

2024 届普通高等学校招生全国统一考试  
青桐鸣大联考(高三)

数学

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \mid |x-1| < 2\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 + x - 2 > 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$                       B.  $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$   
C.  $\{x \mid -1 < x < 3\}$                         D.  $\{x \mid 1 < x < 3\}$

2. 已知  $f(x) = e^x + \sin x$ , 则  $f'(0) =$  ( )

- A. 1    B. -1    C. 2    D. 0

3. 命题  $p: \forall x > y > 0$ , 都有  $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ , 则 ( )

- A.  $p$  是假命题,  $\neg p: \forall x > y > 0, \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$                       B.  $p$  是真命题,  $\neg p: \exists x > y > 0, \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$   
C.  $p$  是假命题,  $\neg p: \exists x > y > 0, \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$                       D.  $p$  是真命题,  $\neg p: \forall 0 < x < y, \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

4. 已知函数  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin(\pi + x)$ , 则  $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$     B.  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$     C.  $\frac{1}{2}$     D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\sin B \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A, b^2 + c^2 = 2bc$ , 则  $\cos A =$  ( )

- A.  $-\frac{1}{2}$     B.  $\frac{1}{2}$     C.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 将函数  $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度后得到函数  $y = \sin \omega x$  的图象, 则正实数  $\omega$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{21}{4}$     B.  $\frac{15}{4}$     C.  $\frac{9}{4}$     D. 2

7. 某化工厂生产过程中产生的废气含有大量的有毒、有害物质,需经过滤后排放.过滤过程中废气中的有毒、有害物质的含量  $P$  (单位:mg/L)与时间  $t$  (单位:h)间的关系为  $P=P_0e^{-kt}$  ( $P_0, k$  为常数),若在过滤 2 h 后消除了 20% 的有毒、有害物质,则 5 h 后剩余的有毒、有害物质大约为原来有毒、有害物质的 ( )

(附:  $0.8^{2.5} \approx 0.57, 0.8^{2.2} \approx 0.61, 0.8^{0.4} \approx 0.91$ )

- A. 50%                      B. 57%                      C. 61%                      D. 91%

8. 已知正实数  $x_1, x_2$  满足  $x_1 + x_2 = 1$ , 则  $\frac{3x_1}{x_2} + \frac{1}{x_1x_2}$  的最小值为 ( )

- A. 4                          B.  $4\sqrt{3}$                       C. 6                          D. 7

二、选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的有 ( )

- A. “ $x > 2$ ”是“ $x > 3$ ”的充分不必要条件  
 B. “ $x > y$ ”是“ $x^3 > y^3$ ”的充要条件  
 C. “ $x > y$ ”是“ $x^2 > y^2$ ”的既不充分也不必要条件  
 D. “ $x > y$ ”是“ $2^x > 2^y$ ”的必要不充分条件

10. 已知  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos(\alpha + \beta) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 下列选项正确的有 ( )

- A.  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$                       B.  $\sin(\alpha + \beta) = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$   
 C.  $\cos \beta = -\frac{3}{5}$                       D.  $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{11\sqrt{5}}{25}$

11. 关于函数  $f(x) = |\cos x| + \frac{1}{\cos|x|}$ , 下列说法正确的有 ( )

- A.  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增  
 B.  $f(x)$  在区间  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递增  
 C. 函数  $f(x)$  的值域为  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$   
 D. 方程  $f(x) = 2$  有无穷多个解

12. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数,  $f'(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的导函数, 若  $f(2+x) = 4 - f(-x)$ ,  $2f'(1) = 2f(0) = f(1)$ , 则下列选项正确的有 ( )

- A.  $f(-1) = 2f'(1)$                       B.  $\sum_{i=1}^4 f(i) = \sum_{i=1}^4 f'(i)$   
 C.  $\sum_{i=1}^{50} f(i) = 101$                       D.  $\sum_{i=1}^{50} f'(i) = 25$

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知集合  $A = \{x \mid \frac{2x}{x-2} \leq 1\}, B = \{x \mid \log_2 x < a\}$ , 若  $B \subseteq A$ , 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

14. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $b = 3, \cos A = \frac{2}{3}$ , 则当  $C$  有唯一解时,  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

15. 已知  $0 < x_1 < x_2 < 2\pi$ ,  $\sin x_1 = \sin x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 则  $\cos(x_1 - x_2) =$  \_\_\_\_\_.

16. 已知不等式  $x^2 - ax + e^{-x} + x \ln x \geq 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

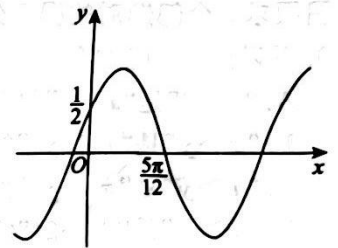
四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示.

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式;

(2) 设函数  $g(x) = f(x) + 2\cos^2 x - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ , 求  $g(x)$  的最小值及取得最小值时相应的  $x$  值.



18. (12 分)

已知  $f(x)$  为定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数,  $g(x)$  为定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 且  $f(x) + g(x) = e^{-x}$ .

(1) 求函数  $f(x)$  和  $g(x)$  的解析式;

(2) 关于  $x$  的不等式  $2g(x) + a(e^{-x} - 1) \geq 1$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

19. (12 分)

已知函数  $f(x) = 1 - x + a \ln x, a \in \mathbf{R}$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $a = \log_2 e$ , 证明: 当  $0 < x \leq 2$  时,  $(x-1)f(x) \geq 0$ .

20. (12 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $\frac{\sin B - \sin C}{\sin A} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin B + \sin C}$ .

(1) 求  $B$ ;

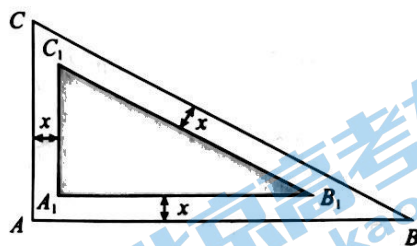
(2) 已知  $BD$  为  $AC$  边上的中线,  $\cos C = \frac{\sqrt{13}}{13}$ ,  $BD = \frac{\sqrt{37}}{2}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

21. (12 分)

如图, 某社区有一个直角三角形空地  $ABC$ , 其中  $\angle CAB = 90^\circ$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ ,  $AC = 20$  m, 现对其进行规划, 要求中间为三角形绿地公园 (如图阴影部分  $\text{Rt}\triangle A_1B_1C_1$ ), 周边是宽度均为  $x$  m 的公园健步道.

(1) 当  $x = 1$  时, 求  $\text{Rt}\triangle A_1B_1C_1$  的周长  $l$ ;

(2) 若在设计健步道时, 要保证绿地公园的面积不小于总面积的  $\frac{3}{4}$ , 求健步道宽度的最大值.



22. (12 分)

已知  $f(x) = e^x - 2\ln x$ ,  $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$  ( $x > 0$ ).

(1) 证明:  $g(x) > 0$ ;

(2) 若对  $\forall x > 0$ ,  $f(x) \geq 2\ln \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} - \cos |ax|$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.