

# 2021 北京八中高 一（上）期中

## 数 学

考试时间：120 分钟 满分：150 分

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合  $A = \{x | -2 < x < 1\}$ ， $B = \{x | 0 < x < 2\}$ ，则集合  $A \cap B$  等于

- A.  $\{x | -1 < x < 1\}$       B.  $\{x | -2 < x < 1\}$       C.  $\{x | -2 < x < 2\}$       D.  $\{x | 0 < x < 1\}$

2. 已知  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ x+1, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则  $f(\frac{4}{3}) + f(-\frac{1}{3})$  等于

- A. 1      B.  $\frac{10}{3}$       C. 2      D.  $\frac{5}{3}$

3.  $\lg 2 + \lg 5 - \log_a 1 + \log_2 2$  的值为

- A. 2      B.  $2 - a$       C.  $\lg 7 + 1$       D.  $\lg 7$

4. 给定函数①  $y = x^2$ ；②  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ；③  $y = |x - 1|$ ；④  $y = 2^x$ ，其中在区间  $(0, 1)$  上单调递减的函数的序号是

- A. ①②      B. ②③      C. ③④      D. ①④

5. 设  $a = 1$ ， $b = (\frac{5}{2})^{\frac{3}{5}}$ ， $c = (\frac{5}{2})^{\frac{2}{5}}$ ，则  $a, b, c$  的大小关系是

- A.  $a > c > b$       B.  $a > b > c$       C.  $c > a > b$       D.  $b > c > a$

6. 已知  $p: x \neq 1$ ， $q: x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ，则  $p$  是  $q$  的

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

7. 设集合  $A = \{x | 2 \leq 2^x \leq 4\}$ ， $B = \{x | 2 - a \leq x \leq a\}$ ，若  $B \subseteq A$ ，则  $a$  的取值范围是

- A.  $(-\infty, 1]$       B.  $[1, +\infty)$       C.  $[2, +\infty)$       D.  $(-\infty, 2]$

8. 已知函数  $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 7$ ，在下列说法中正确的是

- A.  $(1, 0)$  是函数  $f(x)$  的一个零点      B. 函数  $f(x)$  只有两个零点  
C. 函数  $f(x)$  在  $(3, 4)$  上至少有一个零点      D. 函数  $f(x)$  在  $(3, 4)$  上没有零点

9. 函数  $y = x + \frac{2}{x} (x \geq 2)$  的最小值为

- A. 2                      B.  $2\sqrt{2}$                       C. 3                      D.  $\sqrt{2}$

10. 设集合  $M = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x-1| < 2\}$ ,  $N = \{y \in \mathbf{N} \mid y = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbf{R}\}$ , 则

- A.  $N \in M$                       B.  $M \subsetneq N$                       C.  $N \subsetneq M$                       D.  $M = N$

11. 已知函数  $f(x)$  满足: ①定义域为  $\mathbf{R}$ ; ②对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $f(x+2) = 2f(x)$ ; ③当  $x \in [-1, 1]$  时,  $f(x) = -|x| + 1$ . 则方程  $f(x) = \log_4 |x|$  在区间  $[-10, 1] \cup [2, 10]$  内解的个数是

- A. 18                      B. 12                      C. 11                      D. 10

12. 对于集合  $A$ , 定义了一种运算“ $\oplus$ ”, 使得集合  $A$  中的元素间满足条件: 如果存在元素  $e \in A$ , 使得对任意  $a \in A$ , 都有  $e \oplus a = a \oplus e = a$ , 则称元素  $e$  是集合  $A$  对运算“ $\oplus$ ”的单位元素. 例如:  $A = \mathbf{R}$ , 运算“ $\oplus$ ”为普通乘法: 存在  $1 \in \mathbf{R}$ , 使得对任意  $a \in \mathbf{R}$  都有  $1 \times a = a \times 1 = a$ , 所以元素 1 是集合  $\mathbf{R}$  对普通乘法的单位元素. 下面给出三个集合及相应的运算“ $\oplus$ ”:

①  $A = \mathbf{R}$ , 运算“ $\oplus$ ”为普通减法;                      ②  $A = \mathbf{R}$ , 运算“ $\oplus$ ”为普通加法;

③  $A = \{X \mid X \subseteq M\}$  (其中  $M$  是任意非空集合), 运算“ $\oplus$ ”为求两个集合的交集.

- A. ①②                      B. ①③                      C. ①②③                      D. ②③

二、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

13. 若命题  $p$  是“对所有正数  $x$ , 均有  $x > x^2 + 2$ ”, 则  $\neg p$  是\_\_\_\_\_.

14. 若关于  $x$  的方程  $x^2 - (m+1)x + m^2 = 0$  的两个实数根为  $x_1, x_2$ , 且  $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{2}{m}$ , 则实数  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

15. 设集合  $A = \{2, 4, a^2 - 3a + 7\}$ ,  $B = \{1, 5a - 5, -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 4\}$ , 若  $A \cap B = \{5\}$ , 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

16. 某化工厂引进一条先进生产线生产某种化工产品, 其生产的总成本  $y$  (万元) 与年产量  $x$  (吨) 之间的函数关系式可以近似的表示为  $y = \frac{x^2}{5} - 48x + 8000$ . 已知此生产线年产量最大为 210 吨. 若每吨产品平均出厂价为 40 万元, 那么当年产量为\_\_\_\_\_吨时, 可以获得最大利润是\_\_\_\_\_万元.

17. 设集合  $A = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-1} = 2, x, y \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid 4x + ay = 16, x, y \in \mathbf{R}\}$ . 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

18. 已知关于  $x$  的不等式  $|x+1| + |x+2| \geq c$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 则实数  $c$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

19. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 给出下列四个条件: ①  $a > b - 1$ ; ②  $a > b + 1$ ; ③  $|a| > b$ ; ④  $a > |b|$ . 使“ $a > b$ ”成立的必要不充分条件是\_\_\_\_\_.

20. 称有限集  $S$  的所有元素的乘积为  $S$  的“积数”, 给定数集  $M = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100} \right\}$ , 则集合  $M$  的所有含有偶数个元素的子集的“积数”之和为\_\_\_\_\_.

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

21. (15 分)

(1) 求方程组  $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ y = x - 1 \end{cases}$  的解集;

(2) 求关于  $x$  的方程  $x(x + 3m + 1) = (x + m)(x + m + 1)$  的解集;

(3) 求不等式  $\frac{x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 7x + 2} \leq 1$  的解集.

22. (14 分) 已知函数  $f(x) = \log_2(1 + x)$ ,  $g(x) = \log_2(1 - x)$ .

(1) 求函数  $f(x) - g(x)$  的定义域;

(2) 判断函数  $f(x) - g(x)$  的奇偶性, 并予以证明;

(3) 求使  $f(x) - g(x) > 1$  成立的  $x$  的取值范围.

23. (13 分) 已知函数  $f(x) = ax^2 - (a + 1)x + 1$

(1) 若函数  $f(x)$  的单调减区间为  $(-\infty, 1]$ , 则实数  $a =$ \_\_\_\_\_.

(2) 解关于  $x$  的不等式  $ax^2 - (a + 1)x + 1 > 0$ .

24. (14分) 已知函数  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x - 1$ .

(1) 若存在  $x \in \mathbf{R}$ , 使  $f(x) < bg(x)$ , 求实数  $b$  的取值范围;

(2) 设  $F(x) = f(x) - mg(x) + 1 - m - m^2$ , 且  $|F(x)|$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 求实数  $m$  的取值范围.

25. (14分) 已知集合  $M$  是满足下列性质的函数  $f(x)$  的全体: 存在非零常数  $T$ , 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $f(x+T) = Tf(x)$  成立.

(1) 判断函数  $f(x) = x$  是否属于集合  $M$ , 并说明理由;

(2) 设函数  $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$  的图像与  $y = x$  的图像有公共点, 证明: 函数  $f(x)$  属于集合  $M$ ;

(3) 是否存在实数  $a$ , 使得  $f(x) = x|x-a|$  属于集合  $M$ ? 若存在, 求出实数  $a$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由.