丰台区 2022～2023 学年度第二学期综合练习（二）

高三数学　参考答案

2023. 04

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	B	A	D	C	D	A	D	B

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．24　　12．$y=x+2$（答案不唯一）　　13．0；$[-\frac{9}{8},2]$

14．80　　15．②③

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.（本小题 13 分）

选择条件①：

解：（Ⅰ）在△BCD中，由余弦定理得 $DC^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos\angle DBC$，

即 $BD^2-2\sqrt{5}BD+5=0$，解得 $BD=\sqrt{5}$．　　------------6分

（Ⅱ）在△BCD中，BC=3，CD=2，$BD=\sqrt{5}$，所以 $BD^2+CD^2=BC^2$，

因此 $\angle BDC=\frac{\pi}{2}$，

所以 $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot CD=\sqrt{5}$

在△ABD 中，AB=1，AD=2，$BD=\sqrt{5}$，所以 $AB^2+AD^2=BD^2$，

所以 $\angle DAB$=$\frac{\pi}{2}$，

又因为 $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD=1$，

所以 S_{ABCD}=$S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}=\sqrt{5}+1$．　　-----------13分

选择条件②：

解：（Ⅰ）在△BCD中，BC=3，CD=2，由余弦定理得

$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle DCB=13-12\cos\angle DCB$ ①，

在△ABD中，AB=1，DA=2，由余弦定理得

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle DAB=5-4\cos\angle DAB$ ②，

因为$\angle DCB+\angle DAB=\pi$，

所以 $\cos\angle DCB=-\cos\angle DAB$，

由①②解得 $\cos\angle DCB=\frac{1}{2}$，

代入①得 $BD=\sqrt{7}$． ------------6 分

（Ⅱ）因为 $\cos\angle DCB=-\cos\angle DAB$，

所以 $\cos\angle DAB=-\frac{1}{2}$，

所以 $\sin\angle DCB=\sin\angle DAB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $S_{ABCD}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle DAB+\frac{1}{2}CB\cdot CD\sin\angle DCB=2\sqrt{3}$．

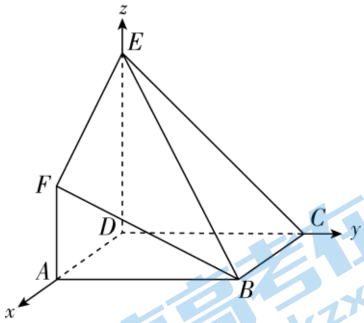
------------13分

17.（本小题 14 分）

（Ⅰ）证明：因为平面 ABF//平面 CDE，

平面$ADEF\cap$平面$ABF=AF$，平面$ADEF\cap$平面$CDE=DE$，

所以$AF//DE$． ------------4分



（Ⅱ）因为 $DE\perp$平面 $ABCD$，$AD,DC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $DE\perp AD$，$DE\perp DC$，

又因为 $AD\perp DC$，

所以 AD,DC,DE 两两垂直，

以 D 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图所示，

$D(0,0,0),A(1,0,0),B(2,2,0),C(0,2,0),E(0,0,2),F(2,0,1)$，

$\overrightarrow{CE}=(0,-2,2),\overrightarrow{BC}=(-2,0,0),\overrightarrow{FB}=(0,2,-1)$，

设平面 BCE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_0,y_0,z_0)$

由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{BC},\\ \boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{CE},\end{cases}$得$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}-2x_0=0,\\ -2y_0+2z_0=0,\end{cases}$

所以平面 BCE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$，

所以点 F 到平面 BCE 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{FB}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$． ------------9 分

（Ⅲ） 设 $\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{EB}$，可得 $\overrightarrow{FP}=(2\lambda-2,2\lambda,1-2\lambda)$，

因为 FP 在 CE 的垂面上，所以 $FP\perp CE$，

所以 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{CE}=-4\lambda+2(1-2\lambda)=-8\lambda+2=0$，所以 $\lambda=\frac{1}{4}$，

所以$|\overrightarrow{EP}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{EB}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$． ------------14 分

18.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）$n=2000\times\frac{7}{100}=140$；　　　　　　　　　　　　------------4 分

（Ⅱ）设事件 A=“按性别进行分层抽样，从该地区抽取了 5 名教师，这 5 名教师中恰有 1 人认为人工智能对于教学很有帮助”.

按性别进行分层抽样，从该地区抽取了 5 名教师，其中 1 名男教师，4 名女教师.

由题意可知 100 名被调查的教师中，有 8 名男教师和 40 名女教师认为人工智能对于教学“很有帮助”.

所以估计从该地区教师中任取一名男教师，认为人工智能对于教学“很有帮助”的概率为$\frac{2}{5}$；任取一名女教师，认为人工智能对于教学“很有帮助”的概率为$\frac{1}{2}$.

故 $P(A)=\frac{2}{5}\times(1-\frac{1}{2})^4+\frac{3}{5}\times C_4^1\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})^3=\frac{1}{40}+\frac{6}{40}=\frac{7}{40}$；　　　　------------11 分

（Ⅲ）$\mu_1>\mu_0>\mu_2$.　　　　　　　　　　　　------------14 分

19.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为椭圆 C 过点 $A(-2,0)$，$B(\sqrt{3},\frac{1}{2})$.

所以$\begin{cases}a=2\\ \frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$，

所以椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

因为$c^2=a^2-b^2=3$，所以椭圆 C 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　　　------------5 分

（Ⅱ）方法 1：

设点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)(x_1\neq\pm2,x_2\neq\pm2)$，

所以直线 PA 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 AQ 的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$，

所以点 $E(0,\frac{2y_1}{x_1+2})$，$F(0,\frac{2y_2}{x_2+2})$.

$\overrightarrow{ME}=(-1,\frac{2y_1}{x_1+2})$，$\overrightarrow{MF}=(-1,\frac{2y_2}{x_2+2})$

因为$ME\perp MF$，所以$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=0$

即$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=1+\frac{4y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=0$　　①

当直线 PQ 无斜率时，设 $x=m$，

则 $x_1=x_2=m$，$y_1\cdot y_2=-y_1^2=\frac{m^2}{4}-1$

代入①得：$1+\frac{4(\frac{m^2}{4}-1)}{m^2+4m+4}=0$，解得：$m=0$，

所以 P，O，Q 三点共线.

当直线 PQ 有斜率时，设 $y=kx+n(k\neq 0)$，

由 $\begin{cases} y=kx+n \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得：$(1+4k^2)x^2+8knx+4n^2-4=0$

所以 $\begin{cases} \Delta=64k^2n^2-4(1+4k^2)(4n^2-4)>0 \\ x_1+x_2=-\dfrac{8kn}{1+4k^2} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4n^2-4}{1+4k^2} \end{cases}$

$$y_1\cdot y_2=(kx_1+n)(kx_2+n)$$

$$=k^2x_1x_2+kn(x_1+x_2)+n^2$$

$$=\frac{k^2(4n^2-4)}{1+4k^2}-\frac{8k^2n^2}{1+4k^2}+n^2$$

$$=\frac{n^2-4k^2}{1+4k^2}$$

代入①得：$\dfrac{4n^2-4}{1+4k^2}-\dfrac{16kn}{1+4k^2}+4+\dfrac{4n^2-16k^2}{1+4k^2}=0$

解得：$n=0$ 或 $n=2k$

当 $n=2k$ 时，直线 PQ 的方程：$y=k(x+2)$，不符合题意.

所以 P，O，Q 三点共线.

综上，P，O，Q 三点共线. ------------15 分

方法 2：

设点 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm 2)$，点 $F(0,n)$， 直线 PA 的方程为：$y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

所以点 $E(0,\dfrac{2y_0}{x_0+2})$.

$\overrightarrow{ME}=(-1,\dfrac{2y_0}{x_0+2})$，$\overrightarrow{MF}=(-1,n)$，

因为 $ME\perp MF$，所以 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=0$

所以 $1+\dfrac{2y_0n}{x_0+2}=0$，即 $n=-\dfrac{x_0+2}{2y_0}$，

所以直线 AF 的方程为：$y=-\dfrac{x_0+2}{4y_0}(x+2)$

要证 P，O，Q 三点共线，由椭圆的对称性，

只需证 $Q(-x_0,-y_0)$ 在直线 AF 上.

又因为 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$，所以 $x_0^{\ 2}-4=-4y_0^{\ 2}$，

所以 $-\frac{x_0+2}{4y_0}(-x_0+2)=\frac{x_0^{\ 2}-4}{4y_0}=-y_0$

所以 $Q(-x_0,-y_0)$ 在直线 AF 上，

所以 P，O，Q 三点共线. ------------15 分

20.（本小题 15 分）

解： $f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$

（Ⅰ）当 $a=0$ 时， $f(x)=\sqrt{x}e^x$， $f'(x)=\frac{e^x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}e^x\ (x>0)$，

所以 $f'(1)=\frac{3e}{2}$， $f(1)=e$，

因此，所求切线方程为 $y-e=\frac{3e}{2}(x-1)$，即 $3ex-2y-e=0$.------------4 分

（Ⅱ） $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x+(\sqrt{x}+a)e^x=\frac{2x+2a\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}e^x\ (x>0)$，

因为函数 $f(x)$ 是增函数，所以 $f'(x)\geq 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

等价于 $2x+2a\sqrt{x}+1\geq 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

法 1：转化为 $a\geq -(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}})$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

因为 $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\geq\sqrt{2}$， 当且仅当 $x=\frac{1}{2}$ 时 $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{2}$，

所以 $[-(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}})]_{max}=-\sqrt{2}$， 所以 $a\leq-\sqrt{2}$.

当 $a=-\sqrt{2}$ 时，满足条件.

所以 a 的取值范围是 $[-\sqrt{2},+\infty)$. ------------9 分

法 2：当 $a\geq 0$ 时， $2x+2a\sqrt{x}+1>0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，符合题意.

当 $a<0$ 时，令 $\sqrt{x}=t$， 则 $t\geq 0$， $2t^2+2at+1\geq 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

因为 $-\frac{a}{2}>0$， 所以 $4a^2-8\leq 0$， 所以 $-\sqrt{2}\leq a<0$，

综上所述，a 的取值范围是 $[-\sqrt{2},+\infty)$.　　　　------------9 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，当 $a\ge-\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 是增函数，$f(x)$ 的最小值 $f(0)<f(1)$；

当 $a<-\sqrt{2}$ 时，由 $f'(x)=0$ 得，$2x+2a\sqrt{x}+1=0$，该方程有两个正实数根，

设为 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$，（$x_1=\dfrac{a^2-1+a\sqrt{a^2-2}}{2}$，$x_2=\dfrac{a^2-1-a\sqrt{a^2-2}}{2}$）

随 x 的变化，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(x_2)$，$f(x)$ 的最小值为 $\min\{f(0),f(x_2)\}$,记为 $f(x_0)$.

当 $x_2\ne1$ 时，$f(x_2)<f(1)$，所以 $f(x_0)<f(1)$，

当 $x_2=1$ 时，$f'(1)=0$，所以 $a=-\dfrac{3}{2}$，$f(0)-f(1)=\dfrac{\mathrm{e}-3}{2}<0$，即 $f(0)<f(1)$，

此时 $f(x_0)=f(0)<f(1)$，

综上所述，$f(x_0)<f(1)$.　　　　------------15 分

21.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）$\{a_n\}$ 为 4，6，9；$\{b_n\}$ 为 1，3，5，7.（答案不唯一）　　------------4 分

（Ⅱ）由题意，因为数列 $\{b_n\}$ 是公差 d 不为 0 的无穷数列，所以数列 $\{b_n\}$ 的公差必为正数

否则，假设 $d<0$，因为 $b_1\ge1,b_n<1\Leftrightarrow b_1+(n-1)d<1\Leftrightarrow n>\dfrac{1-b_1}{d}+1$，

所以当 $n>\dfrac{1-b_1}{d}+1$ 时，$b_n<1$，与 $c_1=1$ 矛盾.

数列 $\{c_n\}$ 的前 5 项为 $1,p,p^2,p^3,p^4$，且 $p>1$，

因为 $d>0$，所以 $\{b_n\}$ 是递增数列.

因为 $b_1<a_5$，$a_1=c_1=1,A\cap B=\varnothing$，

所以 $b_1\in\{c_2,c_3,c_4,c_5\}$.

此时必有 $c_2=b_1$，事实上，若 $c_2=a_2$，则 $\{c_n\}$ 的前 5 项即是 $\{a_n\}$ 的前 5 项，

与 $b_1\in\{c_2,c_3,c_4,c_5\}$ 矛盾.

所以 $c_3=a_2$ 或 $c_3=b_2$.

若 $c_3=a_2$，则 $p^2=2$，所以 $p=\sqrt{2}$，此时 $\{c_n\}$ 的前 5 项为 $1,\ \sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4$，

即 $b_1=\sqrt{2},b_2=2\sqrt{2}$，所以数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d=b_2-b_1=\sqrt{2}$,

因为 $b_3=3\sqrt{2}>a_2$，所以 $p=\sqrt{2}$ 符合题意；

若 $c_3=b_2$，则 $c_4=b_3$ 或 $c_4=a_3$

① $c_4=b_3$ 时，有 p,p^2,p^3 成等差数列，所以 $2p^2=p+p^3$，解得 $p=1$，与 $p>1$ 矛盾；

② $c_4=a_3$ 时，有 $p^3=2$，所以 $p=\sqrt[3]{2}$，所以 $\{c_n\}$ 的前 5 项为 $1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4},\ 2,\ 2\sqrt[3]{2}$，

因为 $2\sqrt[3]{2}\notin A$，所以 $2\sqrt[3]{2}\in B$，即 $b_3=2\sqrt[3]{2}$，所以 $b_1+b_3\neq 2b_2$，与 $\{b_n\}$ 为等差数列矛盾．所以 $c_3=b_2$ 不可能.

综上， p 的值为 $\sqrt{2}$.　　　　　　　　　　------------9 分

（III）因为数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1 的无穷数列，由（2）知，数列 $\{b_n\}$ 是递增的数列；

对于公比不为 1 的无穷数列 $\{a_n\}$，必有 $a_1\geq 1$，$q>1$.

否则，若 q 为负，则 $\{a_n\}$ 相邻两项必有一项为负，与 $c_1=1$ 矛盾；

若 $0<q<1$，因为 $a_1q^{n-1}<1\Leftrightarrow n>1-\dfrac{\ln a_1}{\ln q}$，

所以当 $n>1-\dfrac{\ln a_1}{\ln q}$ 时， $a_n<1$ 与题设矛盾.

先证明充分性：

当 d 是有理数时，因为数列 $\{b_n\}$ 是递增的等差数列，所以 $d>0$，

设 $d=\dfrac{s}{t}(s,t\in\mathbf{N}^*,s,t$ 互质)，则 $s=td$，

令 $a_n=(1+s)^{n-1}$，则 $a_1=1,a_2=1+s=1+td=b_{t+1}$,

当 $n\geq 3$ 时， $a_n=1+C_{n-1}^1s+C_{n-1}^2s^2+\cdots+C_{n-1}^rs^r+\cdots+C_{n-1}^{n-1}s^{n-1}$

$$=1+(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2s+\cdots+C_{n-1}^rs^{r-1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}s^{n-2})td$$

所以数列$\{a_n\}$的第 n 项是数列$\{b_n\}$的第$(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2 s+\cdots+C_{n-1}^r s^{r-1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}s^{n-2})t+1$项，

所以数列$\{a_n\}$中的 项都是数列$\{b_n\}$的项，即$A\subseteq B$.

再证明必要性，（反证法）

假设d是无理数，因为$A\subseteq B$，即数列$\{a_n\}$中的项都是数列$\{b_n\}$的项，

令$a_1=b_{i+1},a_2=b_{j+1},a_3=b_{k+1}(i,j,k\in N)$，则$a_1=1+id,a_2=1+jd,a_3=1+kd$，且$i<j<k$，

因为$a_2^2=a_1a_3$,即$(1+jd)^2=(1+id)(1+kd)$，

整理得：$2jd+j^2d^2=(i+k)d+ikd^2$，约去d有$2j+j^2d=(i+k)+ikd$，

因为$i,j,k\in\mathbf{N}^*$，且d是无理数，所以$\begin{cases}2j=i+k,\\ j^2=ik,\end{cases}$消去$j$并整理得：$(i-k)^2=0$

即$i=k$，与$i<j<k$矛盾，所以假设不成立，即d是有理数.

综上所述，“存在数列$\{a_n\}$，使$A\subseteq B$”的充要条件是“d是有理数”.

-----------14 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。