2023北京一六一中高三3月月考

数　　学

考生须知

1.本试卷共3页，满分150分，考试时长120分钟.

2.试题答案一律书写在答题纸上，在试卷上作答无效.

3.在答题纸上，选择题用2B铅笔作答，非选择题用黑色字迹签字笔作答.

4.考试结束后，将答题纸交回.

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求.

1. 已知集合 $A=\{x|-1<x<3\}$，集合 $B=\{x||x|\le 2\}$，则（　　）

A. $A\cap B=\{x|-2\le x<3\}$　　B. $A\cup B=\{x|-2\le x<3\}$

C. $A\cap B=\{x|-1<x<2\}$　　D. $A\cap B=\{x|x<3\}$

2. 双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点坐标为（　　）

A. $(\pm1,0)$　　B. $(0,\pm\sqrt{3})$　　C. $(\pm\sqrt{3},0)$　　D. $(0,\pm1)$

3. 已知 $a=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0.5}$，$b=\log_4 2$，$c=\log_2 3$，则（　　）

A. $c>a>b$　　B. $a>c>b$　　C. $a>b>c$　　D. $b>c>a$

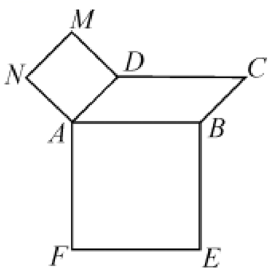
4. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\alpha$ 是第一象限角，且角 α,β 的终边关于 y 轴对称，则 $\tan\beta=$（　　）

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $-\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{4}{3}$　　D. $-\dfrac{4}{3}$

5. 已知 α,β 是两个不同的平面，直线 $l\not\subset\alpha$，且 $\alpha\perp\beta$，那么“$l//\alpha$”是“$l\perp\beta$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 如图，在同一平面内沿平行四边形 *ABCD* 两边 *AB*、*AD* 向外分别作正方形 *ABEF*、*ADMN*，其中 $AB=2$，$AD=1$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{4}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FN}=$（　　）



A. $-2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 0　　D. -1

7. 函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x\left|\ln x\right|-1$ 的零点个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 设 F_1，F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线交椭圆于 P，Q 两点，若 $\angle F_1PQ=60^\circ$，$|PF_1|=|PQ|$，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，且各项均为正整数，如果 $a_1=3,a_n=45$，那么 $n+d$ 的最小值为（　　）

A. 13　　B. 14　　C. 17　　D. 18

10. 下表是某生活超市2021年第四季度各区域营业收入占比和净利润占比统计表：

	生鲜区	熟食区	乳制品区	日用品区	其它区
营业收入占比	48.6%	15.8%	20.1%	10.8%	4.7%
净利润占比	65.8%	−4.3%	16.5%	20.2%	1.8%

该生活超市本季度的总营业利润率为32.5%（营业利润率是净利润占营业收入的百分比），给出下列四个结论：

①本季度此生活超市营业收入最低的是熟食区；

②本季度此生活超市的营业净利润超过一半来自生鲜区；

③本季度此生活超市营业利润率最高的是日用品区；

④本季度此生活超市生鲜区的营业利润率超过40%.

其中正确结论的序号是（　　）

A. ①③　　B. ②④　　C. ②③　　D. ②③④

二、填空题：共5小题，每小题5分，共25分.

11. 抛物线 $x^2=2y$ 的准线方程是__________.

12. 设i为虚数单位，则 $\left(x+i\right)^6$ 的展开式中含 x^4 的项为________.

13. 已知半径为1的圆 C 经过点 $\left(2,3\right)$，则圆 C 上的点到直线 $3x-4y-4=0$ 距离的最大值为__________.

14. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x, x\le a,\\ x^3, x>a.\end{cases}$ 若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是增函数，则 a 的一个取值为___________.

15. 声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波，其中包含着正弦函数.纯音的数学模型是函数 $y=A\sin\varpi t$.我们听到的声音是由纯音合成的，称为复合音.已知一个复合音的数学模型是函数

$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.给出下列四个结论：

① $f(x)$ 的最小正周期是 π；

② $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 3 个零点；

③ $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数；

④ $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分.解答题写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$a\cos B+\frac{1}{2}b=c,b=2$.

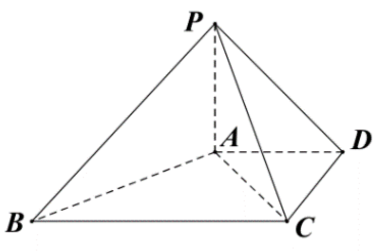
（1）求 $\angle A$；

（2）再从下列三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 BC 边上的高.

条件①：$\cos B=-\frac{2}{3}$；条件②：$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$；条件③：$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$.在底面 $ABCD$ 中，$BC//AD$，$CD\perp AD$，$AD=CD=1$，$BC=2$.



（1）求证：$AC\perp$ 平面 PAB；

（2）若平面 PAB 与平面 PCD 的夹角等于 $\frac{\pi}{3}$，求点 B 到平面 PCD 的距离.

18. 北京 2022 年冬奥会，向全世界传递了挑战自我、积极向上的体育精神，引导了健康、文明、快乐的生活方式.为了激发学生的体育运动兴趣，助力全面健康成长，某中学组织全体学生开展以“筑梦奥运，一起向未来”为主题的体育实践活动.为了解该校学生参与活动的情况，随机抽取100 名学生作为样本，统计他们参加体育实践活动时间（单位：分钟），得到下表：

类别 \ 人数 \ 时间		$[0,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100)$
性别	男	5	12	13	8	9	8
	女	6	9	10	10	6	4
学段	初中					10	
	高中	m	13	12	7	5	4

（1）从该校随机抽取1名学生，若已知抽到的是女生，估计该学生参加体育实践活动时间在$[50,60)$的概率；

（2）从样本中参加体育实践活动时间在$[80,90)$和$[90,100)$的学生中各随机抽取1人，其中初中学生的人数记为X，求随机变量X的分布列和数学期望；

（3）假设同组中每个数据用该组区间中点值代替，样本中的100名学生参加体育实践活动时间的平均数记为μ_0，初中、高中学生参加体育实践活动时间的平均数分别记为μ_1、μ_2，当m满足什么条件时，$\mu_0 \geq \dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$.（结论不要求证明）

19. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个顶点为$(0,-1)$，一个焦点为$(1,0)$.

（1）求椭圆C的方程和离心率；

（2）已知点$P(0,2)$，过原点O的直线交椭圆C于M，N两点，直线PM与椭圆C的另一个交点为Q.若$\triangle MNQ$的面积等于$\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$，求直线PM的斜率.

20. 已知函数$f\left(x\right)=\left(x-1\right)\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}ax^2\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）当$a=0$时，求曲线$y=f\left(x\right)$在$x=0$处的切线方程；

（2）当$0<a<1$时，证明：$f\left(x\right)$有且只有一个零点；

（3）求函数$f\left(x\right)$在$[1,2]$上的最小值.

21. 已知数集$A=\left\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\right\}\left(1=a_1<a_2<\cdots<a_n,n\geq 2\right)$具有性质$P$：对任意的

$k(2 \le k \le n), \exists i, j(1 \le i \le j \le n)$，使得 $a_k = a_i + a_j$ 成立.

（1）分别判断数集 $\{1,3,5\}$ 与 $\{1,2,3,6\}$ 是否具有性质 P，并说明理由；

（2）已知 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \left(n \in \mathbf{N}^*\right)$，求证：$2a_n - 1 \le S_n$；

（3）若 $a_n = 36$，求数集 A 中所有元素的和的最小值.

参考答案

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求.

1. 【答案】B

【解析】

【分析】求解 $B=\left\{x\middle|-2\le x\le 2\right\}$，再求 A,B 的交集和补集判断即可

【详解】由题，$B=\left\{x\middle|-2\le x\le 2\right\}$，故 $A\cap B=\{x|-1<x\le 2\}$ ，$A\cup B=\{x|-2\le x<3\}$

故选：B

2. 【答案】C

【解析】

【分析】根据双曲线的性质，可直接得出结果.

【详解】因为双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，

所以 $c^2=1+2=3$，且焦点在 x 轴上，

因此其焦点坐标为：$(\pm\sqrt{3},0)$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查求双曲线的焦点坐标，属于基础题型.

3. 【答案】A

【解析】

【分析】根据 $a=\frac{\sqrt{3}}{3},b=\frac{1}{2},c>1$ 即可比较大小.

【详解】 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.5}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\in\left(\frac{1}{2},1\right),b=\log_4 2=\frac{1}{2},c=\log_2 3>\log_2 2=1$,所以 $c>a>b$，

故选：A

4. 【答案】D

【解析】

【分析】根据 cosα 求出 tanα，根据角 α,β 的终边关于 y 轴对称可知 $\tan\beta=-\tan\alpha$.

【详解】∵ $\cos\alpha=\frac{3}{5},\alpha$ 是第一象限角，∴ $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$，

∵角 α,β 的终边关于 y 轴对称，∴ $\tan\beta=-\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

故选：D.

5. 【答案】B

【解析】

【分析】根据空间线面位置关系，结合必要不充分条件的概念判断即可.

【详解】解：当直线$l\not\subset\alpha$，且$\alpha\perp\beta$，$l//\alpha$，则$l\subset\beta$，或$l//\beta$，l与β相交，故充分性不成立，

当直线$l\not\subset\alpha$，且$\alpha\perp\beta$，$l\perp\beta$时，$l//\alpha$，故必要性成立，

所以，“$l//\alpha$”是“$l\perp\beta$”的必要而不充分条件.

故选：B

6. 【答案】C

【解析】

【分析】根据向量加法法则，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FN}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AN}\right)$，再利用数量积的运算法则计算即可.

【详解】$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FN}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AN}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AN}$

$=0+\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\overrightarrow{FA}\right|\cos\dfrac{\pi}{4}+\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AN}\right|\cos\dfrac{3\pi}{4}+0=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$.

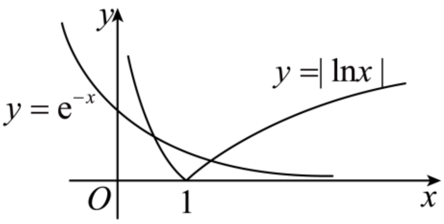
故选：C.

7. 【答案】C

【解析】

【分析】由$f\left(x\right)=0$可得$\left|\ln x\right|=\mathrm{e}^{-x}$，分析可知函数$f\left(x\right)$的零点个数即为函数$y=\left|\ln x\right|$与$y=\mathrm{e}^{-x}$的图象的交点个数，数形结合可得出结果.

【详解】由$f\left(x\right)=0$可得$\left|\ln x\right|=\mathrm{e}^{-x}$，作出函数$y=\left|\ln x\right|$与$y=\mathrm{e}^{-x}$的图象如下图所示：



由图可知，函数$y=\left|\ln x\right|$与$y=\mathrm{e}^{-x}$的图象的交点个数为2，

故函数$f\left(x\right)$的零点个数为2.

故选：C.

8. 【答案】A

【解析】

【分析】设$|PF_1|=t$，则由$\angle F_1PQ=60^\circ$，$|PF_1|=|PQ|$，推出$PQ|=t$，$|F_1Q|=t$，且F_2为PQ的中点，根据椭圆定义可知$|PF_1|+|PF_2|=2a$用t表示，根据等边三角形的高，求出$2c$用t表示，再由椭圆的离心

率公式$e=\dfrac{c}{a}$，即可得到答案.

【详解】解：设$|PF_1|=t$，

$\because |PF_1|=|PQ|$，$\angle F_1PQ=60^\circ$，

$\therefore |PQ|=t$，$|F_1Q|=t$，

由$\triangle F_1PQ$为等边三角形，得$|F_1P|=|F_1Q|$，

由对称性可知，PQ垂直于x轴，F_2为PQ的中点，$|PF_2|=\dfrac{t}{2}$，

$\therefore |F_1F_2|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$，即$2c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$，

由椭圆定义：$|PF_1|+|PF_2|=2a$，即$2a=t+\dfrac{t}{2}=\dfrac{3}{2}t$，

$\therefore$椭圆的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}t}{\frac{3}{2}t}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：A.

9. 【答案】B

【解析】

【分析】根据题意可得$d\left(n-1\right)=42$，再结合$\mathrm{n}-1$为整数可求得n,d，即可得解.

【详解】解：在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，因为$a_1=3,a_n=45$，

则$3+d\left(n-1\right)=45$，即$d\left(n-1\right)=42=1\times 42=2\times 21=3\times 14=6\times 7$，

故$d=1,n=43$或$d=2,n=22$或$d=3,n=15$或$d=6,n=8$或$d=7,n=7$

或$d=14,n=4$或$d=21,n=3$或$d=42,n=2$，

所以$n+d$的最小值为14.

故选：B.

10. 【答案】D

【解析】

【分析】根据表中数据以及营业利润率的概念逐项进行分析并判断.

【详解】由题中数据知，其它类营业收入占比4.7%，为最低的，故①错；

生鲜区的净利润占比$65.8\%>50\%$，故②正确；

生鲜区的营业利润率为$\dfrac{65.8\%}{48.6\%}\times 32.5\%=44\%>40\%$，故④正确；

熟食区的营业利润率为$\dfrac{-4.3\%}{15.8\%}\times 32.5\%<0$；

乳制品区的营业利润率为$\frac{16.5\%}{20.1\%}\times 32.5\%=26.68\%$；

其他区的营业利润率为$\frac{1.8\%}{4.7\%}\times 32.5\%=12.45\%$；

日用品区为$\frac{20.2\%}{10.8\%}\times 32.5\%=60.787\%$，最高，故③正确.

故选：D.

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】$y=-\frac{1}{2}$

【解析】

【详解】因为$x^2=2py$ 准线方程是$y=-\frac{p}{2}$ ，所以抛物线$x^2=2y$的准线方程是$y=-\frac{1}{2}$

12. 【答案】$-15x^4$

【解析】

【分析】利用二项展开式的通项公式即可得到答案.

【详解】$\because (x+i)^6$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r} i^r, r=0,1,2,\ldots,6$，

$\therefore$令$6-r=4$，则$r=2$，

此时$T_3=C_6^2 x^4 i^2=-15x^4$，

即含x^4的项为$-15x^4$.

故答案为：$-15x^4$.

13. 【答案】4

【解析】

【分析】先求得圆心的轨迹，然后结合点到直线的距离公式求得正确答案.

【详解】因为半径为1的圆C经过点$(2,3)$，

所以圆C的圆心的轨迹是以$(2,3)$为圆心，半径为1的圆，

$(2,3)$到直线$3x-4y-4=0$距离为$\frac{|6-12-4|}{5}=2$，

所以圆C的圆心到直线$3x-4y-4=0$距离的最大值为$2+1=3$，

圆C上的点到直线$3x-4y-4=0$距离的最大值为 4.

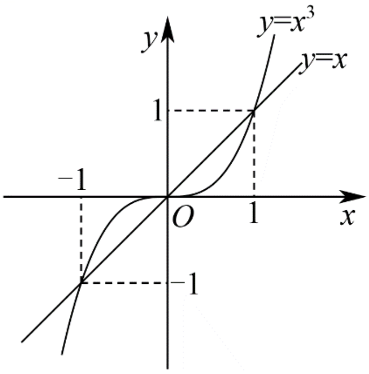
故答案为：4.

14. 【答案】-2(答案不唯一，满足$a<-1$或$0<a<1$即可)

【解析】

【分析】作出 $y=x$ 和 $y=x^3$的图象，数形结合即可得 a 的范围，从而得到 a 的可能取值.

【详解】$y=x$ 和 $y=x^3$ 的图象如图所示：



∴当 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 时，$y=x^3$ 有部分函数值比 $y=x$ 的函数值小，

故当 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是增函数.

故答案为：-2.

15. 【答案】②④

【解析】

【分析】对①，分别计算 $y=\sin x$ 和 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期，再由其最小公倍数即可得到 $f\left(x\right)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期；

对②，直接求零点即可；

对③④，对 $f\left(x\right)$ 求导，利用导数研究函数的单调性、极值和最值，即可判断

【详解】对①，因为：$f\left(x\right)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$，

$y=\sin x$ 的最小正周期是 2π，$y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，

所以 $f\left(x\right)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期是 2π，故①不正确；

对②，$f(x)=0$ 即 $\sin x+\sin x\cos x=0$，即 $\sin x\left(1+\cos x\right)=0$，故 $\sin x=0$ 或 $\cos x=-1$，又 $x\in\left[0,2\pi\right]$，故 $x=0$，$x=\pi$ 或 $x=2\pi$，即 $f(x)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 上有 3 个零点，故②正确；

对③由题 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$，$x\in\left[0,2\pi\right]$，

由 $f'\left(x\right)=\cos x+\cos 2x=2\cos^2 x+\cos x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1)$，

令 $f'\left(x\right)=0$ 得，$x=\frac{\pi}{3}$，$x=\frac{5\pi}{3}$，$x=\pi$，

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

当 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$，$f'(x)\le 0$，$f(x)$ 为减函数，

当 $x\in\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$ 上单调递增，在 $(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$ 上为单调递减，故③不正确；

由于 $f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$f(2\pi)=0$，所以 $f\left(x\right)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，所以④正确

综上，②④正确

故答案为：②④

三、解答题：共 6 小题，共 85 分.解答题写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. 【答案】（1） $A=60^\circ$

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）方法一：根据正弦定理，结合内角和与两角和的正弦公式化简即可；方法二：利用余弦定理化简即可

（2）选①则 $A+B>\pi$ 不合题意；

选②：根据 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 则可得 $B=45^\circ$，再根据两角和的正弦公式可得 $\sin C$，再根据高 $h=b\sin C$ 计算即可；

选③：根据面积公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ 可得 $c=1+\sqrt{3}$，进而用余弦定理求得 $a=\sqrt{6}$，再结合面积公式求解高即可

【小问 1 详解】

方法一：在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a\cos B+\frac{1}{2}b=c$，

所以由正弦定理可得 $\sin A\cos B+\frac{1}{2}\sin B=\sin C$.

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

所以 $\frac{1}{2}\sin B=\cos A\sin B$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B\neq 0$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $A=60^\circ$.

方法二：在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a\cos B+\frac{1}{2}b=c$，

由余弦定理$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

得$a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\dfrac{1}{2}b=c$，

整理得$c^2+b^2-a^2=bc$

所以$\cos A=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，所以$A=60^\circ$.

【小问 2 详解】

选条件②：由（1）知$0^\circ<B<120^\circ$

因为在$\triangle ABC$中，$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$B=45^\circ$

又$A+B+C=\pi$，所以$C=75^\circ$

所以$\sin C=\sin\left(45^\circ+30^\circ\right)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

设BC边上高线的长为h，则

$h=b\sin C=2\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

选条件③：

因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=c\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

所以$c=1+\sqrt{3}$，

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+4+2\sqrt{3}-2\times 2\times(1+\sqrt{3})\cos 60^\circ=6$

所以$a=\sqrt{6}$.

设BC边上高线的长为h，则

$h=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

17. 【答案】（1）证明见解析

（2）$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）根据几何关系证明$AB\perp AC$，根据$PA\perp$底面$ABCD$得$PA\perp AC$，进而证明结论；

（2）根据题意，AE, AD, PA两两互相垂直，进而建立空间直角坐标系，设$PA=a(a>0)$，再根据坐标

法求解即可.

【小问 1 详解】

证明：设 BC 中点为 E，连接 AE，

易知 $ADCE$ 为正方形，且 $AC=\sqrt{2}, AE=1, AB=\sqrt{2}$

所以 $BC^2=AB^2+AC^2$，

所以 $AB\perp AC$

因为 $PA\perp$底面 $ABCD, AC\subset$底面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AC$

又 $PA, AB\subset$面 PAB， $PA\cap AB=A$

所以 $AC\perp$平面 PAB

【小问 2 详解】

解：因为 $PA\perp$底面 $ABCD$，在正方形 $ADCE$ 中 $AE\perp AD$

所以 AE, AD, PA 两两互相垂直.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$

设 $PA=a(a>0)$

则 $C(1,1,0), D(0,1,0), B(1,-1,0), P(0,0,a)$

所以 $\overrightarrow{PD}=(0,1,-a), \overrightarrow{DC}=(1,0,0)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$， 则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-az=0\\ x=0.\end{cases}$

所以 $\vec{n}=(0,a,1)$

由（1）知，平面 PAB 的法向量为 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$

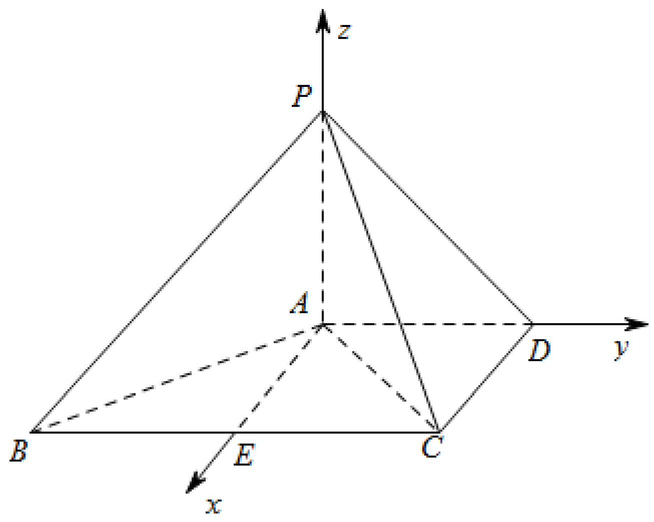
因为平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,

所以 $\cos\frac{\pi}{3}=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\vec{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AC}||\vec{n}|}=\frac{|(1,1,0)\cdot(0,1,-a)|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+(-a)^2}}=\frac{1}{2}$，解得 $a=1$

设点 B 到平面 PCD 的距离为 d.

$\overrightarrow{BC}=(0,2,0), \vec{n}=(0,1,1)$

则 $d=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(0,2,0)\cdot(0,1,1)|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$



18. 【答案】(1) $\frac{1}{5}$

(2) 分布列答案见解析，$E\left(X\right)=\frac{4}{3}$

(3) m 为 2、3、$\cdots$、11 中的任何一个数

【解析】

【分析】(1) 利用古典概型的概率公式可直接求得结果；

(2) 计算出样本中参加体育实践活动时间在 $\left[80,90\right)$ 和 $\left[90,100\right)$ 的学生总人数，以及相应的初中人数，分析可知 X 的可能取值有 0、1、2，计算出随机变量 X 在不同取值下的概率，可得出随机变量 X 的分布列，进而可求得 $E\left(X\right)$ 的值；

(3) 补全初中段的人数表格，再分别计 μ_0、μ_1、μ_2 关于 m 的解析式，代入 $\mu_0 \geq \frac{\mu_1+\mu_2}{2}$ 求解 m 的范围即可.

【小问 1 详解】

解：从该校随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，

估计该学生参加体育实践活动时间在 $\left[50,60\right)$ 的概率为 $\frac{9}{6+9+10+10+6+4}=\frac{1}{5}$.

【小问 2 详解】

解：参加体育实践活动时间在 $\left[80,90\right)$ 的学生总人数为 15，其中初中生 10 人，

参加体育实践活动时间在 $\left[90,100\right)$ 的学生总人数为 12，其中初中生 8 人，

由题意可知，随机变量 X 的可能取值有 0、1、2，

则 $P\left(X=0\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，$P\left(X=1\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，$P\left(X=2\right)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，

所以，随机变量 X 的分布列如下表所示：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

所以，$E\left(X\right)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$.

【小问 3 详解】

解：根据男女生人数补全初中学生各区间人数如下表所示：

类别 \ 人数 \ 时间		$\left[0,50\right)$	$\left[50,60\right)$	$\left[60,70\right)$	$\left[70,80\right)$	$\left[80,90\right)$	$\left[90,100\right)$
性别	男	5	12	13	8	9	8
	女	6	9	10	10	6	4
学段	初中	$11-m$	8	11	11	10	8
	高中	m	13	12	7	5	4

$\left[50,100\right]$内初中生的总运动时间$t_1=8\times55+11\times65+11\times75+10\times85+8\times95=3590$，

$\left[50,100\right]$内高中生的总运动时间$t_2=13\times55+12\times65+7\times75+5\times85+4\times95=2825$，

由题意可得$\mu_0=\frac{11\times25+3590+2825}{100}=66.9$，

$\mu_1=\frac{1}{59-m}\left[25\times\left(11-m\right)+3590\right]=\frac{2390}{59-m}+25$，$\mu_2=\frac{25m+2825}{41+m}=25+\frac{1800}{m+41}$，

由$\mu_0\geq\frac{\mu_1+\mu_2}{2}$可得$66.9\times2\geq\frac{2390}{59-m}+\frac{1800}{m+41}+50$，即$83.8\geq\frac{2390}{59-m}+\frac{1800}{m+41}$，

又因为$m\in\left\{0,1,2,\cdots,11\right\}$时成立，故$m$的取值范围为$\left\{2,3,4,\cdots,11\right\}$.

19. 【答案】（1）椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）$\pm\sqrt{2}$或$\pm\frac{\sqrt{38}}{2}$

【解析】

【分析】（1）根据题意得到b,c，进而求出a，最后得到椭圆方程和离心率；

（2）设出直线PM的方程并代入椭圆方程然后化简，再设出点M,Q的坐标，进而表达出面积，然后结合

根与系数的关系求出答案.

【小问1详解】

由题设，得$b=1,c=1$，则$a^2=b^2+c^2=2$，所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，离心率

$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【小问2详解】

设直线PM的方程为$y=kx+2$，由$\begin{cases}y=kx+2\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$得$\left(1+2k^2\right)x^2+8kx+6=0$，

$\Delta=(8k)^2-4\left(1+2k^2\right)\times 6>0$解得$k^2>\frac{3}{2}$.

设$M\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，则$x_1+x_2=\frac{-8k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{6}{1+2k^2}>0$，即$x_1,x_2$同号.

根据椭圆的对称性知$S_{\vartriangle OMQ}=S_{\vartriangle ONQ}=\frac{1}{2}S_{\vartriangle MNQ}$，$S_{\vartriangle POM}=S_{\vartriangle PON}$，所以

$S_{\vartriangle OMQ}=S_{\vartriangle ONQ}=S_{\vartriangle POQ}-S_{\vartriangle PON}=S_{\vartriangle POQ}-S_{\vartriangle POM}$

$=\left|\frac{1}{2}\times 2\times\left|x_2\right|-\left|\frac{1}{2}\times 2\times\right|x_1\right||=\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{64k^2}{\left(1+2k^2\right)^2}-\frac{24}{1+2k^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，整理得

$2k^4-23k^2+38=0$，

解得$k^2=2,k^2=\frac{19}{2}$，（满足$k^2>\frac{3}{2}$）

所以$k=\pm\sqrt{2}$，或$k=\pm\frac{\sqrt{38}}{2}$.

【点睛】本题运算量较大，对于用“根与系数的关系”解决问题是个老套路，但本题对于面积的处理有一定的技巧，平常注意对此类题型的训练.

20. 【答案】（1）$y+1=0$

（2）证明见解析　　（3）$f\left(x\right)_{\min}=\begin{cases}-\frac{1}{2}a,a\le \mathrm{e}\\ -\frac{1}{2}a\left[\left(\ln a-1\right)^2+1\right],\mathrm{e}<a<\mathrm{e}^2\\ \mathrm{e}^2-2a,a\ge \mathrm{e}^2\end{cases}$

【解析】

【分析】（1）当$a=0$时，求出$f\left(0\right)$、$f'\left(0\right)$的值，利用导数的几何意义可求得曲线$y=f\left(x\right)$在$x=0$处的切线方程；

（2）当$0<a<1$时，求得 $f'(x)=x\left(e^{x}-a\right)$，利用导数分析函数 $f(x)$的单调性与极值，结合零点存在定理可证得结论成立；

（3）对实数a的取值进行分类讨论，利用导数分析函数 $f(x)$在$[1,2]$上的单调性，即可求得函数 $f(x)$在$[1,2]$上的最小值.

【小问 1 详解】

当$a=0$时， $f(x)=(x-1)e^{x}$，则 $f(0)=0, f'(x)=xe^{x}$，所以切线的斜率为 $f'(0)=0$，

所以当$a=0$时，曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程为$y+1=0$.

【小问 2 详解】

证明：当$0<a<1$时， $f'(x)=xe^{x}-ax=x\left(e^{x}-a\right)$，

令 $f'(x)=0$，则$x=0$或$x=\ln a$，且$\ln a<0$，列表如下：

x	$(-\infty,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以函数 $f(x)$的极大值为 $f(\ln a)=a(\ln a-1)-\frac{1}{2}a(\ln a)^{2}=-\frac{1}{2}a\left[(\ln a-1)^{2}+1\right]<0$，

极小值为 $f(0)=-1<0$，

故当$x<0$时， $f(x)\leq f(\ln a)<0$，

又因为 $f(2)=e^{2}-2a>0$，由零点存在定理可知，函数 $f(x)$在$(0,2)$上存在唯一零点.

综上所述，当$0<a<1$时，函数 $f(x)$有且只有一个零点.

【小问 3 详解】

因为 $f(x)=(x-1)e^{x}-\frac{1}{2}ax^{2}(a\in\mathbf{R})$，所以 $f'(x)=x\left(e^{x}-a\right)$.

①当$a\leq e$时，对任意的$x\in[1,2]$， $e^{x}-a\geq 0$，则 $f'(x)\geq 0$且 $f'(x)$不恒为零，

此时函数 $f(x)$在$[1,2]$上单调递增，则 $f(x)_{\min}=f(1)=-\frac{1}{2}a$；

②当$e<a<e^{2}$时，由 $f'(x)<0$，可得$1\leq x<\ln a$，由 $f'\ \ x\ \ >0$，可得$\ln a<x\leq 2$，

此时函数 $f(x)$在 $\ 1,\ln a\ $ 上单调递减，在$(\ln a,2]$上单调递增，

则 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a(\ln a-1)-\frac{1}{2}a(\ln a)^{2}=-\frac{1}{2}a\left[(\ln a-1)^{2}+1\right]$；

③当$a \geq e^2$时，对任意的$x \in [1,2]$，$f'(x) = x(e^x - a) \leq 0$且$f'(x)$不恒为零，

此时函数$f(x)$在$[1,2]$上单调递减，则$f(x)_{\min} = f(2) = e^2 - 2a$.

综上所述，$f(x)_{\min} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}a, a \leq e \\ -\dfrac{1}{2}a\left[(\ln a - 1)^2 + 1\right], e < a < e^2 \\ e^2 - 2a, a \geq e^2 \end{cases}$.

【点睛】方法点睛：利用导数解决函数零点问题的方法：

（1）直接法：先对函数求导，根据导数的方法求出函数的单调区间与极值，根据函数的基本性质作出图象，然后将问题转化为函数图象与x轴的交点问题，突出导数的工具作用，体现了转化与化归思想、数形结合思想和分类讨论思想的应用；

（2）构造新函数法：将问题转化为研究两函数图象的交点问题；

（3）参变量分离法：由$f(x) = 0$分离变量得出$a = g(x)$，将问题等价转化为直线$y = a$与函数$y = g(x)$的图象的交点问题.

21. 【答案】（1）$\{1,3,5\}$不具有性质P，$\{1,2,3,6\}$具有性质P，理由见解析；

（2）证明见解析；　　（3）75.

【解析】

【分析】(1)对于$\{1,3,5\}$，$3 \neq 1+1$，故可判断它不具有性质P；对于$\{1,2,3,6\}$可逐项验证2、3、6均满足对任意的$k(2 \leq k \leq n), \exists i, j(1 \leq i \leq j \leq n)$，使得$a_k = a_i + a_j$成立，故可判断它具有性质$P$；

(2)根据题意可知$a_i \leq a_{k-1}, a_j \leq a_{k-1}$，从而$a_k = a_i + a_j \leq 2a_{k-1}$，故而可得

$a_n \leq 2a_{n-1}, a_{n-1} \leq 2a_{n-2}, a_{n-2} \leq 2a_{n-3}, \ldots, a_3 \leq 2a_2, a_2 \leq 2a_1$，将这些式子累加即可得

$a_n \leq 2a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$，从而可变形为要证的结论；

(3)根据题中已知条件可得该数集$a_1 = 1$，$a_2 = 2a_1 = 2$，从而可得该数集元素均为整数，再根据$a_n = 36$可构造一个满足性质P的数集$A = \{1,2,3,6,9,18,36\}$或$A = \{1,2,4,5,9,18,36\}$，这两个数集元素之和为75，证明75是最小值即可.

【小问1详解】

$\because 3 \neq 1+1$，$\therefore \{1,3,5\}$不具有性质P；

$\because 2 = 1 \times 2, 3 = 1+2, 6 = 3+3$，$\therefore \{1,2,3,6\}$具有性质$P$；

【小问2详解】

$\because$集合$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$具有性质$P$：

即对任意的$k(2 \leq k \leq n), \exists i, j(1 \leq i \leq j \leq n)$，使得$a_k = a_i + a_j$成立，

又$\because 1=a_1<a_2<\ldots<a_n, n\geq 2$，

$\therefore a_i\leq a_{k-1}, a_j\leq a_{k-1}$，$\therefore a_k=a_i+a_j\leq 2a_{k-1}$，

即$a_n\leq 2a_{n-1}, a_{n-1}\leq 2a_{n-2}, a_{n-2}\leq 2a_{n-3},\ldots, a_3\leq 2a_2, a_2\leq 2a_1$，

将上述不等式相加得$a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n\leq 2\left(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}\right)$，

$\therefore a_n\leq 2a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$，由于$a_1=1$，

$\therefore a_n-1\leq a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$，$\therefore 2a_n-1\leq a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n=S_n$；

【小问 3 详解】

最小值为 75.

首先注意到$a_1=1$，根据性质 P，得到$a_2=2a_1=2$，

$\therefore$易知数集 A 的元素都是整数.

构造$A=\{1,2,3,6,9,18,36\}$或者$A=\{1,2,4,5,9,18,36\}$，

这两个集合具有性质 P，此时元素和为 75.

下面，证明 75 是最小的和：

假设数集$A=\left\{a_1,a_2,\ldots,a_n\right\}\left(a_1<a_2<\ldots<a_n,n\geq 2\right)$，满足$S=\sum_{i=1}^{n}a_i\leq 75$(存在性显然，$\because$满足$S=\sum_{i=1}^{n}a_i\leq 75$的数集 A 只有有限个).

第一步：首先说明集合$A=\left\{a_1,a_2,\ldots,a_n\right\}\left(a_1<a_2<\ldots<a_n,n\geq 2\right)$中至少有 7 个元素：

由(2)可知$a_2\leq 2a_1, a_3\leqslant 2a_2$，…

又$a_1=1$，$\therefore a_2\leq 2, a_3\leq 4, a_4\leq 8, a_5\leq 16, a_6\leq 32<36$；

$\therefore n\geq 7$；

第二步：证明$a_{n-1}=18, a_{n-2}=9$；

若$18\in A$，设$a_t=18$，$\because a_n=36=18+18$，为了使得$S=\sum_{i=1}^{n}a_i$最小，在集合 A 中一定不含有元素a_k，使得$18<a_k<36$，从而$a_{n-1}=18$；

假设$18\notin A$，根据性质 P，对$a_n=36$，有a_i, a_j，使得$a_n=36=a_i+a_j$，

显然$a_i\neq a_j$，$\therefore a_n+a_i+a_j=36+36=72$，

而此时集合 A 中至少还有 4 个不同于a_n, a_i, a_j的元素，

从而$S>\left(a_n+a_i+a_j\right)+4a_1=76$，矛盾，

$\therefore 18\in A$，进而$a_t=18$，且$a_{n-1}=18$；

同理可证：$a_{n-2}=9$；

（同理可以证明：若$9\in A$，则$a_{n-2}=9$）.

假设$9\notin A$.

$\because a_{n-1}=18$，根据性质 P，有a_i,a_j，使得$a_{n-1}=18=a_i+a_j$，

显然$a_i\neq a_j$，$\therefore a_n+a_{n-1}+a_i+a_j=72$，

而此时集合 A 中至少还有 3 个不同于a_n,a_{n-1},a_i,a_j的元素，

从而$S>a_n+a_{n-1}+a_i+a_j+3a_1=75$，矛盾，

$\therefore 9\in A$，且$a_{n-2}=9$；

至此，我们得到了$a_{n-1}=18,a_{n-2}=9$，

根据性质 P，有a_i,a_j，使得$9=a_i+a_j$，

我们需要考虑如下几种情形：

①$a_i=8,a_j=1$，此时集合中至少还需要一个大于等于 4 的元素a_k，才能得到元素 8，

则$S>76$；

②$a_i=7,a_j=2$，此时集合中至少还需要一个大于 4 的元素a_k，才能得到元素 7，则$S>76$；

③$a_i=6,a_j=3$，此时集合$A=\{1,2,3,6,9,18,36\}$的和最小，为 75；

④$a_i=5,a_j=4$，此时集合$A=\{1,2,4,5,9,18,36\}$的和最小，为 75.

【点睛】本题第二问考察对题设条件的理解，根据数集要满足性质 P，得到其元素之间应该满足的大小关系，利用数列的累加法思想即可得数集的“前 n 项和”的范围；本题第三问采用枚举法即可证明，根据题设信息不断地确定数集 A 中的具体元素，将抽象问题具体化，从而证明出结论，过程中需用反证法证明猜想.