绝密★启用前

2022届全国高三第一次学业质量联合检测

理科数学

本试卷4页。总分150分。考试时间120分钟。

注意事项：

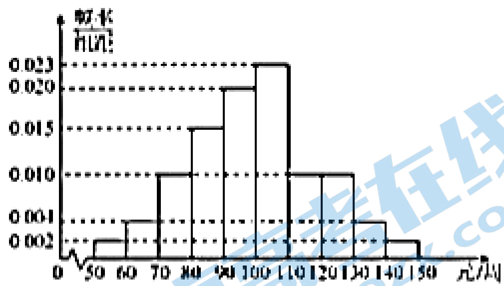
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|-1<x<2\}$，$B=\{y|y=2^x,x\in A\}$，则 $A\cup B$ 的子集的个数为

A. 2　　B. 3　　C. 7　　D. 8

2. 某学校开展了"勤俭节约，从我做起"活动，活动开始前，该学校对学生每周的消费情况做了问卷调查，将统计数据整理得频率分布直方图如图，根据此频率分布直方图估计该校学生每周消费金额的众数为



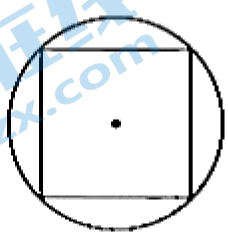
A. 99.4　　B. 99.5

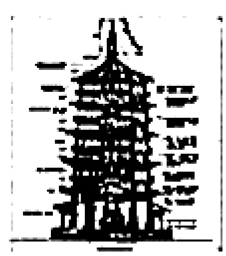
C. 105　　D. 110

3. 已知 $z(2+3i)-\bar{z}=-2+6i$，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $z=$

A. $1+i$　　B. $1-i$　　C. $-1+i$　　D. $-1-i$

4. 圆的内接正方形的边长与圆的半径的比例称为白银比例，它在东方文化中的重要程度不亚于西方文化中的"黄金比例"。山西应县释迦塔（即著名的应县木塔），是中国现存较为古老的木构塔式建筑，该木塔总高度与顶层檐柱柱头以下部分的高度之比与白银比例高度吻合。已知木塔顶层檐柱柱头以下部分的高度为46.83米，则应县木塔的总高度大约是（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$）



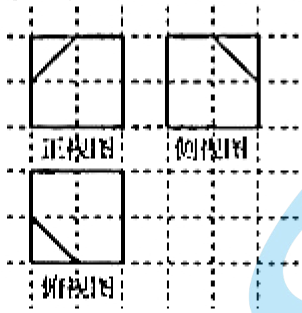


A. 60.22米　　B. 63.23米　　C. 66.22米　　D. 70.50米

5. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，直线 $ax-by=0$ 与圆 $M:x^2+y^2-mx+1=0$ 相切，则实数 m 的值是

A. ±1　　B. ±2　　C. ±4　　D. ±8

6. 如图，网格纸上小正方形的边长为1，实线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的体积为



A. $\frac{15}{2}$　　B. $\frac{23}{3}$　　C. 7　　D. $\frac{47}{6}$

7. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则"$S_n=3n+1$"是"数列$\{a_n\}$是常数列"的

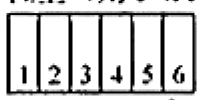
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 在$\triangle ABC$中，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，BC边上的中线AD的长度为$2\sqrt{3}$，则$\triangle ABC$的外接圆的面积为

A. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$　　B. $\frac{52\pi}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{39}}{3}$　　D. $\frac{208\pi}{3}$

9. 某公司为方便员工停车，租了6个停车位，编号如图所示.公司规定：每个车位只能停一辆车，每个员工只允许占用一个停车位.记事件A为"员工小王的车停在编号为奇数的车位上"，事件B为"员工小李的车停在编号为偶数的车位上"，则$P(A|B)=$



A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{3}{10}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{5}$

10. 已知A是锐角$\triangle ABC$的一个内角，若$(2-\sin A)\tan 2A-\cos A=0$，则$\cos A=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 某圆锥的侧面展开图是一个半径为4的半圆，正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$内接于这个圆锥的内切球，则该圆锥的体积与正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的体积的比值为

A. 4π　　B. $\frac{9\sqrt{3}}{8}\pi$　　C. $4\sqrt{3}\pi$　　D. $24\sqrt{3}\pi$

12. 设函数$f(x)=a^x(a>1)$，对任意实数$b>2e^2$（e为自然对数的底数），关于x的方程$f(x)=bx-e^2$恒有两个不相等的实数根，则a的取值范围是

A. $(1,e^2]$　　B. $(1,e^2)$　　C. $(e^2,+\infty)$　　D. $[e^2,+\infty)$

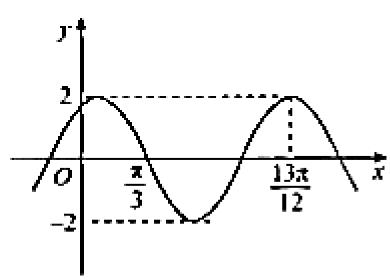
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 直线l与曲线$y=(x^2+1)\ln x$在点$(1,0)$处相切，则直线l在y轴上的截距为________.

14. 已知向量e_1，e_2是两个互相垂直的单位向量，O是坐标原点，$\overrightarrow{OA}=3e_1+e_2$，$\overrightarrow{OB}=2e_1+ke_2$ $(k>0)$，若$\triangle OAB$是直角三角形，则实数k的值为________.

15. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$的左、右焦点分别是$F_1$，$F_2$，直线$l$过坐标原点$O$且与双曲线$C$交于点$M$，$N$.若$|MN|=|F_1F_2|$，则四边形$MF_1NF_2$的面积为________.

16. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，$B$是某个三角形的内角，若关于$a$的不等式$f(B)\leqslant e^a-a$在R上恒成立，则$B$的取值范围为________.



第16题图

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (12 分)

梨树绝大多数品种自花授粉,结实率很低,因此果农在栽培梨树的时候,必须在果园配置授粉树,并结合适当的辅助授粉方法,以便更顺利地完成梨树的授粉受精过程,以此达到果园丰产稳产、高品质的目的.某地区将梨树蜜蜂授粉和自然授粉的花朵坐果率进行比较,统计数据如下:

坐果	授粉方式		总计
	自然授粉	蜜蜂授粉	
花朵未坐果	1 000	300	1 300
花朵坐果	50	80	130

(1)自然授粉和蜜蜂授粉的花朵坐果数的频率分别是多少?

(2)根据数据完成下列 2×2 列联表,并据此判断能否有 99.9%的把握认为自然授粉与蜜蜂授粉的花朵坐果率有差异?

坐果	授粉方式		总计
	自然授粉	蜜蜂授粉	
花朵未坐果	1 000	300	1 300
花朵坐果	50	80	130
总计			

附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,$n=a+b+c+d$.

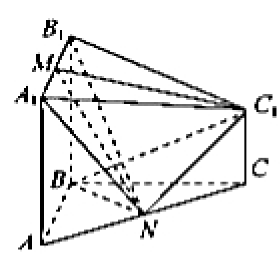
$P(K^2\geq k_0)$	0.05	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	6.635	7.879	10.828

18. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和,$T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,从①$b_n=3^n$;②$S_n=n^2+n$;③$T_n=\dfrac{3}{2}+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 3^{n+1}$中选取两个作为条件,证明另外一个成立.

注:若选择不同的组合分别解答,则按第一个解答计分.

19. (12 分)



如图,在多面体 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,侧面 AA_1B_1B 为菱形,$BB_1\perp$平面 ABC,$CC_1\perp$平面 ABC,$AB=BC=2CC_1=2$,N 是 AC 的中点,M 为棱 A_1B_1 上的动点,$BC_1\perp A_1B_1$.

(1)证明:平面 $BC_1N\perp$平面 A_1B_1N;

(2)当点 M 位于棱 A_1B_1 的什么位置时,面 BB_1C_1C 与面 MNC_1 所成的二面角的正弦值最小?

20.（12分）

已知函数 $f(x)=\sin x-x+\frac{1}{2}x^2$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间及最值；

(2)证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{k^2}>\frac{n}{2(n+1)}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

21.（12分）

已知直线 l 过原点 O，且与圆 A 交于 M、N 两点，$|MN|=4$，圆 A 与直线 $y=-2$ 相切，OA 与直线 l 垂直，记圆心 A 的轨迹为曲线 C.

(1)求 C 的方程；

(2)过直线 $y=-1$ 上任一点 P 作 C 的两条切线，切点分别为 Q_1，Q_2，证明：

①直线 Q_1Q_2 过定点；

②$PQ_1\perp PQ_2$.

(二)选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.［选修4—4：坐标系与参数方程］(10分)

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\left(1+\sin\theta-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+1=0$.

(1)求 C_1 的直角坐标方程；

(2)设点 M 的直角坐标为 $(0,-1-\sqrt{2})$，点 N 的直角坐标为 $(0,-1+\sqrt{2})$，动点 P 满足 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，求点 P 的轨迹 C_2 的参数方程，并判断 C_1 与 C_2 的位置关系.

23.［选修4—5：不等式选讲］(10分)

已知不等式 $|2x-1|+|2x+1|>|4a-2|(a\in\mathbf{R})$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，方程 $|2^x-1|=b(b\in\mathbf{R})$ 有两个不相等的实数根.

(1)求实数 a，b 的取值范围；

(2)若 $a+b=1$，求 $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$ 的最大值.

衡中同卷

参考答案及解析

2022 届全国高三第一次学业质量联合检测·理科数学

一、选择题

1. D 【解析】$A=\{x\in\mathbf{N}|-1<x<2\}=\{0,1\}$，$B=\{y|y=2^x,x\in A\}=\{1,2\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2\}$，所以 $A\cup B$ 的子集的个数是 $2^3=8$.

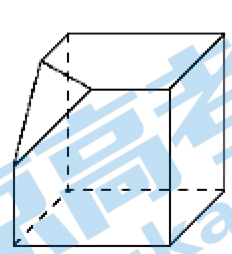
2. C 【解析】因为[100,110)范围内的小长方形的面积最大，所以众数是 105.

3. A 【解析】设 $z=a+b\mathrm{i}$，$a,b\in\mathbf{R}$，则 $z(2+3\mathrm{i})-\overline{z}=(a+b\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})-(a-b\mathrm{i})=(a-3b)+3(a+b)\mathrm{i}=-2+6\mathrm{i}$，所以 $\begin{cases}a-3b=-2,\\3(a+b)=6,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=1$，所以 $z=1+\mathrm{i}$.

4. C 【解析】设正方形的边长为 a，圆的半径为 r，则 $a=\sqrt{2}r$，易知白银比例为 $\sqrt{2}$. 因为 $46\times1.4=64.40$，$47\times1.5=70.50$，所以 $64.40<46.83\times\sqrt{2}<70.50$，故排除 A，B，D.

5. C 【解析】由题意知，$c=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$a=\sqrt{3}b$，所以直线 $ax-by=0$，即为 $y=\sqrt{3}x$. 将圆 M 的方程化为标准方程：$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+y^2=\frac{m^2}{4}-1$. 由直线与圆相切可得 $d=\frac{\left|\sqrt{3}\cdot\frac{m}{2}\right|}{\sqrt{1+3}}=\sqrt{\frac{m^2}{4}-1}$，解得 $m=\pm4$.

6. D 【解析】由三视图还原几何体，如图，则该几何体是棱长为 2 的正方体切去一个底面边长为 $\sqrt{2}$，侧棱长为 1 的四面体后剩余的部分，所以体积 $V=2^3-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{47}{6}$.



7. D 【解析】因为 $S_n=3n+1$，所以 $a_1=4$. 当 $n\geqslant2$，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n+1)-[3(n-1)+1]=3$，所以 $a_n=\begin{cases}4,n=1,\\3,n\geqslant2,\end{cases}$ 所以数列 $\{a_n\}$ 不是常数列；反之，当 $a_n=1$ 时，$S_n=n$，显然不成立，所以"$S_n=3n+1$"是"数列 $\{a_n\}$ 是常数列"的既不充分也不必要条件.

8. B 【解析】在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $AD^2=AB^2+BD^2-2BD\cdot AB\cos B$，即 $12=4+BD^2-2BD\times2\times\frac{1}{2}$，解得 $BD=4$（负值舍去），所以 $BC=2BD=8$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=4+64-2\times2\times8\times\frac{1}{2}=52$，所以 $AC=2\sqrt{13}$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{AC}{\sin B}=\frac{2\sqrt{13}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$，则 $R=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$，所以外接圆的面积为 $S=\frac{52\pi}{3}$.

9. D 【解析】$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}}{\frac{C_3^1}{C_6^1}}=\frac{3}{5}$.

10. B 【解析】由 $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}=\frac{2\cdot\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\sin^2A}{\cos^2A}}=\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2A-\sin^2A}$，得 $(2-\sin A)\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2A-\sin^2A}-\cos A=0$. 因为 A 是锐角 $\triangle ABC$ 的一个内角，所以 $\cos A>0$，所以 $2\sin A(2-\sin A)-\cos^2A+\sin^2A=0$，化简得 $4\sin A=1$，所以 $\sin A=\frac{1}{4}$，所以 $\cos A=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

11. B 【解析】根据题意设圆锥的底面半径为 r，则 $2\pi r=4\pi$，所以 $r=2$，所以圆锥的轴截面是边长为 4 的等边三角形，其内切圆半径为 $4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，设正方体的棱长为 a，则 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\times2=\sqrt{3}a$，所以 $a=\frac{4}{3}$，正方体的体积为 $\frac{64}{27}$. 又因为圆锥的高为 $h=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，则体积为 $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$，所以圆锥的体积与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积的比值为 $\frac{9\sqrt{3}}{8}\pi$.

12. A 【解析】方程 $f(x)=bx-\mathrm{e}^2$ 有两个不同的实数根，即为 $a^x-bx+\mathrm{e}^2=0$ 有两个不同的实数根，即 $\mathrm{e}^{x\ln a}-bx+\mathrm{e}^2=0$ 有两个不同的实数根. 令 $t=x\ln a$，则 $\mathrm{e}^t-\frac{bt}{\ln a}+\mathrm{e}^2=0$，即 $\frac{b}{\ln a}=\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^2}{t}$. 又因为 $b>2\mathrm{e}^2$，$a>1$，所以 $t>0$. 记 $g(t)=\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^2}{t}$，则 $g'(t)=$

$\frac{e^t\cdot t-(e^t+e^2)}{t^2}=\frac{e^t(t-1)-e^2}{t^2}$.记 $h(t)=e^t(t-1)-e^2$,则 $h'(t)=e^t(t-1)+e^t=e^t\cdot t>0$.又 $h(2)=0$,所以当 $t\in(0,2)$时,$h(t)<0$,当 $t\in(2,+\infty)$时,$h(t)>0$,则 $g(t)$在区间$(0,2)$上单调递减,在区间$(2,+\infty)$上单调递增,且当 t 趋近于 0 时,$g(t)$趋近于$+\infty$,所以$\frac{b}{\ln a}>g(2)=e^2$,所以 $\ln a<\frac{b}{e^2}$.因为 $b>2e^2$,所以$\frac{b}{e^2}>2$,所以 $\ln a\leqslant 2$,即 $1<a\leqslant e^2$,即实数 a 的取值范围是$(1,e^2]$.

二、填空题

13. -2 【解析】$y'=2x\ln x+\frac{x^2+1}{x}$,则 $k=y'|_{x=1}=2$,所以直线 l 的方程为 $y=2(x-1)$.令 $x=0$,得 $y=-2$,所以直线 l 在 y 轴上的截距为-2.

14. 2 或 4 【解析】由题意得,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-e_1+(k-1)e_2$.若$\angle AOB=90°$,则由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,得 $6+k=0$,解得 $k=-6$(舍去);若$\angle OAB=90°$,则由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,得 $k-4=0$,解得 $k=4$;若$\angle OBA=90°$,则由$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,得 $k^2-k-2=0$,解得 $k=-1$(舍去)或 $k=2$.综上,k 的值为 2 或 4.

15. 8 【解析】由双曲线的对称性可知,四边形 MF_1NF_2 的对角线互相平分且相等,所以四边形 MF_1NF_2 是矩形.设$|MF_1|=m$,$|MF_2|=n$,则$|m-n|=8$.因为$|F_1F_2|=4\sqrt{5}$,所以 $m^2+n^2=80$,化简得 $mn=8$,所以四边形 MF_1NF_2 的面积为 8.

16. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{11\pi}{12}\right]$ 【解析】由题图可得 $A=2$,$\frac{3T}{4}=\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$,所以 $T=\pi$,则 $\omega=2$.由 $f\left(\frac{13\pi}{12}\right)=2$,得$2\times\frac{13\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$.因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.设 $g(x)=e^x-x$,$g'(x)=e^x-1$,当 $x\in(-\infty,0)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,当 $x\in(0,+\infty)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g(0)=1$,所以 $f(B)=2\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$,所以 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}$.由 $B\in(0,\pi)$,得 $2B+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$.结合正弦函数的图象可知,当 $2B+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right]$时,$\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}$成立,所以 B 的取值范围是$\left[\frac{\pi}{4},\frac{11\pi}{12}\right]$.

三、解答题

17. **解**:(1)自然授粉的花朵坐果数为 50,花朵总数为 1 050,则频率为$\frac{50}{1\,050}=\frac{1}{21}$,　　(2 分)

蜜蜂授粉的花朵坐果数为 80,花朵总数为 380,则频率为$\frac{80}{380}=\frac{4}{19}$.　　(4 分)

(2)列联表如下:

坐果	授粉方式		总计
	自然授粉	蜜蜂授粉	
花朵未坐果	1 000	300	1 300
花朵坐果	50	80	130
总计	1 050	380	1 430

(7 分)

所以 $K^2=\frac{1\,430\times(1\,000\times 80-300\times 50)^2}{1\,050\times 380\times 1\,300\times 130}\approx 89.599$.　　(10 分)

因为 $89.599>10.828$,　　(11 分)

所以有 99.9%的把握认为自然授粉与蜜蜂授粉的花朵坐果率有差异.　　(12 分)

18. **解**:若选①②,

由条件 $S_n=n^2+n$ 可得,

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2$;　　(1 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$,　　(3 分)

当 $n=1$ 时符合,所以 $a_n=2n$.　　(4 分)

所以 $T_n=2\times 3^1+4\times 3^2+\cdots+2n\times 3^n$,

$3T_n=2\times 3^2+4\times 3^3+\cdots+(2n-2)\times 3^n+2n\times 3^{n+1}$,　　(6 分)

两式相减得$-2T_n=2\times(3^1+3^2+\cdots+3^n)-2n\times 3^{n+1}=$　　(8 分)

$2\times\frac{3(1-3^n)}{1-3}-2n\times 3^{n+1}$,　　(10 分)

所以 $T_n=\frac{3}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\times 3^{n+1}$,③成立.　　(12 分)

若选①③,

$T_n=a_1\times 3+a_2\times 3^2+\cdots+a_n\times 3^n=\frac{3}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\times 3^{n+1}$,

$T_{n-1}=a_1\times 3+a_2\times 3^2+\cdots+a_{n-1}\times 3^{n-1}=\frac{3}{2}+\left(n-\frac{3}{2}\right)\times 3^n$,　　(2 分)

两式相减得 $a_n\times 3^n=2n\times 3^n$,　　(4 分)

所以 $a_n=2n(n\geqslant 2)$.　　(6 分)

当 $n=1$ 时,$a_1\times 3=\frac{3}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times 3^2$,　　(8 分)

解得 $a_1=2$,符合 $a_n=2n$,　　(9 分)

所以 $a_n=2n$,　　(10 分)

所以数列$\{a_n\}$是首项为2,公差为2的等差数列, (11分)

所以 $S_n=2+4+6+\cdots+2n=\dfrac{n(2+2n)}{2}=n^2+n$,②成立. (12分)

若选②③,

由条件 $S_n=n^2+n$ 可得,

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2$; (1分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$. (3分)

当 $n=1$ 时符合,所以 $a_n=2n$. (4分)

$T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\dfrac{3}{2}+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\times 3^{n+1}$,

$T_{n-1}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}=\dfrac{3}{2}+\left(n-\dfrac{3}{2}\right)\times 3^{n}$, (6分)

两式相减得 $a_nb_n=2n\times 3^n$, (8分)

解得 $b_n=3^n(n\geqslant 2)$. (10分)

当 $n=1$ 时,$2\times b_1=\dfrac{3}{2}+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times 3^2=6$,解得 $b_1=3$,符合 $b_n=3^n$, (11分)

所以 $b_n=3^n$,①成立. (12分)

19. (1)**证明**:因为 $BB_1\perp$平面 ABC,所以 $BB_1\perp AB$.

因为侧面 AA_1B_1B 为菱形,所以 $AB/\!/A_1B_1$.

因为 $A_1B_1\perp BC_1$,所以 $AB\perp BC_1$. (1分)

因为 $BB_1\cap BC_1=B$,所以 $AB\perp$平面 BB_1C_1C,所以 $AB\perp BC$,则 AB,BC,BB_1 两两垂直. (2分)

以 B 为坐标原点,分别以 BA,BC,BB_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

则 $A(2,0,0)$,$B(0,0,0)$,$B_1(0,0,2)$,$C(0,2,0)$,$N(1,1,0)$,$C_1(0,2,1)$,

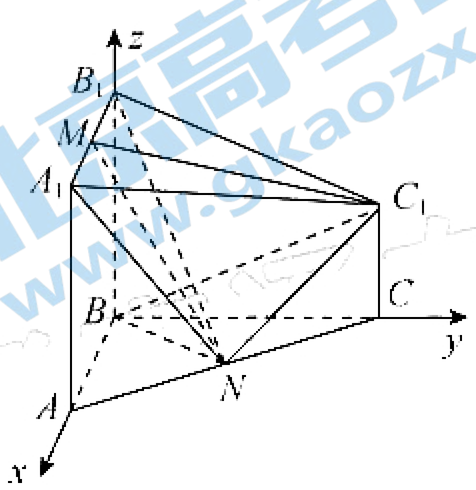
所以$\overrightarrow{BC_1}=(0,2,1)$,$\overrightarrow{B_1N}=(1,1,-2)$, (3分)

所以$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{B_1N}=0+2-2=0$,

所以 $BC_1\perp B_1N$. (4分)

又因为 $BC_1\perp A_1B_1$,$A_1B_1\cap B_1N=B_1$,所以 $BC_1\perp$平面 A_1B_1N.

因为 $BC_1\subset$平面 BC_1N,所以平面 $BC_1N\perp$平面 A_1B_1N. (5分)



(2)**解**:设 $B_1M=m(0\leqslant m\leqslant 2)$,则 $M(m,0,2)$,

所以$\overrightarrow{MN}=(1-m,1,-2)$,$\overrightarrow{NC_1}=(-1,1,1)$,设平面 MNC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{NC_1}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}(1-m)x+y-2z=0,\\ -x+y+z=0,\end{cases}$

令 $x=3$,则 $y=m+1$,$z=2-m$,

所以 $\boldsymbol{m}=(3,m+1,2-m)$. (7分)

又因为 $AB\perp$平面 BB_1C_1C,

所以平面 BB_1C_1C 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$, (8分)

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3}{1\times\sqrt{9+(m+1)^2+(2-m)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2m^2-2m+14}}=\dfrac{3}{\sqrt{2\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{2}}}$. (10分)

当 $m=\dfrac{1}{2}$,即点 M 为棱 A_1B_1 靠近点 B_1 的四等分点时,面 BB_1C_1C 与面 MNC_1 所成的二面角余弦值的绝对值最大,此时正弦值最小. (12分)

20. (1)**解**:$f'(x)=\cos x-1+x$, (1分)

当 $x\in(-\infty,0)$时,$\cos x-1+x<0$,所以 $f'(x)<0$,$f(x)$单调递减; (2分)

当 $x\in(0,+\infty)$时,$f''(x)=-\sin x+1\geqslant 0$, (3分)

所以 $f'(x)=\cos x-1+x$ 单调递增,$f'(x)=\cos x-1+x>f'(0)=0$,

所以 $f'(x)>0$,所以 $f(x)$单调递增. (4分)

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$. (5分)

综上,函数 $f(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$,单调递减区间是$(-\infty,0)$,函数 $f(x)$的最小值是0,无最大值. (6分)

(2)**证明**:由第(1)问知,当 $x>0$ 时,$\sin x>x-\dfrac{1}{2}x^2$, (7分)

取 $x=\dfrac{1}{k^2}$,$k=1,2,3,\cdots,n$,$n\in\mathbf{N}^*$,

有 $\sin\dfrac{1}{k^2}>\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{2k^4}=\dfrac{2k^2-1}{2k^4}=\dfrac{k^2+k^2-1}{2k^4}\geqslant\dfrac{k^2}{2k^4}>\dfrac{1}{2k(k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$, (9分)

故 $\sin\dfrac{1}{1^2}>\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$,

$\sin\dfrac{1}{2^2}>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)$,

$\sin\dfrac{1}{3^2}>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)$,

……

$\sin\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$, (11分)

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{1}{k^2}=\sin\dfrac{1}{1^2}+\sin\dfrac{1}{2^2}+\sin\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{n^2}$

$>\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{2(n+1)}$.　　(12 分)

21. (1)**解**：如图，设 $A(x,y)$，因为圆 A 与直线 $y=-2$ 相切，所以圆 A 的半径为 $|y+2|$.　　(1 分)

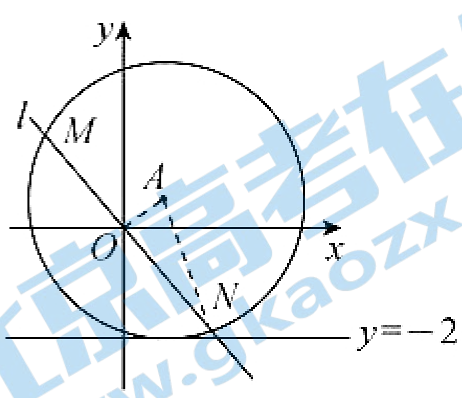
由圆的性质可得 $|OA|^2+|ON|^2=|AN|^2$，　　(2 分)

即 $x^2+y^2+4=(y+2)^2$，

化简得 $x^2=4y$.　　(3 分)

因为 O 与 A 不重合，所以 $y\neq0$，

所以 C 的方程为 $x^2=4y(y\neq0)$.　　(4 分)



(2)**证明**：①由题意可知 Q_1,Q_2 与 O 不重合.

如图，设 $P(t,-1)$，$Q_1(x_1,y_1)$，则 $x_1^2=4y_1$，

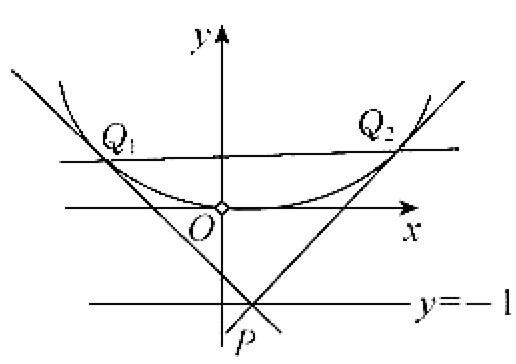
因为 $y'=\frac{x}{2}$，所以切线 PQ_1 的斜率为 $\frac{x_1}{2}$，故 $\frac{x_1}{2}=\frac{y_1+1}{x_1-t}$，　　(5 分)

整理得 $tx_1-2y_1+2=0$.　　(6 分)

设 $Q_2(x_2,y_2)$，同理可得 $tx_2-2y_2+2=0$.

所以直线 Q_1Q_2 的方程为 $tx-2y+2=0$，　　(7 分)

所以直线 Q_1Q_2 过定点 $(0,1)$.　　(8 分)



②因为直线 Q_1Q_2 的方程为 $tx-2y+2=0$，

由 $\begin{cases}tx-2y+2=0,\\x^2=4y,\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-2tx-4=0$，

所以 $x_1+x_2=2t,x_1x_2=-4$.　　(9 分)

又 $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=(x_1-t)(x_2-t)+(y_1+1)(y_2+1)$

$=x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+\left(\frac{tx_1+2}{2}+1\right)\left(\frac{tx_2+2}{2}+1\right)$

$=x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+\left(\frac{t}{2}x_1+2\right)\left(\frac{t}{2}x_2+2\right)$

$=x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+\frac{t^2}{4}x_1x_2+t(x_1+x_2)+4$

$=\left(1+\frac{t^2}{4}\right)x_1x_2+t^2+4$

$=0$，　　(11 分)

所以 $PQ_1\perp PQ_2$.　　(12 分)

22. **解**：(1)$\rho^2-2\rho\left(1+\sin\theta-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+1=0$，即 $\rho^2-2\rho(\cos\theta+\sin\theta)+1=0$.　　(2 分)

因为 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$，即 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.　　(4 分)

(2)设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PM}=(-x,-1-\sqrt{2}-y)$，$\overrightarrow{PN}=(-x,-1+\sqrt{2}-y)$，

所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=x^2+(-1-\sqrt{2}-y)(-1+\sqrt{2}-y)=0$，化简得 $x^2+(y+1)^2=2$，　　(6 分)

所以 C_2 的参数方程是 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\alpha,\\y=-1+\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数).　　(8 分)

因为 C_1 的圆心是 $(1,1)$，半径为 1，C_2 的圆心是 $(0,-1)$，半径为 $\sqrt{2}$，

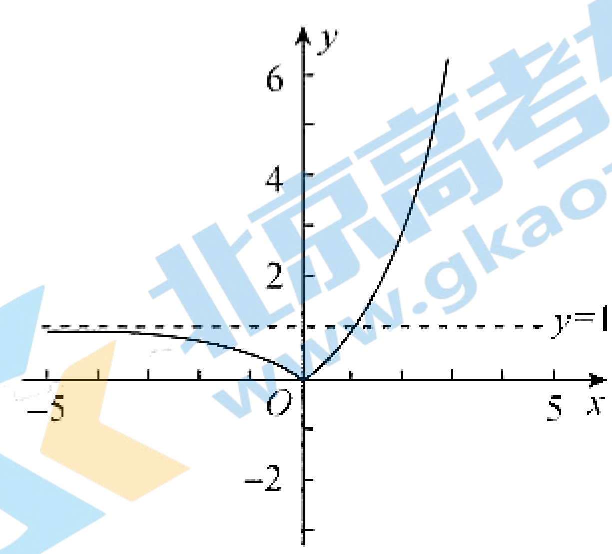
所以圆心距 $d=\sqrt{(-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$，

因为 $\sqrt{2}-1<\sqrt{5}<\sqrt{2}+1$，所以 C_1 与 C_2 相交.　　(10 分)

23. **解**：(1)$|2x-1|+|2x+1|\geqslant|(2x-1)-(2x+1)|=2$，当且仅当 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，等号成立，　　(2 分)

所以 $|4a-2|<2$，即 $-2<4a-2<2$，解得 $0<a<1$.　　(3 分)

画出 $y=|2^x-1|$ 的图象如图，由图象可知 $0<b<1$.



(5 分)

(2)$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=\frac{a+1-1}{a+1}+\frac{b+1-1}{b+1}$

$=2-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)=2-\frac{3}{(a+1)(b+1)}$　　(7 分)

$\leqslant2-\frac{3}{\left[\frac{(a+1)+(b+1)}{2}\right]^2}=\frac{2}{3}$，

当且仅当 $a+1=b+1$，即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，　　(9 分)

所以 $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$ 的最大值是 $\frac{2}{3}$.　　(10 分)