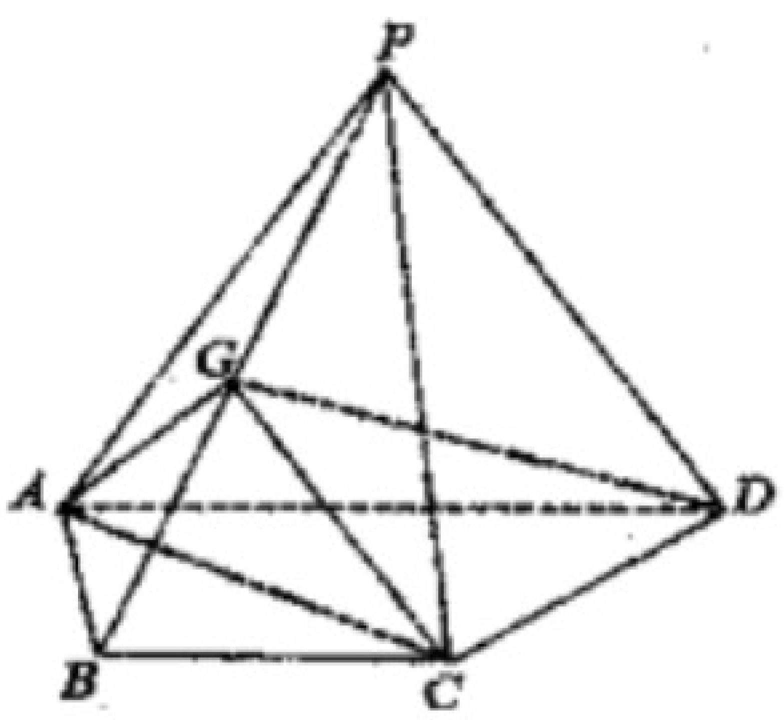
附：参考数据 $\sqrt{1.35}\approx 1.16$，

若随机变量 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.683$，

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.955$， $P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.997$.

19.（本小题满分 12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD//BC$，$AB=BC=CD=\frac{1}{2}AD$，G 是 PB 的中点，ΔPAD 是等边三角形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.



（Ⅰ）求证：$CD\perp$ 平面 GAC；

（Ⅱ）求二面角 $P-AG-C$ 大小的正弦值.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 过点 $A\left(0,1\right)$，且椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）斜率为1的直线 l 交椭圆 C 于 $M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$ 两点，且 $x_1>x_2$. 若直线 $x=3$ 上存在点 P，使得 ΔPMN 是以 M 为直角顶点的等腰直角三角形，求直线 l 的方程.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}-1$.

（Ⅰ）若直线 $y=x+a$ 为 $f\left(x\right)$ 的切线，求 a 的值；

（Ⅱ）若 $\forall x\in\left[0,+\infty\right)$，$f\left(x\right)\geq bx$ 恒成立，求 b 的取值范围.

22.（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C：$x^2+\left(y-4\right)^2=4$. 以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系.

（Ⅰ）求圆心 C 的极坐标；

（Ⅱ）从原点 O 作圆 C 的弦，求弦的中点轨迹的极坐标方程.

成都石室中学 2019~2020 学年度上期高 2020 届 10 月月考
数学试卷（理科）答案

一、选择题：B D B C　　A D C C　　D B C A

二、填空题：

13. __100____． 14. ___36___． 15. ____$\frac{25}{4}\pi$__． 16. ___$\frac{6}{7}$___．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由正弦定理可得在ΔABD中，$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，

在ΔACD中，$\frac{AD}{\sin C}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}$，…………………………3 分

又因为$\angle BAD=\angle CAD$，$\frac{BD}{CD}=\frac{\sin C}{\sin B}=2$．…………………………6 分

（Ⅱ）$\sin C=2\sin B$，由正弦定理得$AB=2AC=2$，

设$DC=x$，则$BD=2x$，则$\cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{5-4x^2}{4}$，$\cos\angle CAD$

$=\frac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC\cdot AD}=\frac{2-x^2}{2}$．…………………………9 分

因为$\angle BAD=\angle CAD$，

所以$\frac{5-4x^2}{4}=\frac{2-x^2}{2}$，解得$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

$BC=3x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$．…………………………12 分

18.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由频率分布直方图可知，各区间对应的频数分布表如下：

分值区间	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100]$
频数	5	15	40	75	45	20

$\therefore\ \bar{x}=(45\times5+55\times15+65\times40+75\times75+85\times45+95\times20)\times\frac{1}{200}=75$，…………………3 分

$s^2=(45-75)^2\times\frac{5}{200}+(55-75)^2\times\frac{15}{200}+(65-75)^2\times\frac{40}{200}+(85-75)^2\times\frac{45}{200}$

$+(95-75)^2\times\frac{20}{200}=135$．…………………………6 分

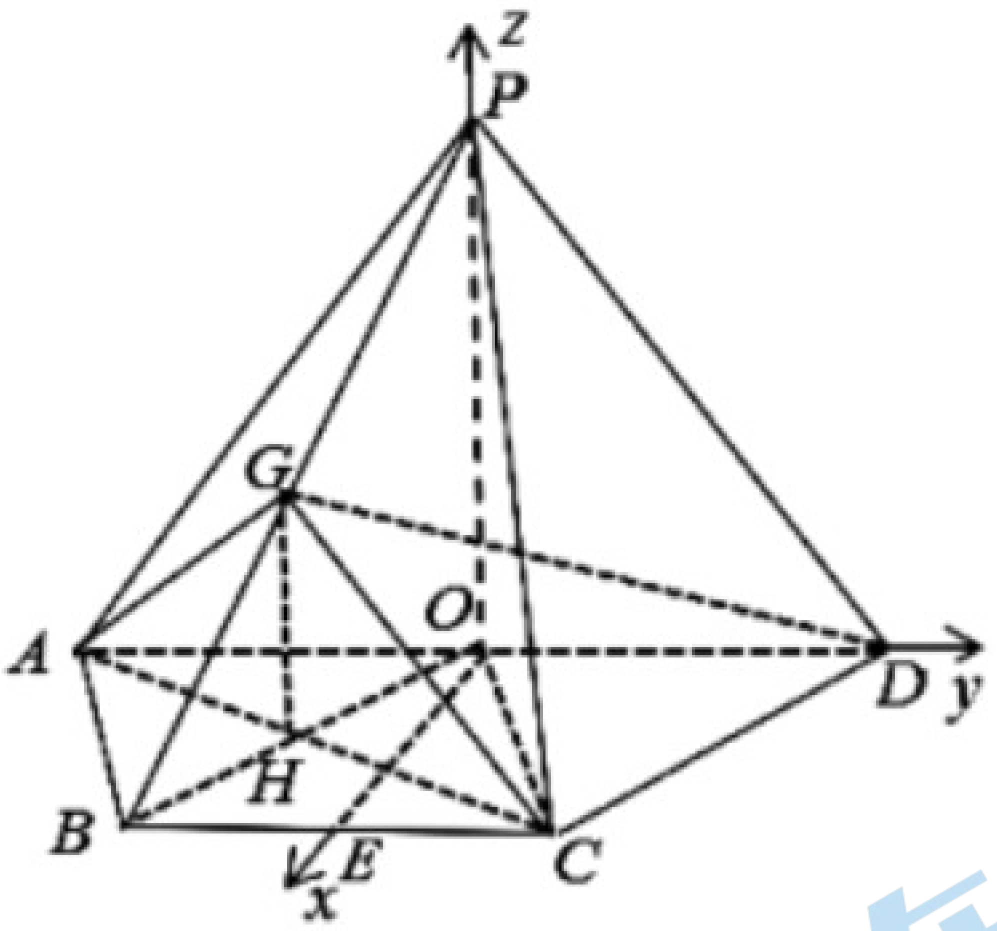
（Ⅱ）①由（Ⅰ）知X服从正态分布$N(75,135)$，且$\sigma\approx11.6$，

$\therefore\ P(63.4<X<98.2)=P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times0.955+\frac{1}{2}\times0.683=0.819$．………………9 分

②依题意，ξ服从二项分布，即$\xi\sim B(10^4,0.819)$，则$E\xi=np=8190$．………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）取 AD 的中点为 O，连结 OP， OC， OB，设 OB 交 AC 于 H，连结 GH．



$\because AD//BC$， $AB=BC=CD=\frac{1}{2}AD$

$\because$ 四边形 $ABCO$ 与四边形 $OBCD$ 均为菱形

$\therefore OB\perp AC$， $OB//CD$ $\therefore CD\perp AC$

$\because \Delta PAD$ 为等边三角形， O 为 AD 中点

$\therefore PO\perp AD$ ……………………………2 分

$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$ 且平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$．

$PO\subset$ 平面 PAD 且 $PO\perp AD$

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$

$\because CD\subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore PO\perp CD$

$\because H$， G 分别为 OB， PB 的中点 $\therefore GH//PO$

$\therefore GH\perp CD$ ……………………………5 分

又 $\because GH\cap AC=H$

$AC,GH\subset$ 平面 GAC

$\therefore CD\perp$ 平面 GAC ……………………………6 分

（Ⅱ）取 BC 的中点为 E，以 O 为空间坐标原点，分别以 $\overline{OE}$， $\overline{OD}$， $\overline{OP}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$．……………………………7 分

设 $AD=4$，则 $P\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$， $A\left(0,-2,0\right)$， $C\left(\sqrt{3},1,0\right)$， $D\left(0,2,0\right)$， $G\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$

$\overline{AP}=\left(0,2,2\sqrt{3}\right)$， $\overline{AG}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$．

设平面 PAG 的一法向量 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$．

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overline{AP}=0\\ \vec{n}\cdot\overline{AG}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y+2\sqrt{3}z=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\sqrt{3}z\\ x=z\end{cases}$．

令 $z=1$，则 $\vec{n}=\left(1,-\sqrt{3},1\right)$． ……………………………10 分

由（Ⅰ）可知，平面 AGC 的一个法向量 $\overline{CD}=\left(-\sqrt{3},1,0\right)$．

$\therefore$ 二面角 $P-AG-C$ 的平面角 θ 的余弦值 $\cos\theta=-\frac{|\vec{n}\cdot\overline{CD}|}{|\vec{n}||\overline{CD}|}=-\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$.

二面角 $P-AG-C$ 大小的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. ……………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases} b=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$ ……………………………………………3 分

解得 $a^2=3$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ……………………………………………4 分

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=x+m$，$P(3,y_P)$，

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{3}+y^2=1, \\ y=x+m \end{cases}$ 得 $4x^2+6mx+3m^2-3=0$. ……………………………6分

令 $\Delta=36m^2-48m^2+48>0$，得 $-2<m<2$.

$x_1+x_2=-\frac{3}{2}m$，$x_1x_2=\frac{3}{4}(m^2-1)$. ……………………………………………7 分

因为 ΔPMN 是以 $\angle PMN$ 为顶角的等腰直角三角形，

所以 NP 平行于 x 轴. ……………………………………8分

过 M 做 NP 的垂线，则垂足 Q 为线段 NP 的中点.

设点 Q 的坐标为 (x_Q,y_Q)，则 $x_Q=x_M=x_1=\frac{x_2+3}{2}$.

由方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{3}{2}m, \\ x_1x_2=\frac{3}{4}(m^2-1), \\ x_1=\frac{x_2+3}{2}, \end{cases}$ 解得 $m^2+2m+1=0$，即 $m=-1$.

而 $m=-1\in(-2,2)$，

所以直线 l 的方程为 $y=x-1$. ……………………………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）设切点为 $P(x_0,y_0)$，$f'(x)=e^x-x$，

$\therefore f'(x_0)=e^{x_0}-x_0=1$，……………………………2 分

令 $h(x)=e^x-x$，则 $h'(x)=e^x-1$，

当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；

当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数；

所以 $h(x)_{\min}=h(0)=1$，所以 $x_0=0$，

又 $e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0^2-1=x_0+a$，所以 $a=0$．……………………4 分

（Ⅱ）$\forall x\in[0,+\infty)$，$f(x)\geq bx$ 恒成立 $\Leftrightarrow e^x-\frac{x^2}{2}-1-bx\geq 0$，$x\in[0,+\infty)$．

令 $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-1-bx$，$x\in[0,+\infty)$．

$g'(x)=e^x-x-b=h(x)$，$h'(x)=e^x-1$，

当 $x>0$ 时，$h'(x)=e^x-1>0$，所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

$h(x)_{\min}=1-b$，

①若 $b\leq 1$，则当 $x>0$ 时 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

故 $x\in[0,+\infty)$ 时，有 $g(x)\geq g(0)=0$ 即 $e^x-\frac{x^2}{2}-1-bx\geq 0$ 恒成立，满足题意．…………8 分

②若 $b>1$，因为 $g'(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数且 $g'(0)=1-b<0$，

$g'[\ln(2b)]=b-\ln b-\ln 2>b-(b-1)-\ln 2=1-\ln 2>0$，

故存在 $x_0\in(0,\ln(2b))$，使得 $g'\ x_0\ =0$．

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 为减函数，$g(x)<g(0)=0$，矛盾，舍去．

综上 $b\leq 1$．……………………12 分

22．（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）$\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$……………………3 分

（Ⅱ）$\rho=4\sin\theta$ ……………………7 分

$\left(\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}\right)$……………………10 分