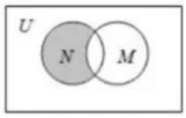
试卷编号：3552

北京一零一中 2019-2020 学年度第二学期高三数学统练二

班级：__________ 学号：__________ 姓名：__________ 成绩：__________

一、选择题共 10 小题。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $M=\{x\mid x<-1\}$, $N=\{x\mid x(x+2)<0\}$, 则图中阴影部分表示的集合是 (　　)



(A) $\{x\mid -1\leqslant x<0\}$　(B) $\{x\mid -1<x<0\}$　(C) $\{x\mid -2<x<-1\}$　(D) $\{x\mid x<-1\}$

2. 若 $a<0<b$, 则下列不等式恒成立的是 (　　)

(A) $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　(B) $-a>b$　(C) $a^2>b^2$　(D) $a^3<b^3$

3. 设 l 为直线, α,β 是两个不同的平面, 下列命题中正确的是 (　　)

(A) 若 $l\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$　(B) 若 $l\perp\alpha$, $l\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(C) 若 $l\perp\alpha$, $l\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$　(D) 若 $\alpha\perp\beta$, $l\parallel\alpha$, 则 $l\perp\beta$

4. 对某商店一个月内每天的顾客人数进行了统计, 得到样本的茎叶图 (如图所示), 则该样本的中位数、众数、极差分别是 (　　)

1	25
2	0233
3	124489
4	55577889
5	0011479
6	178

(A) 46, 45, 56　(B) 46, 45, 53　(C) 47, 45, 56　(D) 45, 47, 53

5. “$p<2$” 是 “关于 x 的实系数方程 $x^2+px+1=0$ 有虚数根” 的 (　　)

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 若 $A=3B$, 则 $\dfrac{a}{b}$ 的取值范围是 (　　)

(A) $(0,3)$　(B) $(1,3)$　(C) $(0,1]$　(D) $(1,2]$

7. 已知函数 $f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$, 若方程 $f(x)=\dfrac{3}{5}$ 的解为 x_1, x_2 $(0<x_1<x_2<\pi)$, 则 $\sin(x_1-x_2)=$ (　　)

(A) $-\dfrac{3}{5}$　(B) $-\dfrac{4}{5}$　(C) $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 且 $a^2<b^2<c^2$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 中最小的值是 (　　)

(A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　(B) $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$　　(C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$　　(D) 不能确定

9. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2, 离心率为 e, 过点 F_1 的直线 l 与双曲线 C 的左、右两支分别交于 A,B 两点, 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$, 且 $\angle F_1AF_2=150^\circ$, 则 $e^2=$ (　　)

(A) $7-2\sqrt{3}$　　(B) $7-\sqrt{3}$　　(C) $7+\sqrt{3}$　　(D) $7+2\sqrt{3}$

10. 对于平面上点 P 和曲线 C, 任取 C 上一点 Q, 若线段 PQ 的长度存在最小值, 则称该值为点 P 到曲线 C 的距离, 记作 $d(P,C)$. 若曲线 C 是边长 6 的等边三角形, 则点集 $D=\{P\mid d(P,C)\leqslant 1\}$ 所表示的图形的面积为 (　　)

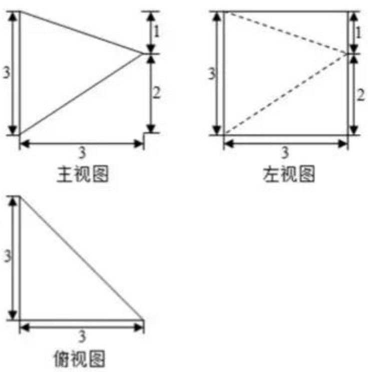
(A) 36　　(B) $36-3\sqrt{3}$　　(C) $36+\pi$　　(D) $36-3\sqrt{3}+\pi$

二、填空题共 6 小题。

11. $(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^6$ 展开式的常数项为 ________ . (用数字作答)

12. 过点 $(-4,0)$ 作直线 l 与圆 $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ 交于 A,B 两点, 若 $AB=8$, 则直线 l 的方程为 ________ .

13. 已知某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的最长棱的长度为 ________ .



14. 把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题:

若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于 ________ 对称,

则函数 $g(x)=$ ________ .

(注: 填上你认为可以成为真命题的一种情形即可, 不必考虑所有可能的情形)

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax, & x<1,\\ \dfrac{a\ln x}{x}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(1) 当 $x<1$ 时, 若函数 $f(x)$ 有且只有一个极值点, 则实数 a 的取值范围是 ________ ;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最大值为 1, 则 $a=$ ________ .

16. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若数列 $\{a_n\}$ 的各项按如下规律排列:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$, 有如下运算和结论:

① $a_{24} = \frac{3}{8}$;

②数列 $a_1, a_2+a_3, a_4+a_5+a_6, a_7+a_8+a_9+a_{10}, \cdots$, 是等比数列;

③数列 $a_1, a_2+a_3, a_4+a_5+a_6, a_7+a_8+a_9+a_{10}, \cdots$, 的前 n 项和为 $T_n = \frac{n^2+n}{4}$;

④若存在正整数 k, 使 $S_k < 10, S_{k+1} \geqslant 10$, 则 $a_k = \frac{5}{7}$.

其中正确的结论有 __________ . (将你认为正确的结论序号都填上)

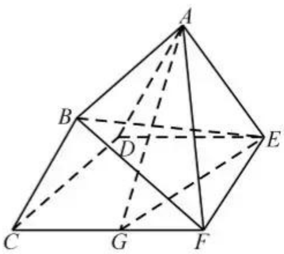
三、解答题共 6 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c, 且 $\cos 2A + \sin(\frac{3\pi}{2} - A) + 1 = 0$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 3\sqrt{3}, b = 3$, 求 $\sin C$ 的值.

18. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 平面 $ADE \perp$ 平面 $CDEF$, $\angle ADE = 60°$, $DE \parallel CF$, $CD \perp DE$, $AD = 2$, $DE = DC = 3$, $CF = 4$, 点 G 是棱 CF 上的动点.



(1) 当 $CG = 3$ 时, 求证 $EG \parallel$ 平面 ABF;

(2) 求直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值;

(3) 若二面角 $G - AE - D$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{22}}{11}$, 求线段 CG 的长.

19. 某产品按行业生产标准分成 8 个等级, 等级系数 X 依次为 $1, 2, \cdots, 8$, 其中 $X \geqslant 5$ 为标准 A, $X \geqslant 3$ 为标准 B, 已知甲厂执行标准 A 生产该产品, 产品的零售价为 6 元/件; 乙厂执行标准 B 生产该产品, 产品的零售价为 4 元/件, 假定甲、乙两厂的产品都符合相应的执行标准.

注: ①产品的"性价比"$= \frac{\text{产品的等级系数的数学期望}}{\text{产品的零售价}}$;

②"性价比"大的产品更具可购买性.

(1) 已知甲厂产品的等级系数 X_1 的概率分布列如下表所示:

X_1	5	6	7	8
P	0.4	a	b	0.1

且 X_1 的数学期望 $EX_1 = 6$, 求 a, b 的值;

(2) 为分析乙厂产品的等级系数 X_2, 从该厂生产的产品中随机抽取 30 件, 相应的等级系数组成一个样本, 数据如下:

3	5	3	3	8	5	5	6	3	4
6	3	4	7	5	3	4	8	5	3
8	3	4	3	4	4	7	5	6	7

用这个样本的频率分布估计总体分布, 将频率视为概率, 求等级系数 X_2 的数学期望;

(3) 在 (1)(2) 的条件下, 若以"性价比"为判断标准, 则哪个工厂的产品更具可购买性? 说明理由.

20. 已知函数 $f(x)=e^x(x-\frac{a}{x}-2)$, 其定义域为 $(0,+\infty)$, 其中常数 $e=2.71828\cdots$, 是自然对数的底数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的递增区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 为定义域上的增函数, 且 $f(x_1)+f(x_2)=-4e$, 证明: $x_1+x_2\geqslant 2$.

21. 已知点 $F(1,0)$, 点 A 是直线 $l_1: x=-1$ 上的动点, 过 A 作直线 l_2, $l_1\perp l_2$, 线段 AF 的垂直平分线与 l_2 交于点 P.

(1) 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 若点 M,N 是直线 l_1 上两个不同的点, 且 $\triangle PMN$ 的内切圆方程为 $x^2+y^2=1$, 直线 PF 的斜率为 k, 求 $\frac{|k|}{|MN|}$ 的取值范围.

2020年3月北京101中学高三第二学期数学试卷（统练二）

答案

一、选择题（共10小题；每小题4分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	B	A	B	B	B	B	A	D

二、填空题（共6小题；每小题5分，共30分,）

11. -160

12. $5x+12y+20=0$ 或 $x=-4$

13. $\sqrt{22}$

14. x轴，$-3-\log_2 x$

15. $a<1$，-1

16. ①③④

三、解答题（共6小题；共80分）

17.（本小题13分）

解：（1）因为 $\cos 2A+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-A\right)+1=0$，所以 $\cos 2A-\cos A+1=0$，

可得：$2\cos^2 A-\cos A=0$，解得：$\cos A=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos A=0$，　……4分

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，所以可得：$A=\dfrac{\pi}{3}$．　………………6分

（2）因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，可得：$bc=12$，　……7分

又 $b=3$，可得：$c=4$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可知，

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= 16+9-2\times3\times4\times\frac{1}{2} \\ &= 25-12 \\ &= 13. \end{aligned}$$

………………10分

所以 $a=\sqrt{13}$，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可知：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，

可得：$\sin C=\dfrac{c\cdot\sin A}{a}=\dfrac{4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$． ………………13 分

18.（本小题 14 分）

解：（1）由已知得 $CG\parallel DE$ 且 $CG=DE$，则四边形 $CDEG$ 为平行四边形，

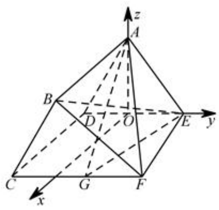
所以 $CD\parallel EG$， ………………2 分

因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $CD\parallel AB$，所以 $AB\parallel EG$，

又 $EG\not\subset$ 平面ABF， $AB\subset$ 平面ABF，所以 $EG\parallel$平面ABF． …………4 分

（2）过点 A 作 $AO\perp DE$ 交 DE 于点 O，

过点 O 作 $OK\parallel CD$ 交 CF 于点 K，



由（1）知 平面$ADE\perp$平面$CDEF$，

平面$ADE\cap$平面$CDEF=DE$，

$AO\subset$ 平面ADE， $AO\perp$ 平面$CDEF$，

因为 $CD\perp DE$，所以 $OK\perp DE$，

以 O 为原点建立如图的空间直角坐标系 $D(0,-1,0)$， ………………6 分

$E(0,2,0)$， $C(3,-1,0)$， $F(3,3,0)$， $A(0,0,\sqrt{3})$， $B(3,0,\sqrt{3})$，

设平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$， $\overrightarrow{DC}=(3,0,0)$， $\overrightarrow{DA}=(0,1,\sqrt{3})$，

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $z=-1$，所以 $y=\sqrt{3}$， $\vec{m}=(0,\sqrt{3},-1)$， ………8 分

$\overrightarrow{BE}=(-3,2,-\sqrt{3})$， $\cos\vec{m},\overrightarrow{BE}=\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}}{\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$，

所以直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$． …………………10 分

（3） $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CF}=\lambda(0,4,0)(0\le\lambda\le1)$，所以 $G(3,4\lambda-1,0)$，

设平面 AEG 的法向量为 $\vec{p}=(x,y,z)$， $\overrightarrow{AE}=(0,2,-\sqrt{3})$， $\overrightarrow{EG}=(3,4\lambda-3,0)$，

$\begin{cases}\vec{p}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{p}\cdot\overrightarrow{EG}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y-\sqrt{3}z=0,\\ 3x+(4\lambda-3)y=0,\end{cases}$ 令 $y=3$，所以 $z=2\sqrt{3}$， $x=3-4\lambda$，

所以 $\vec{p}=(3-4\lambda,3,2\sqrt{3})$， ………………12 分

平面 AED 的法向量为 $\vec{q}=(1,0,0)$， $\cos\vec{p},\vec{q}=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\vec{p}\cdot\vec{q}}=\dfrac{4\lambda-3}{\sqrt{(4\lambda-3)^2+21}}=\dfrac{\sqrt{22}}{11}$，

解得 $(4\lambda-3)^2=\dfrac{14}{3}$，所以 $4\lambda=3\pm\dfrac{\sqrt{42}}{3}$，

所以 $CG=\lambda CF=4\lambda=3\pm\dfrac{\sqrt{42}}{3}$， ………………13 分

因为 $CG\le 4$，所以 $CG=3-\dfrac{\sqrt{42}}{3}$. ………………14 分

19.（本小题 13 分）

解：（1）因为 $EX_1=6$，所以 $5\times0.4+6a+7b+8\times0.1=6$, ………………1 分

即 $6a+7b=3.2$．又由 X_1 的概率分布列得 $0.4+a+b+0.1=1$,

即 $a+b=0.5$．由 $\begin{cases}6a+7b=3.2,\\ a+b=0.5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0.3,\\ b=0.2.\end{cases}$ ………………5 分

（2）由已知得，样本的频率分布表如下：

X_2	3	4	5	6	7	8
f	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

用这个样本的频率分布估计总体分布，将频率视为概率，可得等级系数 X_2 的概率分布列如下：

X_2	3	4	5	6	7	8
P	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

………………8 分

所以

$$EX_2=3\times0.3+4\times0.2+5\times0.2+6\times0.1+7\times0.1+8\times0.1=4.8,$$

即乙厂产品的等级系数的数学期望等于 4.8． ………………10 分

（3）乙厂的产品更具可购买性，理由如下：

因为甲厂产品的等级系数的数学期望等于 6，价格为 6 元/件，所以其性价比为 $\dfrac{6}{6}=1$;

因为乙厂产品的等级系数的数学期望等于 4.8，价格为 4 元/件，所以其性价比为 $\dfrac{4.8}{4}=1.2$,

据此，乙厂的产品更具可购买性. ………………13 分

20.（本小题 13 分）

解：（1）易知 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)(x^2-a)}{x^2}$． ………………1 分

①若 $a\le0$，由 $f'(x)>0$，解得：$x>1$，故函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增； ……2 分

②若 $0<a<1$，令 $f'(x)>0$，解得：$0<x<\sqrt{a}$ 或 $x>1$，

令 $f'(x)<0$，解得：$\sqrt{a}<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 递增，在 $(\sqrt{a},1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增； ………………4 分

③若 $a=1$，则 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)^2(x+1)}{x^2}\geq 0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增；　………5 分

④若 $a>1$，令 $f'(x)>0$，解得：$0<x<1$ 或 $x>\sqrt{a}$，

令 $f'(x)<0$，解得：$1<x<\sqrt{a}$，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,\sqrt{a})$ 递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 递增.　………………7 分

综上，若 $a\leq 0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增；

若 $0<a<1$，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a}),(1,+\infty)$ 递增；

若 $a=1$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增；

若 $a>1$，$f(x)$ 在 $(0,1)$，$(\sqrt{a},+\infty)$ 递增.　（………………7 分）

（2）因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，所以 $a=1$，即 $f(x)=e^x\left(x-\dfrac{1}{x}-2\right)$，

注意到 $f(1)=-2e$，故 $f(x_1)+f(x_2)=-4e=2f(1)$，

即证 $-4e-f(x_1)\geq f(2-x_1)$，即证 $f(x_1)+f(2-x_1)\leq -4e$，　………………9 分

令 $h(x)=f(x)+f(2-x)$，$0<x\leq 1$，只需证明 $h(x)\leq h(1)$，

故 $h'(x)=f'(x)-f'(2-x)=e^{2-x}(x-1)^2\left[\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{(3-x)}{(2-x)^2}\right]$，　………………10 分

下面证明 $h'(x)\geq 0$，即证 $\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{3-x}{(2-x)^2}\geq 0$，

由熟知的不等式 $e^x\geq 1+x$ 可知 $e^{2x-2}=\left(e^{x-1}\right)^2\geq(1+x-1)^2=x^2$，

当 $0<x\leq 1$ 时，即 $\dfrac{e^{2x-2}}{x^2}\geq 1$，

故 $\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{3-x}{(2-x)^2}\geq x+1-\dfrac{3-x}{(x-2)^2}=\dfrac{x^3-3x^2+x+1}{(x-2)^2}$，　………………11 分

易知当 $0<x\leq 1$ 时，$x^2-2x-1<0$，

故 $x^3-3x^2+x+1=(x-1)(x^2-2x-1)\geq 0$，故 $\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{3-x}{(2-x)^2}\geq 0$，故 $h'(x)\geq 0$，

即 $h(x)$ 递增，即 $h(x)\leq h(1)$，从而 $x_1+x_2\geq 2$.　………………13 分

21.（本小题 14 分）

解：（1）因为点 $F(1,0)$，点 A 是直线 $l_1: x=-1$ 上的动点，过 A 作直线 l_2，$l_1\perp l_2$，

线段 AF 的垂直平分线与 l_2 交于点 P，

所以点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离等于它到直线 l_1 的距离，

所以点 P 的轨迹是以点 F 为焦点，直线 $l_1:x=-1$ 为准线的抛物线，

所以曲线 C 的方程为 $y^2=4x$． ………………4 分

（2）设 $P(x_0,y_0)$，点 $M(-1,m)$，点 $N(-1,n)$，

直线 PM 的方程为：$y-m=\dfrac{y_0-m}{x_0+1}(x+1)$， ………………5 分

化简，得 $(y_0-m)x-(x_0+1)y+(y_0-m)+m(x_0+1)=0$，

因为 □PMN 的内切圆的方程为 $x^2+y^2=1$，

所以圆心 $(0,0)$ 到直线 PM 的距离为 1，即 $\dfrac{y_0-m+m(x_0+1)}{\sqrt{(y_0-m)^2+(x_0+1)^2}}=1$， ………………7 分

所以 $(y_0-m)^2+(x_0+1)^2=(y_0-m)^2+2m(y_0-m)(x_0+1)+m^2(x_0+1)^2$，

由题意得 $x_0>0$，所以上式化简，得 $(x_0-1)m^2+2y_0m-(x_0+1)=0$，

同理，有 $(x_0-1)n^2+2y_0n-(x_0+1)=0$， ………………9 分

所以 m，n 是关于 t 的方程 $(x_0-1)t^2+2y_0t-(x_0+1)=0$ 的两根，

所以 $m+n=\dfrac{-2y_0}{x_0-1}$，$mn=\dfrac{-(x_0+1)}{x_0-1}$， ………………10 分

所以 $|MN|=|m-n|=\sqrt{(m+n)^2-4mn}=\sqrt{\dfrac{4y_0^2}{(x_0-1)^2}+\dfrac{4(x_0+1)}{x_0-1}}$，

因为 $y_0^2=4x_0$，$y_0=2\sqrt{x_0}$，

所以 $MN=\sqrt{\dfrac{16x_0}{(x_0-1)^2}+\dfrac{4(x_0+1)}{x_0-1}}=2\sqrt{\dfrac{x_0^2+4x_0-1}{(x_0-1)^2}}$， ………………12 分

直线 PF 的斜率 $k=\dfrac{y_0}{x_0-1}$，则 $|k|=\left|\dfrac{y_0}{x_0-1}\right|=\dfrac{2\sqrt{x_0}}{x_0-1}$，

所以 $\left|\dfrac{k}{MN}\right|=\sqrt{\dfrac{x_0}{x_0^2+4x_0-1}}=\sqrt{\dfrac{1}{x_0-\dfrac{1}{x_0}+4}}$， ………………13 分

因为函数 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x_0-\dfrac{1}{x_0}>1-1=0$，

所以 $0<\dfrac{1}{x_0-\dfrac{1}{x_0}+4}<\dfrac{1}{4}$，所以 $0<\left|\dfrac{k}{MN}\right|<\dfrac{1}{2}$．

所以 $\left|\dfrac{k}{MN}\right|$ 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$．　　………………14 分

22.（本小题 13 分）

解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d．由 $a_1=1$，$a_8=15$ 得 $1+7d=15$，

解得 $d=2$，则得 $a_2=a_1+d=1+2=3$，所以 $a=3$．　　………………2 分

（2）由 $S_{19}=19a_{10}$，得 $10\times1+\dfrac{10\times9}{2}\times2+9a+\dfrac{9\times8}{2}\times2=19\times(a+8)$，

解得 $a=2$，由 $a_{n+2}-a_n=2$，且 $a_1=1$，$a_2=2$，

得当 n 为奇数时，$a_n=a_1+\dfrac{n-1}{2}\times2=n$；

当 n 为偶数时，$a_n=a_2+\dfrac{n-2}{2}\times2=n$．

所以对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=n$，当 $n\geq2$ 时，$a_n-a_{n-1}=1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项、 1 为公差的等差数列．　　………………7 分

（3）由题意 $a_n=a^{n-1}$．

①当 $0<a<1$ 时，$a_3<a_2<a_1\leq S_m$，所以对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，都有 $(S_m-a_2)(S_m-a_3)>0$，

因此数列 $\{a_n\}$ 不具有性质 M；　　………………8 分

②当 $a=1$ 时，$a_n=1$，$S_n=n$，所以对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，

都有 $(S_m-a_2)(S_m-a_3)=(m-1)^2\geq0$，因此数列 $\{a_n\}$ 不具有性质 M；…………9 分

③当 $1<a<2$ 时，$(a-1)^2>0\Leftrightarrow a(2-a)\langle 1\Leftrightarrow\dfrac{1}{2-a}\rangle a\Leftrightarrow\log_a\dfrac{1}{2-a}>1$

$n\geq\log_a\dfrac{1}{2-a}\Leftrightarrow\dfrac{a^n-1}{a-1}\geq a^n\Leftrightarrow S_n\geq a_{n+1}$，

$n<\log_a\dfrac{1}{2-a}\Leftrightarrow\dfrac{a^n-1}{a-1}<a^n\Leftrightarrow S_n<a_{n+1}$，

取 $\log_a\dfrac{1}{2-a}=n_0$（x 表示不小于 x 的最小整数），则 $S_{n_0}\geq a_{n_0+1}$，$S_{n_0-1}<a_{n_0}$．

所以对于任意 $m\in\mathbf{N}^*$，$\left(S_m-a_{n_0}\right)\left(S_m-a_{n_0+1}\right)\geq0$，

即对于任意 $m\in\mathbf{N}^*$，S_m 都不在区间 $\left(a_{n_0},a_{n_0+1}\right)$ 内，

所以数列 $\{a_n\}$ 不具有性质 M；　　………………11 分

④当 $a\geq 2$ 时，$S_n-a_{n+1}=\dfrac{a^n-1}{a-1}-a^n=\dfrac{(2-a)a^n-1}{a-1}<0$，且 $S_n>a_n$，

即对任意的 $n\geq 2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，都有 $(S_m-a_n)(S_m-a_{n+1})<0$，

所以当 $a\geq 2$ 时，数列 $\{a_n\}$ 具有性质 M． ………………13 分

综上，使得数列 $\{a_n\}$ 具有性质 M 的正实数 a 的集合为 $[2,+\infty)$． ………………13 分

③④的另解：

当 $a>1$ 时，$\{a_n\}$ 单调递增，$\{S_n\}$ 单调递增，且 $n\geq 2$ 时，$S_n>a_n$．

若对任意 $n\geq 2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，都存在 $m\in\mathbf{N}^*$，

使得 $(S_m-a_n)(S_m-a_{n+1})<0$，即存在 S_m 在区间 (a_n,a_{n+1}) 内．

观察 (a_2,a_3)，(a_3,a_4)，$\cdots$，发现在 (a_n,a_{n+1}) 内的 S_m 只能是 S_n．

证明：在 $n-1$ 个区间 (a_2,a_3)，(a_3,a_4)，$\cdots$，(a_n,a_{n+1}) 内需要 $n-1$ 个 S_m，

因为 $S_1<a_2$，$S_{n+1}>a_{n+1}$，所以可选择的 S_m 只能是 S_2，S_3，$\cdots$，S_n，共 $n-1$ 个．

由 $S_2<S_3<\cdots<S_n$，得 $a_n<S_n<a_{n+1}$．