

北京二中 2021 届高三 10 月考数学试题

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

01. 已知集合  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$ , 则  $A \cap B =$  【    】

- A.  $\{0, 1\}$
- B.  $\{0, 1, 2\}$
- C.  $\{x | 0 \leq x < 2\}$
- D.  $\{x | 0 \leq x \leq 3\}$

02. 在复平面内，复数  $\frac{i}{1+2i}$ （其中  $i$  为虚数单位）对应的点位于 【    】

- A. 第一象限
- B. 第二象限
- C. 第三象限
- D. 第四象限

03. 下列函数是奇函数且在区间  $(0, 2)$  递增的函数为 【    】

- A.  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$
- B.  $f(x) = \ln|x|$
- C.  $f(x) = \sin x$
- D.  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geq 0 \\ -x^2 + 4x, & x < 0 \end{cases}$

04. 若  $a = 0.3^5$ ,  $b = \log_{0.3} 0.2$ ,  $c = \log_3 2$ , 则 【    】

- A.  $a > b > c$
- B.  $b > a > c$
- C.  $b > c > a$
- D.  $c > b > a$

05. 直线  $y = kx - 1$  与曲线  $y = \ln x$  相切，则实数  $k =$  【    】

- A. -1
- B. 1
- C. 2
- D. 不存在

06. 若实数  $a, b$  满足  $a > 0, b > 0$ , 则“ $a > b$ ”是“ $\ln a - b > \ln b - a$ ”的 【    】

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

07. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 3x - b, & x < 1 \\ 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$ , 若  $f\left(f\left(\frac{5}{6}\right)\right)$ , 则  $b$  等于 【    】

- A. 1
- B.  $\frac{7}{8}$
- C.  $\frac{3}{4}$
- D.  $\frac{1}{2}$



08. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2$ , 则下列结论中正确的是

【   】

A. 数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2^n$

B. 数列  $\{a_n\}$  为等比数列

C. 数列  $\{\ln a_n\}$  为等比数列

D. 数列  $\{\ln a_n\}$  为等差数列

09. 正方形  $ABCD$  的边长为 2, 点  $E, F, G$  满足  $\overline{BE} = \overline{EC}, \overline{CF} = \overline{FD}, \overline{AG} = \overline{GD}$ , 则下列各式中值最大的为

【   】

A.  $\overline{AE} \cdot \overline{AB}$

B.  $\overline{AF} \cdot \overline{AB}$

C.  $\overline{AG} \cdot \overline{AB}$

D.  $\overline{GF} \cdot \overline{AB}$

10. 在标准温度和大气压下, 人体血液甲氢离子的物质的量的浓度 (单位  $mol/L$ , 记作  $[H^+]$ ) 和氢氧根离子的物质的量的浓度 (单位  $mol/L$ , 记作  $[OH^-]$ ) 的乘积等于常数  $10^{-14}$ , 已知  $pH$  值的定义为

$pH = -\lg[H^+]$ , 健康人体血液的  $pH$  值保持在 7.35~7.45 之间, 那么健康人体血液中的  $\frac{[H^+]}{[OH^-]}$  可以为

(参考数据:  $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$ )

【   】

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{1}{6}$

D.  $\frac{1}{10}$

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

11. 命题  $p: \forall x > 0, \left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$  的否定形式为\_\_\_\_\_.

12. 已知向量  $\vec{a} = (1, \sqrt{3}), |\vec{b}| = 2$ , 且  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ , 则向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角大小为\_\_\_\_\_,  $|\vec{a} + 2\vec{b}|$  的值为\_\_\_\_\_.

13. 已知  $x > 0, y > 0$ , 且  $\log_2 x + \log_2 y = 2$ , 则  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

14. 若函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + 2x + 1 (a \in R)$  在区间  $(-2, -1)$  内存在单调减区间, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.



15. 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足 ①  $f(x)+f(2-x)$ ; ②  $f(x)-f(-2-x)=0$  ③ 在  $[-1,1]$  上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1,0] \\ 1-x, & x \in (0,1] \end{cases}, \text{ 则函数 } f(x) \text{ 与函数 } g(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0 \end{cases} \text{ 的图象在区间 } [-3,3] \text{ 上的公共点}$$

个数为\_\_\_\_\_.

19. (本小题 14 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 经过点  $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , 离心率是  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 且以  $AB$  为直径的圆过椭圆右顶点  $M$ , 求证: 直线  $l$  恒过定点.

20. (本小题 14 分) 已知函数  $f(x) = \ln x - ax + 1$ , 其中  $a \in \mathbb{R}$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 是否存在  $k \in \mathbb{Z}$ , 使得  $f(x) + ax - 2 > k\left(1 - \frac{2}{x}\right)$  对任意  $x > 2$  恒成立? 若存在, 请求出  $k$  的最大值; 若

不存在, 请说明理由.

21. (本小题 14 分) 已知  $a$  为实数, 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = a, a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3, & a_n > 3 \\ 4 - a_n, & a_n \leq 3 \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$ .

(1) 当  $a=0.2$  和  $a=7$  时, 分别写出数列  $\{a_n\}$  的前 5 项;

(2) 证明: 当  $a > 3$  时, 存在正整数  $m$ , 使得  $0 < a_m \leq 2$ ;

(3) 当  $0 \leq a \leq 1$  时, 是否存在实数  $a$  及正整数  $n$ , 使得数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2019$ ? 若存在, 求出实数  $a$  及正整数  $n$  的值; 若不存在, 请说明理由.

