汕头市 2023~2024 学年度普通高中毕业班期末调研测试

数学

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡指定位置.

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3.非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.

4.考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交.

第Ⅰ卷　选择题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知 $2\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $2x^2+q=0$ 的一个根，则实数 q 的值为（　　）

A.8　　B.-8　　C.4　　D.-4

2.设 $\vec{a}$ 表示“向东走 10km”，$\vec{b}$ 表示“向南走 5km”，则 $\vec{b}+\vec{a}+\vec{b}$ 所表示的意义为（　　）

A.向东南走 $10\sqrt{2}\mathrm{km}$　　B.向西南走 $10\sqrt{2}\mathrm{km}$

C.向东南走 $5\sqrt{6}\mathrm{km}$　　D.向西南走 $5\sqrt{6}\mathrm{km}$

3.已知全集 $U=A\cup B=\{x\in\mathbf{N}|0\leqslant x\leqslant 8\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{1,3,5\}$，则集合 B 为（　　）

A.$\{2,4,6,7\}$　　B.$\{0,2,4,6,8\}$　　C.$\{0,2,4,6,7,8\}$　　D.$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

4.已知直线 $l_1:2x-ay+1=0$ 和 $l_2:(a-1)x-y+a=0$ 平行，则实数 $a=$（　　）

A.2 或 -1　　B.1　　C.-1　　D.2

5.已知 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{6}$，则 $\tan\theta=$（　　）

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C.$\sqrt{2}$　　D.$\sqrt{3}$

6.关于椭圆 $\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$ 与双曲线 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$ 的关系，下列结论正确的是（　　）

A.焦点相同　　B.顶点相同　　C.焦距相等　　D.离心率相等

7.已知函数 $f(x)=\ln\frac{e(x-2)}{x}$（e 为自然对数底），则下列函数是奇函数的是（　　）

A. $f\left(x+1\right)+1$　　B. $f\left(x+1\right)-1$　　C. $f\left(x-1\right)+1$　　D. $f\left(x-1\right)-1$

8.已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和、前$2n$项和、前$3n$项和分别为P、Q、R，则“$\left\{a_n\right\}$为等比数列”的一个必要条件为（　　）

A.$\left(P+Q\right)-R=Q^2$　　B.$P^2+Q^2=P\left(Q+R\right)$　　C.$P+Q=R$　　D.$Q^2=PR$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.某科技攻关团队共有 10 人，其年龄（单位：岁）分布如下表所示：

年龄	45	40	36	32	29	28
人数	1	2	1	3	2	1

则关于这 10 人年龄的说法中，正确的是（　　）

A.中位数是 34　　B.众数是 32

C.第 25 百分位数是 29　　D.平均数是 34.3

10.已知定义在$\left(0,+\infty\right)$上的函数$f\left(x\right)$满足：$\forall x$、$y\in\left(0,+\infty\right)$，$f\left(x\right)+f\left(y\right)=f\left(xy\right)$，且当$0<x<1$时，$f\left(x\right)<0$，若$f\left(2\right)=1$，则（　　）

A. $f\left(1\right)=0$　　B. $f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减

C.$\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\left(\frac{1}{x}\right)\right|$　　D. $f\left(2\right)+f\left(2^2\right)+\cdots+f\left(2^{20}\right)=55$

11.某食品的保鲜时间y（单位：小时）与储存温度x（单位：℃）之间满足函数关系$y=e^{kx+b}$（$e=2.71828\cdots$，k、b为常数）.若该食品在 0℃的保鲜时间是 120 小时，在 20℃的保鲜时间是 30 小时，则（　　）

A.$k<0$且$b>0$

B.在 10℃的保鲜时间是 60 小时

C.要使得保鲜时间不少于 15 小时，则储存温度不低于 30℃

D.在零下 2℃的保鲜时间将超过 150 小时

12.在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，$PA=AB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=2$，$E$是底面$ABC$上（含边界）的一个动点，$F$是三棱锥$P-ABC$的外接球$O$表面上的一个动点，则（　　）

A.当E在线段AB上时，$PE\perp BC$

B.EF的最大值为 4

C.当FA // 平面PBC时，点F的轨迹长度为2π

D.存在点F，使得平面PAC与平面PFB夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$

第II卷　非选择题

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.$(1+x)^n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$的展开式中$x^2$项的系数为 15，则$n=$_________.

14.若正四棱台的上、下底边长分别为 2、4，侧面积为$12\sqrt{3}$，则该棱台体积为_________.

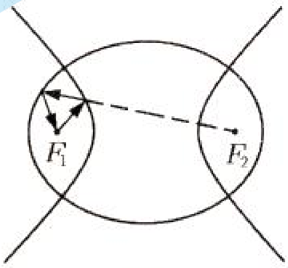
15.已知函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$在区间$[0,\pi]$上恰有三个零点，则$\omega$的取值范围是_________.

16.椭圆与双曲线具有如下光学性质：

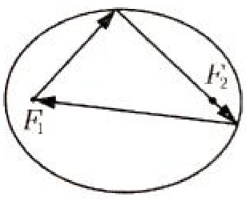
（1）由椭圆的一焦点射出的光线经椭圆反射后过椭圆的另一个焦点；

（2）由双曲线的一焦点射出的光线经双曲线反射后，反射光线的反向延长线过双曲线的另一个焦点.

如图①，一个光学装置由有公共焦点F_1、F_2的椭圆C与双曲线S构成，现一光线从左焦点F_1射出，依次经S与C反射，又回到了点F_1，历时t_1秒；若将装置中的S去掉，如图②，此光线从点F_1射出，经C两次反射后又回到了点F_1，历时t_2秒.若C与S的离心率之比为$2:3$，则$t_2:t_1=$_________.



图①



图②

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）$\triangle ABC$中，内角A、B、C的对边分别为a、b、c，$a=6$，$b\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin B$

（1）求角A的大小；

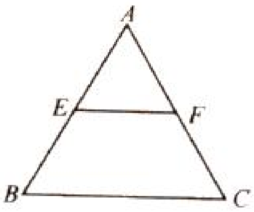
（2）点M为$\triangle ABC$的重心，AM的延长线交BC于点D，且$AM=2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积S.

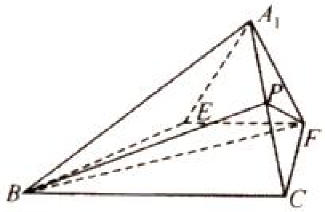
18.（本小题满分 12 分）记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，首项为a_1，已知$S_4=4S_2$，且$a_{2n}=2a_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{(-1)^n\cdot a_n\right\}$的前$n$项和.

19.（本小题满分 12 分）如图，在边长为 4 的正三角形ABC中，E、F分别为边AB、AC的中点将$\triangle AEF$沿EF翻折至$\triangle A_1EF$，得四棱锥A_1-EFCB，设P为A_1C的中点.





（1）证明：FP // 平面 A_1BE；

（2）若平面 $A_1EF \perp$ 平面 $EFCB$，求平面 BPF 与平面 BCF 夹角的余弦值.

20.（本小题满分 12 分）《国家学生体质健康标准》是我国对学生体质健康方面的基本要求，是综合评价学生综合素质的重要依据.为促进学生积极参加体育锻炼，养成良好的锻炼习惯，提高体质健康水平，某学校从全校学生中随机抽取 200 名学生进行“是否喜欢体育锻炼”的问卷调查.获得如下信息：

①男生所占比例为 60%;

②不喜欢体育锻炼的学生所占比例为 45%;

③喜欢体育锻炼的男生比喜欢体育锻炼的女生多 50 人.

（1）完成 2×2 列联表，依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，分析喜欢体育锻炼与性别是否有关联？

性别	体育锻炼		合计
	喜欢	不喜欢	
男			
女			
合计			

（2）（i）从这 200 名学生中采用按比例分配的分层随机抽样方法抽取 20 人，再从这 20 人中随机抽取 3 人.记事件 $A=$“至少有 2 名男生”、$B=$“至少有 2 名喜欢体育锻炼的男生”、$C=$“至多有 1 名喜欢体育锻炼的女生”.请计算 $P(B|A)$ 和 $P(ABC)$ 的值.

（ii）对于随机事件 A、B、C，$P(A)>0$，$P(AB)>0$，试分析 $P(ABC)$ 与 $P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)$ 的大小关系，并给予证明

参考公式及数据：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

α	0.10	0.05	0.010	0.001
χ_α	2.706	3.841	6.635	10.828

21.（本小题满分 12 分）已知圆心在 y 轴上移动的圆经过点 $A(0,-4)$，且与 x 轴、y 轴分别交于 $B(x,0)$、$C(0,y)$ 两个动点，过点 B 垂直于 x 轴的直线与过点 C 垂直于 y 轴的直线交于点 M.

（1）求点 M 的轨迹 T 的方程；

（2）点 P、Q 在曲线 T 上，以 PQ 为直径的圆经过原点 O，作 $OH\perp PQ$，垂足为 H.试探究是否存在定点 R，

使得$|RH|$为定值，若存在，求出该定点R的坐标；若不存在，说明理由.

22.（本小题满分 12 分）已知函数$f(x)=x\ln x-a(x-1)$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）若$f(x)\geqslant 0$，求实数a的值；

（2）当$n\in\mathbf{N}^*$时，证明：$\sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\sin\dfrac{1}{n+3}+\cdots\sin\dfrac{1}{2n}<\ln 2$.