2023北京一零九中高一12月月考

数　　学

一、单选题（10道共40分）

1.已知集合$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，则$A\cap B=$（　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{-1,3\}$　　D. $\{-1,0,1,2,3\}$

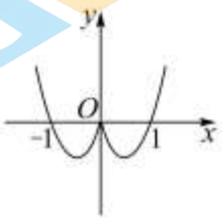
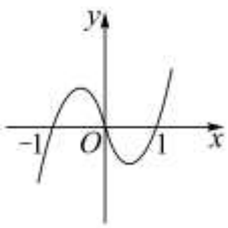
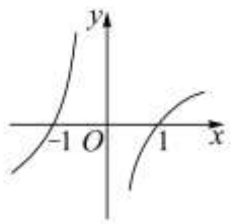
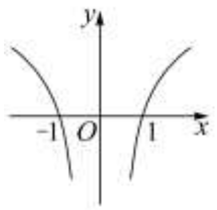
2. 不等式$x^2-x-2>0$的解集是（　）

A. $\{x\,|\,x<-2$或$x>-1\}$　　B. $\{x\,|\,x<-1$或$x>2\}$　　C. $\{x\,|\,-1<x<2\}$　　D. $\{x\,|\,-2<x<1\}$

3. 下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上单调递减的是（　）

A. $y=\sqrt{x}$　　B. $y=\ln x$　　C. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　D. $y=x^3$

4. 函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|}$的图象大致为（　）

A. 
B. 
C. 
D. 

5. 已知$a>0$，则$a+\dfrac{1}{a}+1$的最小值为（　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

6. 已知$a=\log_{\frac{1}{2}}3$，$b=\ln\dfrac{1}{2}$，$c=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，则（　）

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$

C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

7. 已知指数函数$f(x)=a^x$，将函数$f(x)$的图象上的每个点的横坐标不变，纵坐标扩大为原来的3倍，得到函数$g(x)$的图象，再将$g(x)$的图象向右平移2个单位长度，所得图象恰好与函数$f(x)$的图象重合，则a的值是（　）

A. ±3　　B. 3　　C. $\pm\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

8. 已知函数$f(x)=|\lg(x+1)|$，对a，b满足$-1<a<b$且$f(a)=f(b)$，则下面结论一定正确的是（　）

A. $a+b=0$　　B. $ab=1$　　C. $ab-a-b=0$　　D. $ab+a+b=0$

9. 记地球与太阳的平均距离为R，地球公转周期为T，万有引力常量为G，根据万有引力定律和牛顿运动

定律知：太阳的质量 $M=\dfrac{4\pi^2R^3}{GT^2}(\mathrm{kg})$.已知 $\lg 2\approx 0.3,\lg\pi\approx 0.5,\lg\dfrac{R^3}{GT^2}\approx 28.7$，由上面的数据可以计算出太阳的质量约为（　）

A. $2\times10^{30}\mathrm{kg}$　　B. $2\times10^{29}\mathrm{kg}$　　C. $3\times10^{30}\mathrm{kg}$　　D. $3\times10^{29}\mathrm{kg}$

10.已知实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{10},b_1,b_2,\cdots,b_{10}$ 互不相同，对 $\forall a_i(i=1,2,\cdots,10)$ 满足 $(a_i+b_1)(a_i+b_2)\cdots(a_i+b_{10})=2023$，则对 $\forall b_i(i=1,2,\cdots,10),(a_1+b_i)(a_2+b_i)\cdots(a_{10}+b_i)=$（　）

A. 2022　　B. -2022　　C. 2023　　D. -2023

二、填空题（5 题共 25 分）

11. 函数 $f(x)=\ln(1-2x)$ 的定义域是________.

12. $e^{\ln 2}+8^{\frac{1}{3}}+\lg 20-\lg 2=$______

13. 已知 $f(x+1)=2x+4$，且 $f(a)=8$，则 a 的值是______.

14. 已知函数 $y=f(x)$ 图象是连续不断的，并且是 **R** 上的增函数，有如下的对应值表

x	1	2	3	4
y	-0.24	1.21	3.79	10.28

① $f(0)<0$；② $f(x)$ 在 $(2,3)$ 上存在零点；

③ $f(x)$ 有且仅有 1 个零点；④ $g(x)=f(x)+x$ 可能无零点则正确的序号为________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x\ge a\\2^x-2,x<a\end{cases}$，

①当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为__________；

②若 $f(x)$ 有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是__________.

三、解答题（共 6 题共 85 分）

16. 已知集合 $A=\{x||x|<4\},B=\{x|2m-1\le x\le m+1\}$

（1）当 $m=1$ 时，求出 $A\cup B,A\cap B$；$\complement_{\mathrm{R}}B$；

（2）若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围．

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

（1）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并证明；

（2）判断函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的单调性，并用定义证明；

（3）直接写出函数 $f(x)$ 的值域．（无需写出推理过程）

18. 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(ax^2-2x-4)$， $a\in\mathrm{R}$

（1）当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若函数在 $(-\infty,3]$ 内为增函数，求实数 a 的取值范围.

19. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，若对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，均有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$.

（1）若 $f(1)>0$，证明： $f(2)>0$；

（2）若对 $\forall x\in(0,+\infty), f(x)>0$，证明： $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；

（3）若 $f(1)=0$，直接写出一个满足已知条件的 $f(x)$ 的解析式.

20. 已知函数 $f(x)=2^x+a\cdot 2^{-x}(a\neq 0)$.

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，求 a 的值；

（2）从以下三个条件中选择两个作为已知条件，记所有满足条件 a 的值构成集合 A，若 $A\neq\varnothing$，求 A.

条件①： $f(x)$ 是增函数；

条件②：对于 $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)>0$ 恒成立；

条件③： $\exists x_0\in[-1,1]$，使得 $f(x_0)\leq 4$.

21. 对于非空数集 A，若其最大元素为 M，最小元素为 m，则称集合 A 的幅值为 $T_A=M-m$，若集合 A 中只有一个元素，则 $T_A=0$.

（1）若 $A=\{2,3,4,5\}$，求 T_A；

（2）若 $A=\{1,2,3,\cdots,9\}, A_i=\{a_i,b_i,c_i\}\subseteq A, A_i\cap A_j=\varnothing(i,j=1,2,3,i\neq j)$， $A_1\cup A_2\cup A_3=A$，求 $T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}$ 的最大值，并写出取最大值时的一组 A_1,A_2,A_3；

（3）若集合 $\mathbf{N}^*$ 的非空真子集 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 两两元素个数均不相同，且 $T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}+\cdots+T_{A_n}=55$，求 n 的最大值.

参考答案

一、单选题（10 道共 40 分）

1.【答案】A

【分析】由交集的概念求解即可.

【详解】因为集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，

所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$，

故选：A.

2.【答案】B

【分析】直接解出不等式即可.

【详解】$x^2-x-2>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-1$，故解集为 $\{x|\ x<-1$ 或 $x>2\}$，

故选：B.

3.【答案】C

【分析】根据指数函数，对数函数，幂函数的单调性即可得到答案.

【详解】根据幂函数图像与性质可知，对 A 选项 $y=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，故 A 错误，

对 D 选项 $y=x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 单调性递增，故 D 错误，

根据指数函数图像与性质可知 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，故 C 正确，

根据对数函数图像与性质可知 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调性递增.

故选：C.

4.【答案】D

【分析】根据函数的奇偶性可排除 BC,根据单调性可判断 A，即可求解.

【详解】$f(x)=\frac{x^2-1}{|x|}$ 的定义域是 $\{x|x\neq 0\}$，关于原点对称，$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{|-x|}=\frac{x^2-1}{|x|}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，排除 B，C；

当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x}$，易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，排除 A.

故选：D

5.【答案】B

【分析】用基本不等式求解即可.

【详解】因为 $a>0$，

所以 $a+\frac{1}{a}+1\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}+1=3$，当且仅当 $a=\frac{1}{a}$ 即 $a=1$ 时取等号；

故选：B

6.【答案】B

【分析】利用对数函数的单调性可得 $-2<a<-1$，$-1<b<0$，又 $c=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}>0$，从而可得.

【详解】因为 $2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<3<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$，所以 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}<\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$，即 $-2<a<-1$，

因为 $e^{-1}<\frac{1}{2}<1$，所以 $\ln e^{-1}<\ln\frac{1}{2}<\ln 1$，即 $-1<b<0$，

而 $c=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}>0$，所以 $a<b<c$.

故选：B.

7.【答案】D

【分析】根据函数图像变换法则求出函数的解析式，建立方程关系进行求解即可

【详解】解：将函数 $f(x)$ 的图象上的每个点的横坐标不变，纵坐标扩大为原来的 3 倍，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=3a^x$，

再将 $g(x)$ 的图象向右平移 2 个单位长度，则得到的函数关系数为 $y=3a^{x-2}=\frac{3}{a^2}a^x$，

因为所得图象恰好与函数 $f(x)$ 的图象重合，

所以 $\frac{3}{a^2}=1$，$a^2=3$，解得 $a=\sqrt{3}$ 或 $a=-\sqrt{3}$（舍去），

故选：D

8.【答案】D

【分析】由对数函数的运算性质可知 $-\lg(a+1)=\lg(b+1)$ 移项化简即可得.

【详解】因为函数 $f(x)=|\lg(x+1)|$，对 a，b 满足 $-1<a<b$ 且 $f(a)=f(b)$，

所以 $-\lg(a+1)=\lg(b+1)$，

则 $\lg(a+1)+\lg(b+1)=0$

所以 $\lg\left[(a+1)(b+1)\right]=0$，

即 $(a+1)(b+1)=1$，

解得 $ab+a+b=0$

故选：D

9.【答案】A

【分析】利用对数运算性质计算即可.

【详解】因为 $\lg 2 \approx 0.3, \lg \pi \approx 0.5, \lg \frac{R^3}{GT^2} \approx 28.7$，

所以由 $M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$ 得：

$$\lg M = \lg\left(\frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}\right) = \lg 4 + \lg \pi^2 + \lg \frac{R^3}{GT^2}$$

$$= 2\lg 2 + 2\lg \pi + \lg \frac{R^3}{GT^2} \approx 2\times 0.3 + 2\times 0.5 + 28.7 = 30.3,$$

即 $\lg M \approx 30.3 \Rightarrow M \approx 10^{30.3} = 10^{30+0.3} = 10^{0.3}\times 10^{30}$，

又 $\lg 2 \approx 0.3 \Rightarrow 10^{0.3} \approx 2$，

所以 $M \approx 2\times 10^{30}\,\text{kg}$.

故选：A.

10. 【答案】D

【分析】根据代数基本定理进行求解即可..

【详解】因为 $\forall a_i (i=1,2,\cdots,10)$ 满足 $(a_i+b_1)(a_i+b_2)\cdots(a_i+b_{10}) = 2023$，

所以 $a_i (i=1,2,\cdots,10)$ 可以看成方程 $(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_{10}) - 2023 = 0$ 的10个不等实根，根据代数基本定理可知：对于任意实数 x 都有以下恒等式，

$$(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_{10}) - 2023 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_{10}),$$

令 $x = -b_1, -b_2, -b_3, \cdots, -b_{10}$， 于是有

$$-2023 = (-b_1-a_1)(-b_1-a_2)(-b_1-a_3)\cdots(-b_1-a_{10}),$$

$$\Rightarrow (b_1+a_1)(b_1+a_2)(b_1+a_3)\cdots(b_1+a_{10}) = -2023,$$

$$-2023 = (-b_2-a_1)(-b_2-a_2)(-b_2-a_3)\cdots(-b_2-a_{10}),$$

$$\Rightarrow (b_2+a_1)(b_2+a_2)(b_2+a_3)\cdots(b_2+a_{10}) = -2023$$

$$-2023 = (-b_3-a_1)(-b_3-a_2)(-b_3-a_3)\cdots(-b_3-a_{10})$$

$$\Rightarrow (b_3+a_1)(b_3+a_2)(b_3+a_3)\cdots(b_3+a_{10}) = -2023, \quad \cdots$$

$$-2023 = (-b_{10}-a_1)(-b_{10}-a_2)(-b_{10}-a_3)\cdots(-b_{10}-a_{10}),$$

$$\Rightarrow (b_{10}+a_1)(b_{10}+a_2)(b_{10}+a_3)\cdots(b_{10}+a_{10}) = -2023,$$

所以 $\forall b_i (i=1,2,\cdots,10), (a_1+b_i)(a_2+b_i)\cdots(a_{10}+b_i) = -2023$，

故选：D

【点睛】关键点睛：根据代数基本定理是解题的关键.

二、填空题（5 题共 25 分）

11.【答案】$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$

【分析】根据对数真数大于零可构造不等式求得结果.

【详解】由$1-2x>0$得：$x<\dfrac{1}{2}$，$\therefore f\quad x$ 的定义域为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$.

故答案为：$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$.

12.【答案】5

【分析】根据指数和对数的运算公式化简得结果即可.

【详解】根据指数和对数的运算公式得到：原式$=2+2+\lg10=5$.

故答案为 5.

【点睛】这个题目考查了对数和指数的运算公式的应用，属于基础题.

13.【答案】3

【分析】根据凑配法求出 $f\left(x\right)$ 解析式，代入即可得出答案.

【详解】由已知可得，$f\left(x+1\right)=2x+4=2\left(x+1\right)+2$，

所以，$f\left(x\right)=2x+2$.

又 $f\left(a\right)=8$，所以有 $2a+2=8$，

解得 $a=3$.

故答案为：3.

14.【答案】①③

【分析】根据函数的单调性，结合表格中的数据和利用零点存在性定理判断.

【详解】对于①，因为函数 $y=f\left(x\right)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $f\left(0\right)<f\left(1\right)=-0.24<0$，故①正确；

对于②，因为函数 $y=f\left(x\right)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以当 $2<x<3$ 时，$f(x)>f(2)=1.21>0$，故②错误；

对于③，因为函数 $y=f\left(x\right)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$f(1)<0$ 且 $f(2)>0$，即 $f(1)\cdot f(2)<0$，所以函数 $f(x)$ 有且仅有一个在区间 $(1,2)$ 的零点，故③正确；

对于④，因为函数 $g(x)=f(x)+x$ 连续，且 $g\quad 0\quad = f\quad 0\quad <0$，$g\left(1\right)=f\left(1\right)+1>0$ 即 $g(0)g(1)<0$，所以函数 $g(x)=f(x)+x$ 在区间 $(0,1)$ 上一定存在零点，故④错误，

故答案为：①③

15.【答案】 ①. -1； ②. $a\le0$ 或 $1<a\le2$.

【分析】①根据函数式分段确定函数的单调性后可得最小值；

②结合函数 $y=x^2-2x$ 和 $y=2^x-2$ 的图象，根据分段函数的定义可得参数范围.

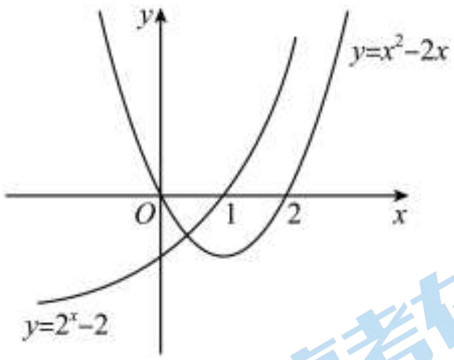
【详解】① $a=1$，$x\ge1$ 时，$f(x)=x^2-2x$ 是增函数，$f(x)_{\min}=f(1)=-1$，

$0<x<1$时，$f(x)=2^x-2$是增函数，因此$f(x)>2^0-2=-1$，

所以$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)$的最小值是-1；

②作出函数$y=x^2-2x$和$y=2^x-2$的图象，它们与x轴共有三个交点$(0,0)$，$(1,0)$，$(2,0)$，

由图象知$f(x)$有2个零点，则$a\le 0$或$1<a\le 2$.



故答案为：-1；$a\le 0$或$1<a\le 2$.

三、解答题（共6题共85分）

16.【答案】（1）答案见解析.

（2）$m\le -5$或$m>2$.

【分析】（1）根据集合运算法则计算；

（2）根据集合的包含关系列不等式求解.

【小问1详解】

$A=\{x||x|<4\}=\{x|-4<x<4\}$，$m=1$时，$B=\{x|1\le x\le 2\}$，

$A\cup B=\{x|-4<x<4\}$，$A\cap B=\{x|1\le x\le 2\}$，$\complement_{R}B=\{x|x<1$或$x>2\}$；

【小问2详解】

$B\subseteq A$，

$2m-1>m+1$，即$m>2$时，$B=\varnothing\subseteq A$，

$m\le 2$时，$m+1\le -4$或$2m-1\ge 4$，解得$m\le -5$或$m\ge\dfrac{5}{2}$，所以$m\le -5$，

综上，$m\le -5$或$m>2$.

17.【答案】（1）奇函数，证明见解析；

（2）单调递减，证明见解析

（3）$[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$

【分析】（1）根据函数奇偶性的定义判断与证明即可；

（2）根据单调性的定义，取值、作差（变形）、定号、下结论等步骤进行证明即可；

（3）分$x>0$和$x<0$讨论，运用基本不等式可求得值域.

【小问1详解】

$f(x)$ 为奇函数，理由如下：

函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$，定义域为R，所以 $x\in\mathbf{R}$，$-x\in\mathrm{R}$

则 $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x}{x^2+1}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

【小问 2 详解】

$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，证明如下：

证明：任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}=\frac{x_1x_2^2+x_1-x_2x_1^2-x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{(x_1x_2-1)(x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)},$$

因为 $x_2>x_1>1$，所以 $x_2-x_1>0,x_1x_2-1>0$

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

故函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数.

【小问 3 详解】

因为 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，所以 $f(0)=0$.

当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，$f(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+x}\le\dfrac{1}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}$,

当且仅当 $\dfrac{1}{x}=x$，即 $x=1$ 时，等号成立，

所以 $0<f(x)\le\dfrac{1}{2}$.

当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，$f(x)=\dfrac{-1}{\frac{1}{(-x)}+(-x)}\ge\dfrac{-1}{2\sqrt{(-x)\cdot\frac{1}{(-x)}}}=-\dfrac{1}{2}$,

当且仅当 $\dfrac{1}{-x}=(-x)$，即 $x=-1$ 时，等号成立，

所以 $-\dfrac{1}{2}\le f(x)<0$.

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$.

18.【答案】（1）$f(x)$ 的递增区间是 $(-\infty,-1)$，递减区间是 $(2,+\infty)$；

（2）$\varnothing$.

【分析】（1）把 $a=2$ 代入，求出函数 $f(x)$ 的定义域，再利用复合函数单调性求出单调区间.

（2）利用给定的递增区间结合对数函数的定义确定 $a>\frac{10}{9}$，再利用二次函数单调性求出 a 的范围.

【小问 1 详解】

当 $a=2$ 时，函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-2x-4)$，由 $2x^2-2x-4>0$，得 $x<-1$ 或 $x>2$，

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$，令 $u=2x^2-2x-4$，

显然函数 $u=2x^2-2x-4$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，而 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)$ 的递增区间是 $(-\infty,-1)$，递减区间是 $(2,+\infty)$.

【小问 2 详解】

依题意，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 上有意义，必有 $a\times3^2-2\times3-4>0$，解得 $a>\frac{10}{9}$，

令 $t=ax^2-2x-4$，显然函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

而函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 内为增函数，则二次函数 $t=ax^2-2x-4$ 在 $(-\infty,3]$ 上单调递减，

且 $\forall x\in(-\infty,3]$，$ax^2-2x-4>0$ 恒成立，因此 $\frac{1}{a}\geq3$，且 $a>\frac{10}{9}$，无解，

所以实数 a 的取值范围是 $\varnothing$.

19.【答案】（1）证明过程见解析

（2）证明过程见解析　（3）$f(x)=e^x-e$，$x\in(0,+\infty)$（答案不唯一）

【分析】（1）赋值法得到 $f(2)>2f(1)>0$；

（2）赋值法，令 $s=x_2\in(0,+\infty),t=x_1-x_2$，且 $x_1>x_2$，从而得到 $f(x_1)-f(x_2)>f(x_1-x_2)>0$，证明出函数的单调性；

（3）从任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，均有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$，可得到函数增长速度越来越快，故下凸函数符合要求，构造出符合要求的函数，并进行证明

【小问 1 详解】

令 $s=t=1$，则 $f(2)>f(1)+f(1)=2f(1)$，

因为 $f(1)>0$，所以 $f(2)>2f(1)>0$；

【小问 2 详解】

令 $s=x_2\in(0,+\infty),t=x_1-x_2$，且 $x_1>x_2$，则 $t=x_1-x_2\in(0,+\infty)$，

所以 $f(x_2+x_1-x_2)>f(x_2)+f(x_1-x_2)$，

故 $f(x_1)-f(x_2)>f(x_1-x_2)$，

因为对 $\forall x\in(0,+\infty),f(x)>0$，

所以 $f\left(x_1-x_2\right)>0$，

故 $f(x_1)-f(x_2)>f(x_1-x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；

【小问 3 详解】

构造 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，满足 $f\left(1\right)=0$，

且满足对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，$f(s+t)>f(s)+f(t)$，理由如下：

$f(s+t)-f(s)-f(t)=\mathrm{e}^{s+t}-\mathrm{e}-\mathrm{e}^s+\mathrm{e}-\mathrm{e}^t+\mathrm{e}=\mathrm{e}^{s+t}-\mathrm{e}^s-\mathrm{e}^t+\mathrm{e}=\left(\mathrm{e}^s-1\right)\left(\mathrm{e}^t-1\right)+\mathrm{e}-1$，

因为 $s,t\in(0,+\infty)$，故 $\mathrm{e}^s-1>0,\mathrm{e}^t-1>0$，$f(s+t)-f(s)-f(t)=\left(\mathrm{e}^s-1\right)\left(\mathrm{e}^t-1\right)+\mathrm{e}-1>0$，

故对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，$f(s+t)>f(s)+f(t)$.

20.【答案】（1）$a=1$；

（2）选①②，不存在 A；选①③，$A=(-\infty,0)$；选②③，$A=(0,4]$.

【分析】（1）由偶函数的定义求解；

（2）选①②，$a<0$ 时，由复合函数单调性得 $f(x)$ 是增函数，$a>0$ 时，由单调性的定义得函数的单调性，然后在 $a<0$ 时，由 $f(x)=0$ 有解，说明不满足② a 不存在；选①③，同选①②，由单调性得 $a<0$，然后则函数的最大值不大于 4 得 a 的范围，综合后得结论；选②③，先确定 $f(x)>0$ 恒成立时 a 的范围，再换元确定新函数的单调性得最大值的可能值，从而可得参数范围.

【小问 1 详解】

$f(x)$ 是偶函数，则 $f\left(-x\right)=2^{-x}+a\cdot2^x=f\left(x\right)=2^x+a\cdot2^{-x}$，

$(a-1)(2^x-2^{-x})=0$ 恒成立，$\therefore a-1=0$，即 $a=1$；

【小问 2 详解】

若选①②，$f(x)=2^x+\dfrac{a}{2^x}$（$a\neq0$），

若 $a<0$，则 $f(x)$ 是增函数，由 $2^x+\dfrac{a}{2^x}=0$ 得 $x=\log_4(-a)$，因此 $f(x)>0$ 不恒成立，不合题意，

若 $a>0$，设 $t=2^x$，则 $t>0$，

$f(x)=g(t)=t+\dfrac{a}{t}>0$ 恒成立，设 $0<t_1<t_2$，则 $g(t_1)-g(t_2)=t_1+\dfrac{a}{t_1}-t_2-\dfrac{a}{t_2}=\dfrac{(t_1-t_2)(t_1t_2-a)}{t_1t_2}$，

$t_1-t_2<0$，

当 $0<t_1<t_2<\sqrt{a}$ 时，$t_1t_2-a<0$，$g(t_1)-g(t_2)>0$，$g(t_1)>g(t_2)$，$g(t)$ 是减函数，

$\sqrt{a}<t_1<t_2$ 时，$t_1t_2-a>0$，$g(t_1)-g(t_2)<0$，$g(t_1)<g(t_2)$，$g(t)$ 是增函数，

又 $t=2^x$ 是增函数，因此 $f(x)$ 在定义域内不是增函数，不合题意.

故不存在 a 满足题意；

若选①③，

若 $a<0$，则 $f(x)=2^x+\dfrac{a}{2^x}$ 是增函数，

若 $a>0$，设 $t=2^x$，则 $t>0$，

$f(x)=g(t)=t+\dfrac{a}{t}>0$ 恒成立，设 $0<t_1<t_2$，则 $g(t_1)-g(t_2)=t_1+\dfrac{a}{t_1}-t_2-\dfrac{a}{t_2}=\dfrac{(t_1-t_2)(t_1t_2-a)}{t_1t_2}$，

$t_1-t_2<0$，

当 $0<t_1<t_2<\sqrt{a}$ 时，$t_1t_2-a<0$，$g(t_1)-g(t_2)>0$，$g(t_1)>g(t_2)$，$g(t)$ 是减函数，

$\sqrt{a}<t_1<t_2$ 时，$t_1t_2-a>0$，$g(t_1)-g(t_2)<0$，$g(t_1)<g(t_2)$，$g(t)$ 是增函数，

又 $t=2^x$ 是增函数，因此 $f(x)$ 在定义域内不是增函数，不合题意.

故不存在 a 满足题意；

要满足①，则 $a<0$，

所以 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)_{\min}=f(-1)=\dfrac{1}{2}+2a$，由 $\dfrac{1}{2}+2a\le 4$ 得 $a\le\dfrac{7}{4}$，

综上，$a<0$；

所以 $A=(-\infty,0)$.

若选②③，

若 $a<0$，则由 $f(x)=2^x+\dfrac{a}{2^x}=0\Leftrightarrow x=\log_4(-a)$，$f(x)>0$ 不恒成立，

只有 $a>0$ 时，$f(x)=2^x+\dfrac{a}{2^x}>0$ 恒成立，设 $t=2^x$，则 $t>0$，

又 $a>0$ 时，$x\in[-1,1]\Rightarrow t=2^x\in[\dfrac{1}{2},2]$，$f(x)=g(t)=t+\dfrac{a}{t}$，

$f(x)=g(t)=t+\dfrac{a}{t}>0$ 恒成立，设 $0<t_1<t_2$，则 $g(t_1)-g(t_2)=t_1+\dfrac{a}{t_1}-t_2-\dfrac{a}{t_2}=\dfrac{(t_1-t_2)(t_1t_2-a)}{t_1t_2}$，

$t_1-t_2<0$，

当 $0<t_1<t_2<\sqrt{a}$ 时，$t_1t_2-a<0$，$g(t_1)-g(t_2)>0$，$g(t_1)>g(t_2)$，$g(t)$ 是减函数，

$\sqrt{a}<t_1<t_2$ 时，$t_1t_2-a>0$，$g(t_1)-g(t_2)<0$，$g(t_1)<g(t_2)$，$g(t)$ 是增函数，

要满足③，若 $\sqrt{a}\le\dfrac{1}{2}$ 即 $a\le\dfrac{1}{4}$ 时，$g(x)_{\min}=g(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}+2a\le 4$，所以 $0<a\le\dfrac{1}{4}$；

若 $\sqrt{a}\ge 2$ 即 $a\ge 4$ 时，$g(x)_{\min}=g(2)=2+\dfrac{a}{2}\le 4$，所以 $a=4$；

若 $\dfrac{1}{2}<\sqrt{a}<2$，即 $\dfrac{1}{4}<a<4$ 时，$g(x)_{\min}=g(\sqrt{a})=2\sqrt{a}\le 4$，所以 $\dfrac{1}{4}<a<4$；

综上$0<a\le 4$，

所以$A=(0,4]$.

21.【答案】(1) $T_A=3$

(2) $T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}$的最大值为18，$A_1=\{1,9,4\},A_2=\{2,8,5\},A_3=\{3,7,6\}$

(3) n的最大值为11

【分析】(1) 根据新定义即可求出;

(2) 由$A_i=\{a_i,b_i,c_i\}\subseteq A,A_i\cap A_j=\varnothing(i,j=1,2,3,i\ne j)$，$A_1\cup A_2\cup A_3=A$且要使得$T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}$取到最大，则只需$T_{A_1},T_{A_2},T_{A_3}$中元素不同且7,8,9分布在3个集合中，4,5,6,分布在3个集合中，1,2,3分布在3个集合中这样差值才会最大，总体才会有最大值.

(3) 要n的值最大，则集合的幅值最小，且$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$是集合$\mathbf{N}^*$的两两元素个数均不相同的非空真子集，故对集合$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$中元素分析列出方程解出即可.

【小问1详解】

由集合$A=\{2,3,4,5\}$知，$M=5,m=2$，

所以$T_A=M-m=5-2=3$.

【小问2详解】

因为$A=\{1,2,3,\cdots,9\},A_i=\{a_i,b_i,c_i\}\subseteq A,A_i\cap A_j=\varnothing(i,j=1,2,3,i\ne j)$，$A_1\cup A_2\cup A_3=A$，

由此可知集合A_1,A_2,A_3中各有3个元素，且完全不相同，

根据定义要让$T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}$取到最大值，

则只需T_{A_1},T_{A_2},T_{A_3}中元素不同且7,8,9分布在3个集合中，

4,5,6,分布在3个集合中，1,2,3分布在3个集合中

这样差值才会最大，总体才会有最大值，所以$T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}$的最大值为$7+8+9-1-2-3=18$，

所以有一组$A_1=\{1,9,4\},A_2=\{2,8,5\},A_3=\{3,7,6\}$满足题意，

【小问3详解】

要n的值最大，则集合的幅值要尽量最小，故幅值最小从0开始，接下来为$1,2,\cdots$，

因为$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$是集合$\mathbf{N}^*$的两两元素个数均不相同的非空真子集，

不妨设A_1是集合$\mathbf{N}^*$中只有一个元素的非空真子集，此时$T_{A_1}=0$，例如$A_1=\{1\}$，

则A_2是集合$\mathbf{N}^*$中有两个元素的非空真子集，且$T_{A_2}=1$，例如$A_2=\{1,2\}$，

同理A_3是集合$\mathbf{N}^*$中有三个元素的非空真子集，且$T_{A_3}=2$，例如$A_3=\{1,2,3\}$，

……

A_n是集合$\mathbf{N}^*$中有n个元素的非空真子集，且$T_{A_n}=n-1$，例如$A_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$，

所以$T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}+\cdots+T_{A_n}=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}=55$，

解得$n=11$或$n=-10$（舍去），

所以n的最大值为11.

【点睛】方法点睛:新定义题型的特点是:通过给出一个新概念，或约定一种新运算，或给出几个新模型来创设全新的问题情景，要求考生在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的:遇到新定义问题，应耐心读题，分析新定义的特点，弄清新定义的性质，按新定义的要求，“照章办事”，逐条分析、验证、运算，使问题得以解决.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！