2023北京理工大附中高三12月月考

数　　学

总分：150分　测试时间：120分钟

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. $A=\{1,a\}$，$B=\{2,3,4\}$，且$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，则实数a取值的集合是（　）

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$

C. $\{2\}$　　D. $\{3\}$

2. 设$m\in R$，则“$m=2$”是“复数$z=(m+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$为纯虚数”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 下列函数中，既是偶函数又在$(0,3)$上单调递减的是（　）

A. $y=x^2-4$　　B. $y=-x^3$　　C. $y=|x|+\dfrac{1}{|x|}$　　D. $y=\cos x$

4. 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，则其渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm\sqrt{3}x$　　C. $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

5. 已知角α的终边在第三象限，且$\tan\alpha=2$，则$\sin\alpha-\cos\alpha=$（　）

A. -1　　B. 1　　C. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

6. 设函数$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x,x\le 1\\ \log_2 x,x>1\end{cases}$，若$f(x)\le 2$，则实数$x$的取值范围是（　）

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(0,4]$　　C. $[-1,4]$　　D. $(-\infty,4]$

7. 如图，A，B是两个形状相同的杯子，且B杯高度是A杯高度的$\dfrac{3}{4}$，则B杯容积与A杯容积之比最接近的是（　）

A　　　B

A. 1:3　　　B. 2:5　　　C. 3:5　　　D. 3:4

8. 已知向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=\sqrt{2}$，且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\cos\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\rangle=$（　）

A. $-\dfrac{4}{5}$　　　B. $-\dfrac{2}{5}$　　　C. $\dfrac{2}{5}$　　　D. $\dfrac{4}{5}$

9. 图 1 是中国古代建筑中的举架结构，AA',BB',CC',DD' 是桁，相邻桁的水平距离称为步，垂直距离称为举，图 2 是某古代建筑屋顶截面的示意图．其中 DD_1,CC_1,BB_1,AA_1 是举，OD_1,DC_1,CB_1,BA_1 是相等的步，相邻桁的举步之比分别为 $\dfrac{DD_1}{OD_1}=0.5,\dfrac{CC_1}{DC_1}=k_1,\dfrac{BB_1}{CB_1}=k_2,\dfrac{AA_1}{BA_1}=k_3$．已知 k_1,k_2,k_3 成公差为 0.1 的等差数列，且直线 OA 的斜率为 0.725，则 $k_3=$（　）

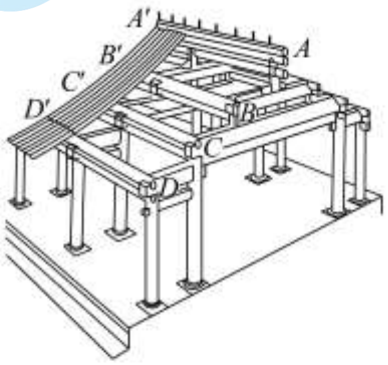


图1

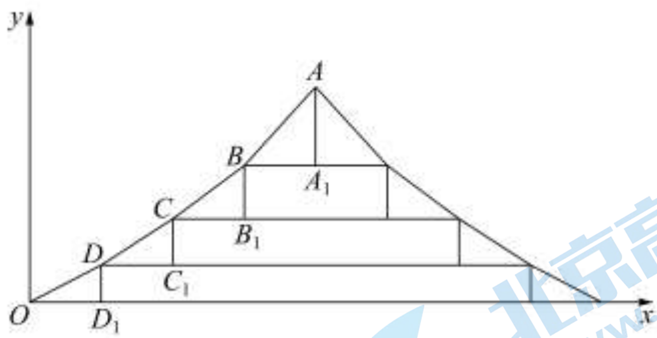


图2

A. 0.75　　　B. 0.8　　　C. 0.85　　　D. 0.9

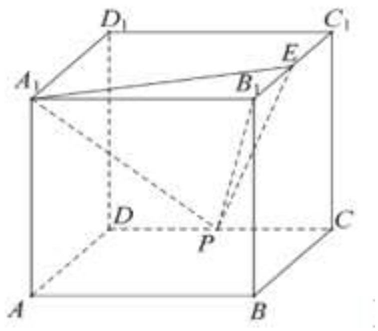
10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 B_1C_1 的中点．动点 P 沿着棱 DC 从点 D 向点 C 移动，对于下列三个结论：

①存在点 P，使得 $PA_1=PE$；

②$\triangle PA_1E$ 的面积越来越小；

③四面体 A_1PB_1E 的体积不变．

其中，所有正确结论的个数是（　）．



A. 0　　　　　　B. 1　　　　　　C. 2　　　　　　D. 3

二、填空题共 5 道小题，每题 5 分，共 25 分，把答案填在答题卡上.

11. 若抛物线 $y^2=12x$ 的焦点为 F，点 P 在此抛物线上且横坐标为3，则 $|PF|=$________.

12. 已知直线 $x-\sqrt{3}y+8=0$ 和圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相交于 A,B 两点. 若 $|AB|=6$，则 r 的值为________.

13. 将函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是____.

14. 已知直线 $l:ax+by-3=0$ 经过点 $(a,b-2)$，则原点到点 $P(a,b)$ 的距离可以是__________.（答案不唯一，写出你认为正确的一个常数就可以）

15. 已知集合 $A=\{x\,|\,x=2n-1,n\in\mathrm{N}^*\}$，$B=\{x\,|\,x=2^n,n\in\mathrm{N}^*\}$. 将 $A\cup B$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列 $\{a_n\}$. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则使得 $S_n>12a_{n+1}$ 成立的 n 的最小值为________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知函数 $f(x)=2cosx\bullet sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

（2）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上的最小值和最大值.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，$bc=a^2-b^2-c^2$.

（1）求 $\angle A$ 的大小;

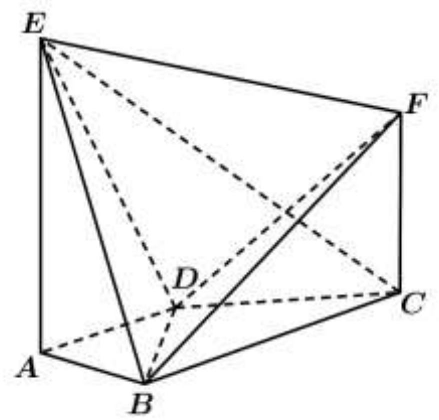
（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$\cos B=\frac{1}{3}$；

条件②：$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

条件③：$a=2\sqrt{3}$.

18. 如图，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF\,/\!/\,AE$，$AD\,/\!/\,BC$，$AD\perp AB$，$AB=AD=1$，$AE=BC=2$.



（Ⅰ）求证：$BF//$ 平面 ADE；

（Ⅱ）求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值；

（Ⅲ）若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，求线段 CF 的长.

19. 已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}(a\neq 0)$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若存在两条直线 $y=ax+b_1, y=ax+b_2\left(b_1\neq b_2\right)$ 都是曲线 $y=f(x)$ 的切线，求实数 a 的取值范围；

20. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点分别为 A_1, A_2，右焦点为 F，已知 $|A_1F|=3, |A_2F|=1$.

（1）求椭圆方程及其离心率；

（2）已知点 P 是椭圆上一动点（不与端点重合），直线 A_2P 交 y 轴于点 Q，若三角形 A_1PQ 的面积是三角形 A_2FP 面积的二倍，求直线 A_2P 的方程.

21. 数列 $\{a_n\}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$ 有 100 项，$a_1=a$，对任意 $n\in[2,100]$，存在 $a_n=a_i+d, 1\leq i\leq n-1$,若 a_k 与前 n 项中某一项相等，则称 a_k 具有性质 P.

（1）若 $\mathrm{a}_1=1, \mathrm{d}=2$，写出 a_4 所有可能的值；

（2）若 $\{a_n\}$ 不是等差数列，求证：数列 $\{a_n\}$ 中存在某些项具有性质 P;

（3）若 $\{a_n\}$ 中恰有三项具有性质 P，这三项和为 c，请用 a、d、c 表示 $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 【答案】B

【分析】根据给定条件可得 $a\neq1$ 且 $a\in\left(A\cup B\right)$ 即可求解作答.

【详解】因 $A=\{1,a\}$， $B=\{2,3,4\}$，且 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$，则 $A\subseteq\left(A\cup B\right)$，于是得 $a\in\left(A\cup B\right)$ 且 $a\neq1$，

即有 $a=2$ 或 $a=3$ 或 $a=4$，

所以实数 a 取值的集合是 $\{2,3,4\}$.

故选：B.

2. 【答案】C

【分析】求出 $z=\left(m+2\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)$ 为纯虚数时 m 的值，与 $m=2$ 比较，判断出结果

【详解】 $z=\left(m+2\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)=m-2+\left(m+2\right)\mathrm{i}$，复数 $z=\left(m+2\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)$ 为纯虚数，则 $m-2=0$，解得：$m=2$，所以则“$m=2$”是“复数 $z=\left(m+2\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)$ 为纯虚数”的充要条件

故选：C

3. 【答案】D

【分析】利用偶函数和单调性的知识即可判断.

【详解】对于 A 选项，定义域为 R，将 $-x$ 代入得 $y=\left(-x\right)^2-4=x^2-4$，即为偶函数，

而 $y=x^2-4$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，不符合题意；

对于 B 选项，定义域为 R，将 $-x$ 代入得 $y=-\left(-x\right)^3=x^3$，即为奇函数，不符合题意；

对于 C 选项，定义域为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，

将 $-x$ 代入得 $y=\left|-x\right|+\dfrac{1}{\left|-x\right|}=\left|x\right|+\dfrac{1}{\left|x\right|}$，即为偶函数，

当 $x\in(0,3)$ 时， $\mathrm{y}=\mathrm{x}+\dfrac{1}{\mathrm{x}}$ 为对勾函数，

在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,3\right)$ 上单调递增，不符合题意；

对于 D 选项，定义域为 R，将 $-x$ 代入得 $y=\cos\left(-x\right)=\cos x$，即为偶函数，

而 $y=\cos x$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上单调递减，所以在 $\left(0,3\right)$ 上单调递减，即 D 符合题意.

故选：D.

4. 【答案】A

【详解】分析：根据离心率得 a, c 关系，进而得 a, b 关系，再根据双曲线方程求渐近线方程，得结果.

详解：$\because e=\frac{c}{a}=\sqrt{3},\therefore \frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1=3-1=2,\therefore \frac{b}{a}=\sqrt{2},$

因为渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，所以渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，选 A.

点睛：已知双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 求渐近线方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$.

5.【答案】C

【分析】由同角之间的公式可求得 $\sin\alpha,\cos\alpha$，进而得解.

【详解】由角 α 的终边在第三象限，则 $\sin\alpha<0,\cos\alpha<0$

由题设知 $\begin{cases}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$，解得 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

故选：C

6.【答案】C

【分析】根据分段函数解析式，讨论 x 结合指对数的单调性求 x 的取值范围.

【详解】当 $x\le 1$ 时，$(\frac{1}{2})^x\le 2$，可得 $x\ge -1$，故 $-1\le x\le 1$；

当 $x>1$ 时，$\log_2 x\le 2$，可得 $x\le 4$，故 $1<x\le 4$.

综上，$-1\le x\le 4$.

故选：C.

7.【答案】B

【分析】根据两个杯子形状相同可得底面积之比为高之比的平方，因此容积之比为高之比的立方即可求解.

【详解】因为 A，B 是两个形状相同的杯子，且 B 杯高度是 A 杯高度的 $\frac{3}{4}$，

所以底面半径比也是 $\frac{3}{4}$，

所以两个杯子的底面积之比为 $S_B:S_A=\left(\frac{3}{4}\right)^2$，

所以 B 杯容积与 A 杯容积之比 $\frac{S_Bh_B}{S_Ah_A}=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{27}{64}\approx 0.4=2:5$，

故选：B.

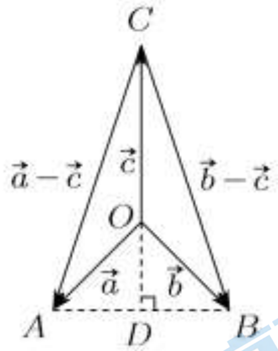
8.【答案】D

【分析】作出图形,根据几何意义求解.

【详解】因为 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,所以 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$,

即 $\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}^2$,即 $1+1+2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$,所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

如图,设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$,



由题知,$OA=OB=1,OC=\sqrt{2}$,$\triangle OAB$ 是等腰直角三角形,

AB 边上的高 $OD=\dfrac{\sqrt{2}}{2},AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $CD=CO+OD=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\tan\angle ACD=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{1}{3},\cos\angle ACD=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$,

$\cos\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\rangle=\cos\angle ACB=\cos 2\angle ACD=2\cos^2\angle ACD-1$

$=2\times\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2-1=\dfrac{4}{5}$.

故选:D.

9.【答案】D

【分析】设 $OD_1=DC_1=CB_1=BA_1=1$,则可得关于 k_3 的方程,求出其解后可得正确的选项.

【详解】设 $OD_1=DC_1=CB_1=BA_1=1$,则 $CC_1=k_1,BB_1=k_2,AA_1=k_3$,

依题意,有 $k_3-0.2=k_1,k_3-0.1=k_2$,且 $\dfrac{DD_1+CC_1+BB_1+AA_1}{OD_1+DC_1+CB_1+BA_1}=0.725$,

所以 $\dfrac{0.5+3k_3-0.3}{4}=0.725$,故 $k_3=0.9$,

故选:D

10.【答案】D

【分析】建立空间直角坐标系,根据两点间的距离公式、点到直线的距离公式,以及锥体体积计算公式等知识求得正确答案.

【详解】以 D 为原点，建立如图所示空间直角坐标系，

设正方体的边长为2，则 $A_1(2,0,2),E(1,2,2)$，设 $P(0,a,0)$，$0\le a\le 2$

由 $PA_1=PE$ 得 $\sqrt{2^2+a^2+2^2}=\sqrt{1^2+(a-2)^2+2^2}$，

$a^2+8=a^2-4a+9,a=\frac{1}{4}$，所以存在点 P，使得 $PA_1=PE$，所以①正确.

$\overrightarrow{A_1E}=(-1,2,0),\left|\overrightarrow{A_1E}\right|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$，

$\overrightarrow{PA_1}=(2,-a,2),\left|\overrightarrow{PA_1}\right|=\sqrt{2^2+a^2+2^2}=\sqrt{a^2+8}$，

所以 P 到 A_1E 的距离为 $d=\sqrt{\overrightarrow{PA_1}^2-\left(\frac{\overrightarrow{PA_1}\cdot\overrightarrow{A_1E}}{\left|\overrightarrow{A_1E}\right|}\right)^2}=\sqrt{a^2+8-\left(\frac{-2-2a}{\sqrt{5}}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{a^2-8a+36}{5}}=\sqrt{\frac{(a-4)^2+20}{5}}$，$y=a^2-8a+36$ 的对称轴为 $a=4$，

而 $0\le a\le 2$，所以 d 随 a 的增大而减小，

所以 $\triangle PA_1E$ 的面积 $\frac{1}{2}\times\left|\overrightarrow{A_1E}\right|\times d=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{\frac{(a-4)^2+20}{5}}$ 随 a 的增大而减小，

所以②正确.

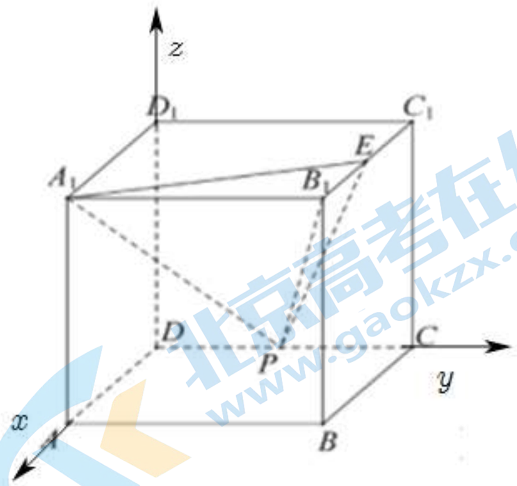
对于③，$V_{A_1-PB_1E}=V_{P-A_1B_1E}$，$\triangle A_1B_1E$ 的面积 $S_{\triangle A_1B_1E}=\frac{1}{2}\times A_1B_1\times B_1E$ 为定值，

点 P 到平面 A_1B_1E 的距离，等于 P 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离，此距离为定值，

所以四面体 A_1PB_1E 的体积不变. 所以③正确.

综上所述，正确的有3个.

故选：D



【点睛】空间中，要求三角形的面积，关键是求点到直线的距离，空间向量法求点到直线的距离公式比较

复杂，需要记忆准确.空间中求三棱锥的体积，关键是求点到面的距离，本题中，P 到平面 A_1B_1E 的距离为定值，另外，也可以利用向量法来求点面距.

二、填空题共 5 道小题，每题 5 分，共 25 分，把答案填在答题卡上.

11.【答案】6

【分析】根据抛物线的焦半径公式即可求解.

【详解】设 $P\left(x,y\right)$，由题意可知 $p=6$ ，则 $|PF|=x+\frac{p}{2}=3+3=6$，

故答案为：6

12.【答案】5

【分析】根据圆的方程得到圆心坐标和半径，由点到直线的距离公式可求出圆心到直线的距离 d ，进而利用弦长公式 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$ ，即可求得 r .

【详解】因为圆心 $\left(0,0\right)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y+8=0$ 的距离 $d=\frac{8}{\sqrt{1+3}}=4$，

由 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$ 可得 $6=2\sqrt{r^2-4^2}$ ，解得 $r=5$.

故答案为：5 .

【点睛】本题主要考查圆的弦长问题，涉及圆的标准方程和点到直线的距离公式，属于基础题.

13.【答案】$x=-\frac{5\pi}{24}$

【分析】先根据图象变换得解析式，再求对称轴方程，最后确定结果.

【详解】$y=3\sin[2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{4}]=3\sin(2x-\frac{\pi}{12})$

$2x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)\therefore x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$

当 $k=-1$ 时 $x=-\frac{5\pi}{24}$

故答案为：$x=-\frac{5\pi}{24}$

【点睛】本题考查三角函数图象变换、正弦函数对称轴，考查基本分析求解能力，属基础题.

14.【答案】2（答案不唯一）

【分析】根据直线过点 $(a,b-2)$，求出 $P(a,b)$ 的轨迹方程，可确定原点到点 $P(a,b)$ 的距离的范围，即可得答案.

【详解】由于直线 $l:ax+by-3=0$ 经过点 $(a,b-2)$，

即 $a^2+b(b-2)-3=0$，即 $a^2+(b-1)^2=4$，

故 $P(a,b)$ 在以 $(0,1)$ 为圆心，2 为半径的圆上，

由于 $0^2+(0-1)^2<4$，即原点在该圆内，

故 $|OP|\in[1,3]$，则原点到点 $P(a,b)$ 的距离可以是 2，

故答案为：2

15.【答案】27

【分析】方法一：先根据等差数列以及等比数列的求和公式确定满足条件的项数的取值范围，再列不等式求满足条件的项数的最小值.

【详解】[方法一]：【通性通法】【最优解】

设 $a_n=2^k$，则 $S_n=[(2\times1-1)+(2\times2-1)+\cdots+(2\cdot2^{k-1}-1)]+\left(2+2^2+\cdots+2^k\right)$

$$=\frac{2^{k-1}\left(1+2\times2^{k-1}-1\right)}{2}+\frac{2(1-2^k)}{1-2}=2^{2k-2}+2^{k+1}-2$$

由 $S_n>12a_{n+1}$ 得 $2^{2k-2}+2^{k+1}-2>12(2^k+1)$，化简得，

$(2^{k-1})^2-20\times(2^{k-1})-14>0$，解得：$2^{k-1}\geq2^5$，即 $k\geq6$.

所以只需研究 $2^5<a_n<2^6$ 是否有满足条件的解，

此时 $S_n=[(2\times1-1)+(2\times2-1)+\cdots+(2m-1)]+\left(2+2^2+\cdots+2^5\right)=m^2+2^{5+1}-2$，$a_{n+1}=2m+1$，$m$ 为等差数列项数，且 $m>16$.

由 $m^2+2^{5+1}-2>12(2m+1)$ 即 $m^2-24m+50>0$，解得 $m\geq22$，所以 $n=m+5\geq27$

得满足条件的 n 最小值为 27.

故答案为：27.

[方法二]：列举法＋二分法

$B=\{2,4,8,16,32,64,128,\cdots\}$ 与 $A=\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,\cdots\}$ 相比，B 元素间隔大．因此利用列举法从 $\{a_n\}$ 中元素构成看，分别加了几个 B 中元素进行考虑.

1 个：$n=1+1=2,S_2=1+2=3,12a_3=36$；

2 个：$n=2+2=4,S_4=10,12a_5=60$；

3 个：$n=4+3=7,S_7=30,12a_8=108$；

4 个：$n=8+4=12,S_{12}=94,12a_{13}=204$；

5 个：$n=16+5=21,S_{21}=318,12a_{22}=396$；

6 个：$n=32+6=38,S_{38}=1150,12a_{39}=780$.

发现当 $21\leq n\leq38$ 时，$S_n=12a_{n+1}$ 发生变号，以下用二分法查找：

$S_{30}=687,12a_{31}=612$，所以所求 n 应在 22~29 之间.

$S_{25}=462,12a_{26}=492$，所以所求 n 应在 25~29 之间.

$S_{26}=\dfrac{2\times\left(1-2^5\right)}{1-2}+\dfrac{21\times(1+41)}{2}=62+441=503$，$12a_{27}=12\times43=516$，不符合条件；

$S_{27}=\dfrac{2\times\left(1-2^5\right)}{1-2}+\dfrac{22(1+43)}{2}=62+484=546$，$12a_{28}=12\times45=540$，符合条件.

因为$S_{27}>12a_{28}$，而$S_{26}<12a_{27}$，

故答案为：27.

【整体点评】方法一：先由求和公式寻找不等式成立的充分条件，即当第n项的值大于等于2^6时，不等式成立，再寻找第n项的值在2^5与2^6之间时是否也可以有满足题意的解，从而解出，是本题的通性通法，也是最优解；

方法二：根据两个集合的特征，一一列举集合中的元素，并研究集合$\{a_n\}$中元素的和S_n与$12a_{n+1}$的变化规律，从而找出可能满足不等式的解，再由二分法验证解出，该法计算较为麻烦.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】(1) π (2) 最大值0．最小值$-\dfrac{3}{2}$.

【分析】

(1) 先利用两角差的正弦公式展开，再利用二倍角公式和辅助角公式(或两角差的正弦公式)合并成$y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)+k$的形式，即可求出函数$f\left(x\right)$的最小正周期.

(2) 由$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$，求出$t=2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{7\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6}\right]$，再根据$y=\sin t$的单调性可求出函数$f\left(x\right)$的最大最小值.

【详解】(1) 因为$f(x)=2\cos x\cdot(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x)$

$=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}$

$=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{1}{2}$

所以函数$f(x)$的最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) 因为$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le 0$，所以$-\dfrac{7\pi}{6}\le t=2x-\dfrac{\pi}{6}\le-\dfrac{\pi}{6}$，而$y=\sin t$在$\left[-\dfrac{7\pi}{6},-\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减，在$\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{6}\right]$上单调递增，而$\sin\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)>\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

所以当$t=2x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}$，即$x=-\dfrac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最小值$-\dfrac{3}{2}$，

当$t=2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$，即$x=-\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$取得最大值0．

【点睛】本题主要考查两角差的正弦公式、二倍角公式、辅助角公式的应用，以及三角函数在闭区间上的最值求法，意在考查学生的转化和运算能力，属于基础题.

17.【答案】（1）$A=\frac{2\pi}{3}$

（2）选条件②③，$S_{\triangle ABC}=3-\sqrt{3}$

【分析】（1）由余弦定理$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$结合$0<A<\pi$，即可求出$A=\frac{2\pi}{3}$；

（2）由（1）可知$B+C=\frac{\pi}{3}$，则可得出$\sin B<\frac{\sqrt{3}}{2}$，而条件①等价于$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{2}$故条件①恒不成立，即选择条件②③，利用正弦定理可求出$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=2\sqrt{2}$，再由

$\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，代入$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$，即可求出答案.

【小问1详解】

由余弦定理得：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$

又$0<A<\pi$

所以$A=\frac{2\pi}{3}$.

【小问2详解】

因为$A=\frac{2\pi}{3}$，所以$B+C=\frac{\pi}{3}$，

所以$\sin B<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当$\cos B=\frac{1}{3}$时，$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{2}$，与$\sin B<\frac{\sqrt{3}}{2}$矛盾，故条件①恒不成立，

则选择条件②：$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$与条件③：$a=2\sqrt{3}$.

由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$，

又因为$0<C<\frac{\pi}{3}$，$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

所以 $\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\sin B=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=3-\sqrt{3}$.

18. 【答案】(Ⅰ) 见证明；(Ⅱ) $\dfrac{4}{9}$ (Ⅲ) $\dfrac{8}{7}$

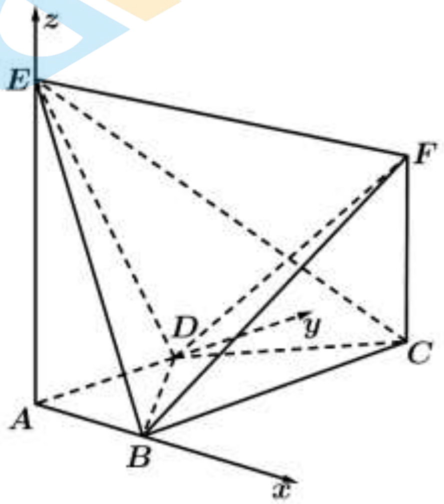
【分析】首先利用几何体的特征建立空间直角坐标系

(Ⅰ)利用直线 BF 的方向向量和平面 ADE 的法向量的关系即可证明线面平行；

(Ⅱ)分别求得直线 CE 的方向向量和平面 BDE 的法向量，然后求解线面角的正弦值即可；

(Ⅲ)首先确定两个半平面的法向量，然后利用二面角的余弦值计算公式得到关于 CF 长度的方程，解方程可得 CF 的长度.

【详解】依题意，可以建立以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴正方向的空间直角坐标系(如图)，



可得 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,2,0),D(0,1,0),E(0,0,2)$.

设 $CF=h(h>0)$，则 $F(1,2,h)$.

(Ⅰ)依题意，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ 是平面 ADE 的法向量，

又 $\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，可得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

又因为直线 $BF\not\subset$ 平面 ADE，所以 $BF\parallel$ 平面 ADE .

(Ⅱ)依题意，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$, $\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$, $\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+y=0\\ -x+2z=0\end{cases}$，

不妨令 $z=1$，可得 $\vec{n}=(2,2,1)$，

因此有 $\cos\langle\overrightarrow{CE},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CE}||\vec{n}|}=-\dfrac{4}{9}$.

所以，直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\dfrac{4}{9}$.

(III)设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 为平面 BDF 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+y=0\\ 2y+hz=0\end{cases}$.

不妨令 $y=1$，可得 $\vec{m}=\left(1,1,-\dfrac{2}{h}\right)$.

由题意，有 $\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\times|\vec{n}|}=\dfrac{\left|4-\dfrac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2+\dfrac{4}{h^2}}}=\dfrac{1}{3}$，解得 $h=\dfrac{8}{7}$.

经检验，符合题意。

所以，线段 CF 的长为 $\dfrac{8}{7}$.

【点睛】本题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识. 考查用空间向量解决立体几何问题的方法. 考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力.

19. 【答案】（1）答案见解析

（2）$a>4$

【分析】（1）求出函数的导数，讨论 a 的取值范围，结合解不等式，即可求得答案；

（2）由题意可得 $f'(x)=a$ 至少有 2 个不等正根，即 $ax^2-ax+1=0$ 有 2 个不等正根，由此列不等式求解，可得 a 的范围，验证后即可确定答案.

【小问 1 详解】

由题意得 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{x}(a\neq 0)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{ax-1}{x^2}$，

当 $a<0$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$，无增区间；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=\dfrac{ax-1}{x^2}>0,\therefore x>\dfrac{1}{a}$；令 $f'(x)=\dfrac{ax-1}{x^2}<0,\therefore 0<x<\dfrac{1}{a}$；

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,\dfrac{1}{a})$，单调递增区间为 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$；

故当 $a<0$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$，无增区间；

当 $a>0$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调递减区间为 $(0,\frac{1}{a})$，单调递增区间为 $(\frac{1}{a},+\infty)$；

【小问 2 详解】

因为存在两条直线 $y=ax+b_1, y=ax+b_2\left(b_1\neq b_2\right)$ 都是曲线 $y=f(x)$ 的切线，

故 $f'(x)=a$ 至少有 2 个不等正根，

令 $f'\left(x\right)=\frac{ax-1}{x^2}=a$，即 $ax^2-ax+1=0$，设其两个根为 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，

则 $\begin{cases}\Delta=a^2-4a>0\\ x_1x_2=\frac{1}{a}>0\end{cases}$，解得 $a>4$，

当 $a>4$ 时，曲线 $f\left(x\right)$ 在点 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right),\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$ 处的切线方程分别为：

$y=ax+f\left(x_1\right)-ax_1, y=ax+f\left(x_2\right)-ax_2$；

设 $F(x)=f(x)-ax(x>0)$，

由于 $F'(x)=f'\left(x\right)-a=\frac{-ax^2+ax-1}{x^2}=\frac{-a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}{x^2}$，

当 $x_1<x<x_2$ 时，$F'(x)>0$，故 $F(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递增，即 $F\left(x_1\right)\neq F\left(x_2\right)$，

故 $y=ax+f\left(x_1\right)-ax_1, y=ax+f\left(x_2\right)-ax_2$ 不重合，

即 $y=ax+b_1, y=ax+b_2\left(b_1\neq b_2\right)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的两条不同的切线，

故 $a>4$.

20.【答案】（1）椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，离心率为 $e=\frac{1}{2}$.

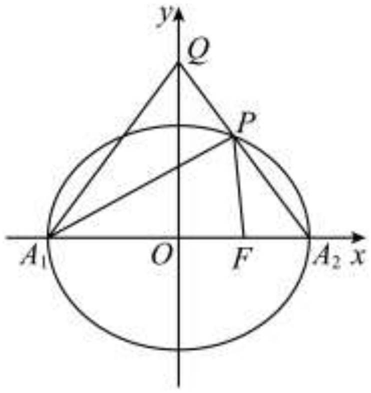
（2）$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\left(x-2\right)$.

【分析】（1）由 $\begin{cases}a+c=3\\ a-c=1\end{cases}$ 解得 $a=2,c=1$，从而求出 $b=\sqrt{3}$，代入椭圆方程即可求方程，再代入离心率公式即求离心率.

（2）先设直线 A_2P 的方程，与椭圆方程联立，消去 y，再由韦达定理可得 $x_{A_2}\cdot x_P$，从而得到 P 点和 Q 点坐标.由 $S_{\triangle A_2QA_1}=S_{\triangle A_1PQ}+S_{\triangle A_1A_2P}=2S_{\triangle A_2PF}+S_{\triangle A_1A_2P}$ 得 $2\left|y_Q\right|=3\left|y_P\right|$，即可得到关于 k 的方程，解出 k，代入直线 A_2P 的方程即可得到答案.

【小问 1 详解】

如图，



由题意得$\begin{cases}a+c=3\\a-c=1\end{cases}$，解得$a=2,c=1$，所以$b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

【小问 2 详解】

由题意得，直线A_2P斜率存在，由椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$可得$A_2(2,0)$，

设直线A_2P的方程为$y=k(x-2)$，

联立方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\y=k(x-2)\end{cases}$，消去$y$整理得：$(3+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$，

由韦达定理得$x_{A_2}\cdot x_P=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$，所以$x_P=\frac{8k^2-6}{3+4k^2}$，

所以$P\left(\frac{8k^2-6}{3+4k^2},-\frac{12k}{3+4k^2}\right)$，$Q(0,-2k)$.

所以$S_{\triangle A_2QA_1}=\frac{1}{2}\times4\times|y_Q|,S_{\triangle A_2PF}=\frac{1}{2}\times1\times|y_P|,S_{\triangle A_1A_2P}=\frac{1}{2}\times4\times|y_P|$，

所以$S_{\triangle A_2QA_1}=S_{\triangle A_1PQ}+S_{\triangle A_1A_2P}=2S_{\triangle A_2PF}+S_{\triangle A_1A_2P}$，

所以$2|y_Q|=3|y_P|$，即$2|-2k|=3\left|-\frac{12k}{3+4k^2}\right|$，

解得$k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以直线A_2P的方程为$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$.

21.【答案】(1) 3,5,7

(2) 证明见解析　(3) $97a+4656d+c$

【分析】(1) 根据定义式子代入即可求解a_4；

(2) 通过数学归纳法证明逆否命题为真命题；

(3) 分析去掉具有P性质三项后，得到等差数列求和即可.

【小问 1 详解】

$a_1=a$，$a_2=a_1+d=1+2=3$；$a_3=a_i+d(i=1,2)$

当$i=1$时，$a_3=a_1+d=1+2=3$；当$i=2$时，$a_3=a_2+d=3+2=5$；

$a_4=a_i+d(i=1,2,3)$，

若$i=1$，则$a_4=a_1+d=1+2=3$；若$i=2$，则$a_4=a_2+d=3+2=5$；

若$i=3$，则$a_4=a_3+d=3+2=5$（与$i=2$时重复），或$a_4=a_3+d=5+2=7$；

所以a_4的可能值有$3,5,7$.

【小问 2 详解】

假设$\{a_n\}$中不存在满足性质P的项，即对任意$i,j\in[1,100]$，均有$a_i\neq a_j$；

下面数学归纳法证明，$\{a_n\}$是等差数列；

①当$n=2$时，$a_2=a_1+d$，成立；

②设当$n\le k,k\in[2,99]$且$k\in\mathrm{N}^*$时，$a_k=a_{k-1}+d$；

则当$n=k+1$时，因为a_{k+1}不具有性质P，故$a_{k+1}\neq a_i=a_{i-1}+d(i=1,2\ldots,k)$

而又存在$a_{k+1}=a_i+d(i=1,2,\ldots,k)$，故$i=k$，即$a_{k+1}=a_k+d$；

综上所述，当$\{a_n\}$中不存在满足性质P的项时，$\{a_n\}$时等差数列成立；

故其逆否命题：当$\{a_n\}$不是等差数列时，$\{a_n\}$中存在满足性质P的项成立.

【小问 3 详解】

将数列$\{a_n\}$中具有性质P的三项去掉，得到一个新的数列$\{b_n\}$，$b_1=a_1=a$，$n\in[2,97]$，$b_n=b_i+d(i\in[1,n-1])$，

且$\{b_n\}$中没有满足性质P的项，

由（2）可知，数列$\{b_n\}$是等差数列，所以$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{97}=97b_1+\frac{97\times 96}{2}d=97a+4656d$，

又因为数列$\{a_n\}$中去掉的三项和为c，所以$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=97a+4656d+c$.

【点睛】方法点睛：本题属于数列新定义问题，重点考查新定义“性质P”的理解和运用，考查等差数列和等比数列的定义和通项公式的运用，考查分类讨论思想方法，以及运算能力和推理能力. 处理带否定词的命题经常通过证明其逆否命题得到. 而（3）题关键是分析得出去掉三项后，得到一个等差数列再求和.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！