2021 北京西城高一（下）期末

数　　学

2021.7

本试卷共 5 页，共 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效.

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

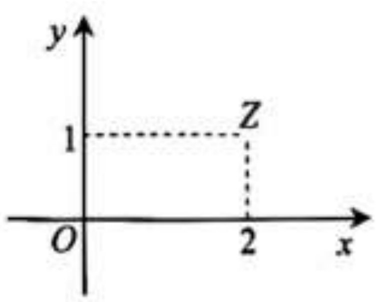
1.设向量 $\vec{a}=(3,2)$，$\vec{b}=(-1,4)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（ ）

A．11　　B．9　　C．7　　D．5

2.$\sin 330^\circ=$（ ）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.在复平面内，复数 z 对应的点 Z 如图所示，则复数 $\overline{z}=$（ ）



A．$2+i$　　B．$2-i$　　C．$1+2i$　　D．$1-2i$

4.某圆锥的母线长为 $5cm$，底面半径长为 $3cm$，则该圆锥的体积为（ ）

A．$12\pi cm^3$　　B．$15\pi cm^3$　　C．$36\pi cm^3$　　D．$45\pi cm^3$

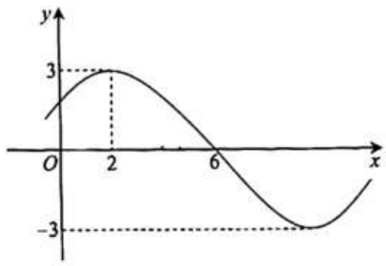
5.函数 $f(x)=\cos^2 2x-\sin^2 2x$ 的最小正周期是（ ）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．π　　C．2π　　D．4π

6.若 $\sin\alpha=0.4$，$\alpha\in\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，则符合条件的角 α 有（ ）

A．1个　　B．2 个　　C．3个　　D．4 个

7.函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的图像的一部分如图所示，则此函数的解析式是（ ）



A. $f(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $f(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{3\pi}{4}\right)$

C. $f(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $f(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)$

8.向量$\vec{a}=(\cos50°,\sin50°)$与$\vec{b}=(\cos10°,\sin10°)$的夹角为（ ）

A. $30°$　　B. $40°$　　C. $60°$　　D. $90°$

9.在ΔABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c.则“$a>b$”是“$\sin A>\sin B$”的（ ）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10.已知单位向量$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$满足$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=-\frac{1}{2}$，若非零向量$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$，其中$x$，$y\in\mathbf{R}$，则$\frac{|x|}{|\vec{a}|}$的最大值为（ ）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

第二部分 （非选择题共 110 分）

二、填空题（每题 3 分，满分 18 分，将答案填在答题纸上）

11.设复数$z=\frac{1+2i}{3-i}$，则$|z|=$___________.

12.已知半径为r的球的表面积为$36\pi cm^2$，那么半径为$2r$的球的表面积为__________ cm.

13.在锐角ΔABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c.若$a\sin B=\frac{1}{2}b$，则$A=$___________.

14.已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=4$，$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，那么$|\vec{a}-\vec{b}|=$___________.

15.设函数$f(x)=\sin\pi x$，$g(x)=x^2-x+1$，有以下四个结论.

①函数$y=f(x)+g(x)$是周期函数；

②函数$y=f(x)-g(x)$的图像是轴对称图形；

③函数 $y=f(x)\cdot g(x)$ 的图像关于坐标原点对称；

④函数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在最大值

其中，所有正确结论的序号是____________.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.已知 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-3$.

（I）求 $\tan\theta$ 的值；

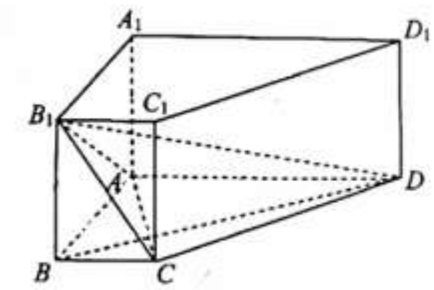
（II）求 $\sin 2\theta$ 的值.

17.如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AD//BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AC\perp BD$，且 $AB=AD=2$，$AA_1=1$.

（I）求三棱锥 B_1-ABD 的体积；

（II）求证：$BC//$ 平面 ADD_1A_1；

（III）求证：$AC\perp B_1D$.



18.在 ΔABC 中，$AB=4$，$AC=3$，$\cos C=-\dfrac{1}{4}$.

（I）求 ΔABC 的面积；

（II）求 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值.

19.已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x+m\left(\omega>0\right)$ 同时满足下列三个条件中的二个：

①$f\left(0\right)=2$； ②最大值为2； ③最小正周期为π.

（I）求出所有可能的函数 $f\left(x\right)$，并说明理由；

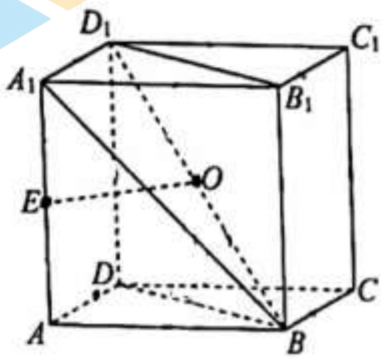
（II）从符合题意的函数中选择一个，求其单调增区间.

20.如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1=2$， E 为 AA_1 的中点， O 为 BD_1 的中点.

（I）求证：平面 $A_1BD_1\perp$ 平面 ABB_1A_1；

（II）求证： $EO\perp$ 平面 BDD_1B_1；

（III）设 P 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱上一点，给出满足条件 $OP=\sqrt{2}$ 的点 P 的个数.（结论不要求证明）



21.设函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.若存在常数 T， $A\left(T>0,A>0\right)$，使得对于任意 $x\in\mathbf{R}$， $f\left(x+T\right)=Af\left(x\right)$ 成立，则称函数 $f\left(x\right)$ 具有性质 P.

（I）判断函数 $y=x$ 和 $y=\cos x$ 具有性质 P？（结论不要求证明）

（II）若函数 $f\left(x\right)$ 具有性质 P，且其对应的 $T=\pi$， $A=2$.已知当 $x\in\left(0,\pi\right]$ 时， $f\left(x\right)=\sin x$，求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\pi,0\right]$ 上的最大值；

（III）若函数 $g\left(x\right)$ 具有性质 P，且直线 $x=m$ 为其图像的一条对称轴，证明： $g\left(x\right)$ 为周期函数.

2021 北京西城高一（下）期末数学

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. D	2. B	3. B	4. A	5. A
6. C	7. C	8. B	9. C	10. D

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　12. 144π　　13. $\dfrac{\pi}{6}$

14. $\sqrt{73}$　　15. ②④

注：第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

16. （本小题 13 分）

解：（I）由 $\tan(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\theta+\tan\dfrac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\dfrac{\pi}{4}}=-3$，………………3 分

解得 $\tan\theta=2$………………5 分

（II）由（I），得 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$，①………………6 分

又因为 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，②………………8 分

联立①②，解得 $\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\\ \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\\ \cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}.\end{cases}$………………11 分

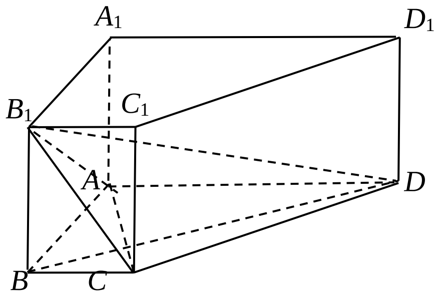
所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{5}$………………13 分

17. （本小题 14 分）

（I）解：因为在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle BAD=90^\circ$，

所以三棱锥 B_1-ABD 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times S_{\Delta ABD}\times AA_1=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times2\times2)\times1=\dfrac{2}{3}$…………3 分

（II）证明：因为 $AD//BC$，$BC\not\subset$ 平面 ADD_1A_1，$AD\subset$ 平面 ADD_1A_1，



所以 $BC//$ 平面 ADD_1A_1 ....6 分

（II）证明：因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$， $AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BB_1\perp AC$ ....8 分

又因为 $AC\perp BD$，$BB_1\cap BD=B$，

所以 $AC\perp$ 平面 BB_1D ....11 分

又因为 $B_1D\subset$ 平面 BB_1D，

所以 $AC\perp B_1D$ ....14 分

18. （本小题 13 分）

解：（I）由余弦定理 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C$， ....3 分

得 $4^2=3^2+BC^2-2\times3\times BC\times(-\dfrac{1}{4})$，

解 $BC=-\dfrac{7}{2}$ （舍）或 $BC=2$ ....5 分

由 $\cos C=-\dfrac{1}{4}$， $C\in(0,\pi)$，得 $\sin C=\sqrt{1-(-\dfrac{1}{4})^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ....7 分

所以△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\times BC\times\sin C=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ ....9 分

（II）由余弦定理，得 $\cos B=\dfrac{BC^2+AB^2-AC^2}{2BC\times AB}=\dfrac{11}{16}$ ....11 分

所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos B=\dfrac{11}{2}$ ....13 分

19. （本小题 15 分）

解：（I） $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x+m=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})+m$ ....3 分

若函数 $f(x)$ 满足条件①②：

由条件①：$f(0)=1+m=2$，得 $m=1$.即 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})+1$.

所以当 $\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})=1$ 时，$f(x)$ 有最大值 3.

这与②矛盾.即函数 $f(x)$ 不能同时满足条件①②..................5 分

若函数 $f(x)$ 满足条件①③：

由条件①，得 $m=1$.

由条件③，得 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$.

所以此时 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$..................7 分

若函数 $f(x)$ 满足条件②③：

又因为 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})+m$，

所以当 $\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})=1$ 时，$f(x)$ 的最大值 $m+2=2$.

解得 $m=0$.

由条件③，得 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$.

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$..................9 分

综上，$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$ 或 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

（II）不妨选择函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$，

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，..................11 分

得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$，..................13 分

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}]$，$k\in\mathbf{Z}$..................15 分

（注：单调区间写成开区间亦可.）

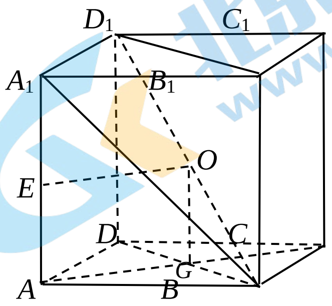
20. （本小题 15 分）

（I）证明：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $A_1D_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1， $A_1D_1 \subset$ 平面 A_1BD_1，

所以平面 $A_1BD_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 ....4 分

（II）证明：连接 AC，设 $BD \cap AC = G$，连接 OG .



因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

所以 $AE // DD_1$，且 $AE = \frac{1}{2}DD_1$，且 G 是 BD 的中点，

又因为 O 是 BD_1 的中点，

所以 $OG // DD_1$，且 $OG = \frac{1}{2}DD_1$，

所以 $OG // AE$，且 $OG = AE$，

即四边形 $AGOE$ 是平行四边形，

所以 $EO//AG$ ....6 分

由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，得 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$， $AG \perp BD$.

所以 $DD_1 \perp AG$.

又因为 $DD_1 \cap BD = D$，

所以 $AG \perp$ 平面 BDD_1B_1， ....9 分

所以 $EO \perp$ 平面 BDD_1B_1 ....11 分

（III）解：满足条件 $OP = \sqrt{2}$ 的点 P 有 12 个..................15 分

21.（本小题 15 分）

解：（I）函数 $y = x$ 不具有性质 P；函数 $y = \cos x$ 具有性质 P ....3 分

（II）设 $x \in (-\pi, 0]$，则 $x + \pi \in (0, \pi]$..................4 分

由题意，得 $f(x+\pi) = 2f(x) = \sin(x+\pi)$，

所以 $f(x) = -\frac{1}{2}\sin x$， $x \in (-\pi, 0]$..................6 分

由 $f(-\pi+\pi) = 2f(-\pi)$， $f(0+\pi) = 2f(0)$，得 $f(-\pi)=\frac{1}{4}f(\pi) = 0$.

所以当 $x \in [-\pi, 0]$ 时， $f(x) = -\frac{1}{2}\sin x$..................7 分

故当 $x = -\frac{\pi}{2}$， $f(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上有最大值 $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$..................9 分

（III）当 $g(x)=0$， $x\in\mathbf{R}$ 时，结论显然成立；………………10 分

以下考虑 $g(x)$ 不恒等于 0 的情况，即 $\exists a$，使得 $g(a)\neq 0$.

由直线 $x=m$ 为函数 $g(x)$ 图像的一条对称轴，得 $g(2m-a)=g(a)\neq 0$…….12 分

由题意， $\exists T_0, A_0\ (T_0>0, A_0>0)$，使得 $g(x+T_0)=A_0 g(x)$ 成立，

所以 $g(2m-a)=A_0 g(2m-a-T_0)$，即 $g(2m-a-T_0)=\dfrac{1}{A_0}g(a)$.

由直线 $x=m$ 为函数 $g(x)$ 图像的一条对称轴，得 $g(2m-a-T_0)=g(a+T_0)$.

又因为 $g(a+T_0)=A_0 g(a)$， $g(a)\neq 0$，

所以 $\dfrac{1}{A_0}g(a)=A_0 g(a)$，即 $A_0=1$.

故对于任意 $x\in\mathbf{R}$， $g(x+T_0)=g(x)$ 成立，其中 $T_0>0$.

综上， $g(x)$ 为周期函数………………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。