

2023 北京海淀高三二模

数 学

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{0, 1\}$, 则 ()

- A. $A \subsetneq B$ B. $B \subsetneq A$ C. $A = B$ D. $A \cap B = \emptyset$

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，其终边经过点 $P(1, 2)$, 则 $\sin \alpha =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

3. 若 $(2-x)^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的展开式中常数项为 32, 则 $n =$ ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

4. 下列函数中，既是奇函数又在区间 $(0, 1)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y = \lg x$ B. $y = \frac{2}{x}$ C. $y = 2^{|x|}$ D. $y = \tan x$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 3, a_1 - a_2 = a_3$, 则 S_n 的最大值为 ()

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

6. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 经过点 P 的任意一条直线与 C 均有公共点, 则点 P 的坐标可以为 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, -3)$ C. $(3, 4)$ D. $(2, -2)$

7. 芯片是科技产品中的重要元件，其形状通常为正方形。生产芯片的原材料中可能会存在坏点，而芯片中出现坏点即报废，通过技术革新可以减小单个芯片的面积，这样在同样的原材料中可以切割出更多的芯片，同时可以提高芯片生产的产品良率。

$$\text{产品良率} = \frac{\text{切割得到的无坏点的芯片数}}{\text{切割得到的所有芯片数}} \times 100\%$$

在芯片迭代升级过程中，每一代芯片的面积为上一代的 $\frac{1}{2}$ 。图 1 是一块形状为正方形的芯片原材料，上面

有 4 个坏点，若将其按照图 2 的方式切割成 4 个大小相同的正方形，得到 4 块第 3 代芯片，其中只有一块无坏点，则由这块原材料切割得到第 3 代芯片的产品良率为 25%。若将这块原材料切割成 16 个大小相同的正方形，得到 16 块第 5 代芯片，则由这块原材料切割得到第 5 代芯片的产品良率为 ()

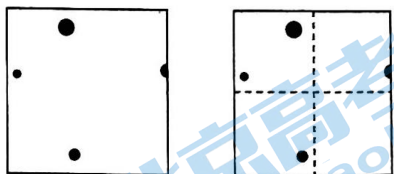


图 1 (原材料) 图 2 (第 3 代)

- A. 50% B. 62.5% C. 75% D. 87.5%

8. 已知正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形 $CDEF$ 所在平面互相垂直，且 $CD = 2$, P 是对角线 CE 的中点, Q

是对角线 BD 上一个动点, 则 P, Q 两点之间距离的最小值为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\sqrt{6}$

9. 已知 \vec{a}, \vec{b} 是平面内两个非零向量, 那么 “ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ” 是 “存在 $\lambda \neq 0$, 使得 $|\vec{a} + \lambda\vec{b}| = |\vec{a}| + |\lambda\vec{b}|$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 已知动直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点, 且 $\angle AOB = 120^\circ$. 若 l 与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 25$ 相交所得的弦长为 t , 则 t 的最大值与最小值之差为 ()

- A. $10 - 4\sqrt{6}$ B. 1 C. $4\sqrt{6} - 8$ D. 2

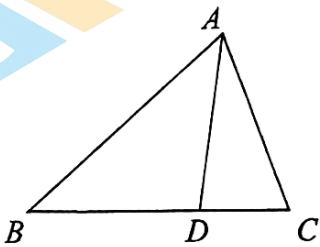
第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 在复平面内, 复数 z 所对应的点为 $(1, 1)$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ _____.

12. 已知双曲线 C 经过点 $(2, 0)$, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$, 则 C 的标准方程为 _____.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上一点, $AD = BD = 4, CD = 2, AC = 3\sqrt{2}$, 则 $\cos \angle ADC =$ _____; $\triangle ABD$ 的面积为 _____.



14. 设函数 $f(x) = \sin \omega x, g(x) = mx^3$.

①若 $\omega = \frac{\pi}{2}, m = 1$, 则不等式 $f(x) > g(x)$ 的解集为 _____;

②若 $\omega = \frac{\pi}{4}$, 且不等式 $f(x) > g(x)$ 的解集中恰有一个正整数, 则 m 的取值范围是 _____.

15. 在数列 $\{x_n\}$ 中, $x_1 = 1, x_2 = 2$. 设向量 $\vec{a}_n = (x_n, x_{n+1})$, 已知 $\vec{a}_n \cdot (\vec{a}_{n+1} - \vec{a}_n) = 0 (n = 1, 2, \dots)$, 给出下列四个结论:

① $x_3 = 3$; ② $\forall n \in \mathbf{N}^*, x_n > 0$; ③ $\forall n \in \mathbf{N}^*, x_{n+2} > x_n$; ④ $\forall n \in \mathbf{N}^*, x_{n+1} \neq x_n$. 其中所有正确结论的序号是 _____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = a \sin x \cos x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

(I) 求 a 的值和 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间.

17. (本小题 14 分)

某大学 A 学院共有学生 1000 人, 其中男生 640 人, 女生 360 人. 该学院体育社团为了解学生参与跑步运动的情况, 按性别分层抽样, 从该学院所有学生中抽取若干人作为样本, 对样本中的每位学生在 5 月份的累

计跑步里程进行统计，得到下表.

跑步里程 s (km)	$0 \leq s < 30$	$30 \leq s < 60$	$60 \leq s < 90$	$s \geq 90$
男生	a	12	10	5
女生	6	6	4	2

(I) 求 a 的值，并估计 A 学院学生 5 月份累计跑步里程 s (km) 在 $[0, 30)$ 中的男生人数;

(II) 从 A 学院样本中 5 月份累计跑步里程不少于 90(km) 的学生中随机抽取 3 人，其中男生人数记为 X ，求 X 的分布列及数学期望;

(III) 该大学 B 学院男生与女生人数之比为 λ ，B 学院体育社团为了解学生参与跑步运动的情况，也按性别进行分层抽样. 已知 A 学院和 B 学院的样本数据整理如下表.

5 月份累计跑步里程平均值 (单位: km)

学院	A	B
男生	50	59
女生	40	45

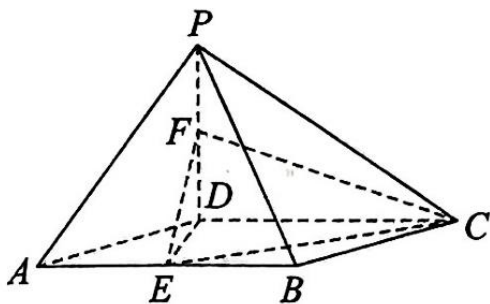
设 A 学院样本中学生 5 月份累计跑步里程平均值为 \bar{x}_A ，B 学院样本中学生 5 月份累计跑步里程平均值为 \bar{x}_B ，是否存在 λ ，使得 $\bar{x}_A \geq \bar{x}_B$? 如果存在，求 λ 的最大值; 如果不存在，说明理由.

18. (本小题 13 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为菱形， E, F 分别为 AB, PD 的中点.

(I) 求证: $EF \parallel$ 平面 PBC ;

(II) 若 $AD = 2\sqrt{3}$ ，二面角 $E-FC-D$ 的大小为 45° ，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知. 求 PD 的长.



条件①: $DE \perp PC$; 条件②: $PB = PC$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

19. (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A ，上、下顶点分别为 B_1, B_2 ，直线 AB_1 的方程为 $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$.

(I) 求椭圆 E 的方程及离心率;

(II) P 是椭圆上一点，且在第一象限内， M 是点 P 关于 x 轴的对称点. 过 P 作垂直于 y 轴的直线交直线 AB_1 于点 Q ，再过 Q 作垂直于 x 轴的直线交直线 PB_2 于点 N . 求 $\angle MNQ$ 的大小.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 求证: $f(x) < x$;

(III) 若函数 $g(x) = f(x) + a(x^2 - x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上无零点, 求 a 的取值范围.

21. (本小题 15 分)

设 λ 为整数. 有穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 其项数为 m ($m \geq 2$). 若 $\{a_n\}$ 满足如下两个性质, 则称 $\{a_n\}$ 为 P_λ 数列:

① $a_m = 1$, 且 $a_i \neq 1$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$);

$$\textcircled{2} a_{n+1} = \begin{cases} |\lambda a_n + 1|, & a_n \text{ 为奇数,} \\ \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots, m-1)$$

(I) 若 $\{a_n\}$ 为 P_1 数列, 且 $a_1 = 5$, 求 m ;

(II) 若 $\{a_n\}$ 为 P_{-1} 数列, 求 a_1 的所有可能值;

(III) 若对任意的 P_1 数列 $\{a_n\}$, 均有 $m \leq 2 \log_2 a_1 + d$, 求 d 的最小值.

高三数学

参考答案

一、选择题

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	A	D	B	D	C	C	C	D

二、填空题

(11) 2

(12) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$

(13) $\frac{1}{8}; 3\sqrt{7}$

(14) $(-\infty, -1) \cup (0, 1); [\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

(15) ②③④

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题13分)

解：(I) 由 $f(\frac{\pi}{4}) = a \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \cos(2 \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})$

$$= a \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

得 $a = 2$.

所以, $f(x) = 2 \sin x \cos x + \cos(2x + \frac{\pi}{6})$

$$= \sin 2x + \cos 2x \cos \frac{\pi}{6} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$$

所以, $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(II) 由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 得 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}$ ($k \in \mathbf{Z}$),

所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}] (k \in \mathbf{Z})$.

当 $k=0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$,

当 $k=1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{7\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}]$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间为 $[0, \frac{\pi}{12}]$, $[\frac{7\pi}{12}, \pi]$.

(17) (本小题 14 分)

解: (I) 由题意知, 男女比例为 $16:9$, 则 $\frac{a+12+10+5}{18} = \frac{16}{9}$, 故 $a=5$.

估计 A 学院学生 5 月跑步里程在 $[0, 30)$ 中的男生人数为 $1000 \times \frac{5}{50} = 100$ 人.

(II) X 的取值范围是 $\{1, 2, 3\}$.

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 C_2^2}{C_7^3} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_7^3} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7},$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3}{C_7^3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}.$$

因此 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{4}{7} + 3 \times \frac{2}{7} = \frac{15}{7}.$$

(III) 存在满足条件的 λ , 且 λ 的最大值为 $\frac{1}{9}$.

设 B 学院女生人数为 x , 则男生人数为 λx , 则 $\bar{x}_B = \frac{59\lambda x + 45x}{\lambda x + x} = \frac{59\lambda + 45}{\lambda + 1}$,

$$\text{而 } \bar{x}_A = \frac{50 \times 640 + 40 \times 360}{1000} = \frac{232}{5}.$$

依题意, $\bar{x}_A \geq \bar{x}_B$, 得 $\frac{232}{5} \geq \frac{59\lambda + 45}{\lambda + 1}$, 解得 $\lambda \leq \frac{1}{9}$, 所以 λ 的最大值为 $\frac{1}{9}$.

(18) (本小题 13 分)

(I) 取 PC 中点 M , 连接 FM, BM .

在 $\triangle PCD$ 中, M, F 分别为 PC, PD 的中点, 所以 $MF \parallel DC$, $MF = \frac{1}{2}DC$.

在菱形 $ABCD$ 中, 因为 $AB \parallel DC$, $BE = \frac{1}{2}DC$,

所以 $BE \parallel MF$, $BE = MF$.

所以四边形 $BEMF$ 为平行四边形, 因此 $EF \parallel BM$.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 PBC , $BM \subset$ 平面 PBC ,

所以 $EF \parallel$ 平面 PBC .

(II) 选择条件①: $DE \perp PC$

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $DE, DC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PD \perp DE$, $PD \perp DC$.

又因为 $DE \perp PC$, $PD \cap PC = P$

所以 $DE \perp$ 平面 PCD , 又 $DC \subset$ 平面 PCD

所以 $DE \perp DC$

所以建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$.

又因为 $AB \parallel DC$, $DE \perp AB$.

又 E 为 AB 中点, 所以 $AD = DB$, 即 $\triangle ADB$ 为正三角形. 因为 $AD = 2\sqrt{3}$, 所以 $DE = 3$.

设 $F(0,0,t)(t > 0)$, $E(3,0,0)$, $C(0,2\sqrt{3},0)$.

$\overrightarrow{EF} = (-3,0,t)$, $\overrightarrow{EC} = (-3,2\sqrt{3},0)$.

平面 FCD 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1,0,0)$.

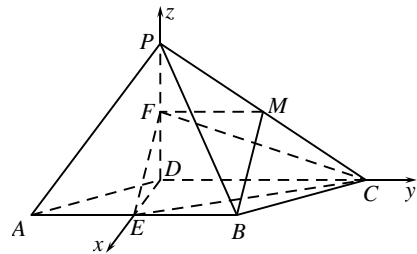
设平面 EFC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EC} = 0. \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} -3x + tz = 0, \\ -3x + 2\sqrt{3}y = 0. \end{cases} \text{ 取 } x = 2t, \text{ 则 } y = \sqrt{3}t, z = 6.$$

所以 $\mathbf{n}_2 = (2t, \sqrt{3}t, 6)$.

由题意, 二面角 $E-FC-D$ 的大小为 45°



$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right| = \left| \frac{2t}{\sqrt{3t^2 + 4t^2 + 36}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

解得 $t = \pm 6$ (舍负)。

因为 F 是 PD 的中点, 所以 PD 的长为 12。

经检验符合题意。

选择条件②:

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $DB, DC, DE \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PD \perp DB$, $PD \perp DC$, $PD \perp DE$ 。

又因为 $PB^2 = PD^2 + BD^2$, $PC^2 = PD^2 + DC^2$,

且 $PB = PC$

所以 $BD = DC$, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = BD = AD$,

即 $\triangle ADB$ 为正三角形。

又因为 E 为 AB 中点, 所以 $DE \perp DC$

建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$ 。

又因为 $AB \parallel DC$, $DE \perp AB$ 。

因为 $\triangle ADB$ 为正三角形. 且 $AD = 2\sqrt{3}$, 所以 $DE = 3$ 。

设 $F(0, 0, t) (t > 0)$, $E(3, 0, 0)$, $C(0, 2\sqrt{3}, 0)$ 。

$$\overrightarrow{EF} = (-3, 0, t), \quad \overrightarrow{EC} = (-3, 2\sqrt{3}, 0).$$

平面 FCD 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0)$ 。

设平面 EFC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$, 则

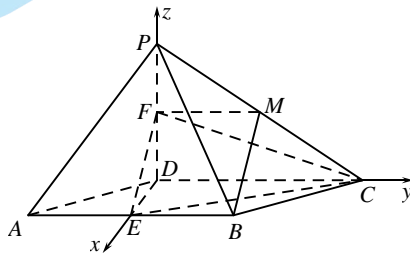
$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EC} = 0. \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} -3x + tz = 0, \\ -3x + 2\sqrt{3}y = 0. \end{cases} \text{ 取 } x = 2t, \text{ 则 } y = \sqrt{3}t, \quad z = 6.$$

所以 $\mathbf{n}_2 = (2t, \sqrt{3}t, 6)$ 。

由题意, 二面角 $E-FC-D$ 的大小为 45°

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right| = \left| \frac{2t}{\sqrt{3t^2 + 4t^2 + 36}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



解得 $t = \pm 6$ (舍负).

因为 F 是 PD 的中点, 所以 PD 的长为 12.

经检验符合题意.

19. (本小题 15 分)

解: (I) 由直线 AB_1 的方程为 $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$, 可得 $A(-\sqrt{3}, 0), B_1(0, 1)$.

所以, $a = \sqrt{3}, b = 1$, 由 $a^2 = b^2 + c^2$ 得, $c = \sqrt{2}$.

椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(II) 依题意, 设 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 > 0, y_0 > 0$), 则 $M(x_0, -y_0)$.

且由 P 是椭圆上一点, 可得 $\frac{x_0^2}{3} + y_0^2 = 1$.

直线 AB_1 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$,

由 $\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 = y_0$ 得, $x = \sqrt{3}(y_0 - 1)$.

所以 $Q(\sqrt{3}(y_0 - 1), y_0)$.

直线 PB_2 的方程为 $y = \frac{y_0 + 1}{x_0}x - 1$, 令 $x = \sqrt{3}(y_0 - 1)$, 得

$$y = \frac{\sqrt{3}(y_0^2 - 1)}{x_0} - 1 = \frac{\sqrt{3}(-\frac{x_0^2}{3})}{x_0} - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x_0 - 1.$$

即 $N(\sqrt{3}(y_0 - 1), -\frac{\sqrt{3}}{3}x_0 - 1)$.

$$\text{所以 } k_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{-y_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_0 + 1}{x_0 - \sqrt{3}(y_0 - 1)} = \frac{\sqrt{3}x_0 - \sqrt{3}y_0 + \sqrt{3}}{3x_0 - \sqrt{3}y_0 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

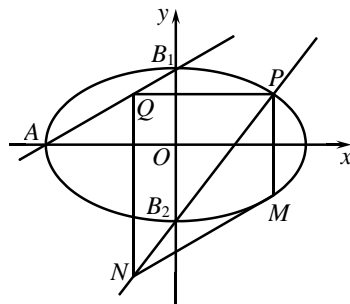
即直线 MN 的倾斜角是 $\frac{\pi}{6}$, 所以 $\angle MNQ = \frac{\pi}{3}$.

(20) (本小题 15 分)

解: (I) 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$.

可得 $f'(1) = 1$.

又可知 $f(1) = 0$,



所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x-y-1=0$.

(II) 因为 $x>0$, 所以 $\sqrt{x}>0$.

由此可知, 要证 $\sqrt{x}\ln x < x$, 只需证 $\ln x < \sqrt{x}$, 即证 $\ln x - \sqrt{x} < 0$.

令 $h(x) = \ln x - \sqrt{x}$,

求导得 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$.

令 $h'(x)=0$, 解得 $x=4$.

可知 $x, h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	\nearrow	极大值	\searrow

所以 $h(x) \leq h(4) = \ln 4 - 2 < 0$.

所以 $\ln x - \sqrt{x} < 0$ 恒成立.

即原不等式成立.

(III) $g(x) = \sqrt{x}\ln x + a(x^2 - x)$,

因为 $x>1$, 所以 $\sqrt{x}\ln x > 0, x^2 - x > 0$.

所以当 $a \geq 0$ 时, $g(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 符合题意.

当 $a < 0$ 时, $g'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} + a(2x-1)$.

令 $t(x) = g'(x)$,

则 $t'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} + 2a = -\frac{\ln x}{4x\sqrt{x}} + 2a < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

所以 $t(x) = g'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

$g'(1) = 1 + a$.

① 当 $g'(1) = 1 + a \leq 0$ 即 $a \leq -1$ 时, $g'(x) < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $g(x) < g(1) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 符合题意.

② 当 $g'(1) = 1 + a > 0$ 即 $-1 < a < 0$ 时,

因为 $x > 1$ 且由 (II) 知 $\ln x < \sqrt{x}$,

$$\text{所以 } g'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} + a(2x-1) < \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + a(2x-1) < \frac{1}{2} + 1 + a(2x-1).$$

$$\text{所以 } g'(1 - \frac{1}{a}) < a - \frac{1}{2} < 0,$$

所以存在 $x_0 \in (1, 1 - \frac{1}{a})$ 使得 $g'(x_0) = 0$,

因此 $x, g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(1, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以 $g(x_0) > g(1) = 0$.

由 (II) 中 $\sqrt{x} \ln x < x$,

$$\text{可得 } g(x) = \sqrt{x} \ln x + a(x^2 - x) < x + a(x^2 - x) = x(ax + 1 - a).$$

$$\text{令 } x = 1 - \frac{1}{a}, \text{ 得 } g(1 - \frac{1}{a}) < 0.$$

所以 $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上存在零点, 不合题意, 舍去.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.

(21) (本小题 15 分)

$$\text{解: (I) 依题意, } a_1 = 5, a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, & a_n \text{ 为奇数,} \\ \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_2 = 6, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 2, a_6 = 1.$$

从而 $m = 6$.

$$\text{(II) 依题意, } a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1, & a_n \text{ 为奇数,} \\ \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \end{cases}, a_1 \neq 1.$$

下面证明对于任意的正整数 $k \neq 1$, 当 $a_1 = k$ 时, 均存在数列 $\{a_n\}$ 为 P_1 数列.

$a_1 = 2$ 时, $a_2 = 1$, $m = 2$ 符合题意.

反证, 假设存在正整数 $k \neq 1$, 当 $a_1 = k$ 时, 不存在数列 $\{a_n\}$ 为 P_{-1} 数列,

设此时 k 的最小值为 M ($M \geq 3$),

即 $a_1 = 2, 3, 4, \dots, M-1$ 时存在 P_{-1} 数列, $a_1 = M$ 时不存在 P_{-1} 数列.

(1) 当 M 为奇数时,

因为存在以 $M-1$ 为首项的 P_{-1} 数列 a_1, a_2, \dots, a_m ,

所以 M, a_1, a_2, \dots, a_m 就是首项为 M 的 P_{-1} 数列, 与假设矛盾.

(2) 当 M 为偶数时,

因为存在以 $\frac{M}{2}$ 为首项的 P_{-1} 数列 a_1, a_2, \dots, a_m ,

所以 M, a_1, a_2, \dots, a_m 就是首项为 M 的 P_{-1} 数列, 与假设矛盾.

综上, a_1 的所有可能取值为全体大于 1 的正整数.

$$(III) \text{ 依题意, } a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, & a_n \text{ 为奇数,} \\ \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数,} \end{cases} \quad a_m = 1, \quad a_{m-1} = 2, \quad a_{m-2} = 4, \quad \dots .$$

(1) 先证明 $d = 2$ 符合题意, 即 $2 \log_2 a_1 + 2 \geq m$.

当 $m = 2$ 时, 显然成立.

当 $m \geq 3$ 时, 对任意 $a_i \geq 3$, $a_{i+2} \in \left\{ \frac{a_i + 1}{2}, \frac{a_i}{2} + 1, \frac{a_i}{4} \right\}$. 故 $a_{i+2} \leq \frac{a_i + 1}{2}$, 即 $a_i - 2 \geq 2(a_{i+2} - 2)$.

(i) 当 $m = 2t + 1$ ($t = 1, 2, \dots$) 时,

有 $a_1 - 2 \geq 2^{t-1}(a_{m-2} - 2) = 2^t$, $a_1 \geq 2^t + 2 = 2^{\frac{m-1}{2}} + 2$.

所以 $2 \log_2 a_1 + 2 > 2 \log_2 (2^{\frac{m-1}{2}}) + 2 = m + 1 > m$.

(ii) 当 $m = 2t + 2$ ($t = 1, 2, \dots$) 时,

有 $a_2 - 2 \geq 2^{t-1}(a_{m-2} - 2) = 2^t$, $a_2 \geq 2^t + 2 = 2^{\frac{m-1}{2}} + 2$, $a_1 \geq a_2 - 1 = 2^{\frac{m-1}{2}} + 1$.

所以 $2 \log_2 a_1 + 2 > 2 \log_2 (2^{\frac{m-1}{2}}) + 2 = m$.

(2) 再证明 $d \geq 2$.

对任意的偶数 $m = 2t (t = 2, 3, \dots)$, 令 $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{m-n-1}{2}} + 1, & n = 1, 3, \dots, m-1, \\ 2^{\frac{m-n}{2}} + 2, & n = 2, 4, \dots, m-2, \\ 1, & n = m. \end{cases}$

(i) 先验证 $\{a_n\}$ 为 P_1 数列:

当 $n = 1, 3, \dots, m-3$ 时, $a_n = 2^{\frac{m-n-1}{2}} + 1$ 为奇数, $a_{n+1} = 2^{\frac{m-(n+1)}{2}} + 2 = a_n + 1$, 符合②.

当 $n = 2, 4, \dots, m-2$ 时, $a_n = 2^{\frac{m-n}{2}} + 2$ 为偶数, $a_{n+1} = 2^{\frac{m-(n+1)-1}{2}} + 1 = \frac{1}{2}a_n$, 符合②.

当 $n = m-1$ 时, $a_{m-1} = 2$, $a_m = 1$, 符合②.

又 $\{a_n\}$ 符合①, 所以 $\{a_n\}$ 为 P_1 数列.

(ii) 下面证明 $d < 2$ 不符合题意.

假设 $d < 2$.

因为 $\forall m = 2t (t = 2, 3, \dots)$, $d \geq m - 2\log_2 a_1 = m - 2\log_2 (2^{\frac{m-1}{2}} + 1) = 2 - 2\log_2 (1 + 2^{\frac{1-m}{2}})$.

即 $\forall m = 2t (t = 2, 3, \dots)$, $m \leq 2 - 2\log_2 (2^{1-\frac{d}{2}} - 1)$, 矛盾.

综上, d 的最小值为 2.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯