

2023 届高三 8 月测试一 数学试题

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题 共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 若 $P = \{x | x < 1\}$, $Q = \{x | x > -1\}$, 则()

- A. $P \subseteq Q$ B. $Q \subseteq P$ C. $C_R P \subseteq Q$ D. $Q \subseteq C_R P$

2. 若 $z = 1 + i$, 则 $|z^2 - 2z| = ()$

- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

3. 圆心为 $(2, 1)$ 且和 x 轴相切的圆的方程是()

- A. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ B. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$
C. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ D. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$

4. 下面四个函数中既为奇函数，又在定义域上单调递减的是()

- A. $y = x^3$ B. $y = \frac{1}{x}$ C. $y = \sqrt{1 - x}$ D. $y = 2^{-x} - 2^x$

5. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则该函数的图像()

- A. 关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称 B. 关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
C. 关于点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 对称 D. 关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称

6. 设 a, b, c, d 是非零实数，则“ $ad = bc$ ”是“ a, b, c, d 成等比数列”的()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

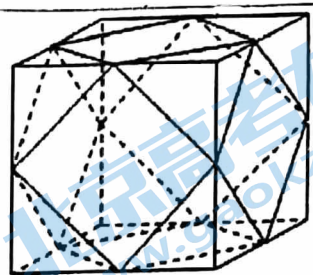
7. 1614 年纳皮尔在研究天文学的过程中为了简化计算而发明对数；1637 年笛卡尔开始使用指数运算；1770 年，欧拉发现了指数与对数的互逆关系，指出：对数源于指数，对数的发明先于指数，称为数学史上的珍闻。若 $2^x = \frac{5}{2}$, $\lg 2 = 0.3010$, 则 x 的值约为()

- A. 1.322 B. 1.410 C. 1.507 D. 1.669

8. $(\frac{1}{x} - x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数是()

- A. -210 B. -120 C. 120 D. 210

9. 水晶是一种石英结晶体矿物, 因其硬度、色泽、光学性质、稀缺性等, 常被人们制作成饰品. 如图所示, 现有棱长为 2 cm 的正方体水晶一块, 将其裁去八个相同的四面体, 打磨成某饰品, 则该饰品的表面积为(单位: cm^2)()



- A. $12+4\sqrt{3}$ B. $16+4\sqrt{3}$ C. $12+3\sqrt{3}$ D. $16+3\sqrt{3}$

10. 在直角三角形 ABC 中, $A=90^\circ$, $B=60^\circ$, $AB=2$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = ()$

- A. -4 B. 4 C. -8 D. 8

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题 共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \leq 1, \\ \log_3 x + 3^a, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(f(1)) > 4$, 则实数 a 的取值范围_____

12. 以双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的焦点为顶点, 顶点为焦点的椭圆方程为_____

13. 写出一个最小正周期为 1 的偶函数 $f(x) =$ _____

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{2\pi}{3}$, $AB=1$, $BC=2$, 则 AC 的长为_____

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2^{-x}, & x > 0. \end{cases}$ 则满足 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$ 的 x 的取值范围是_____.

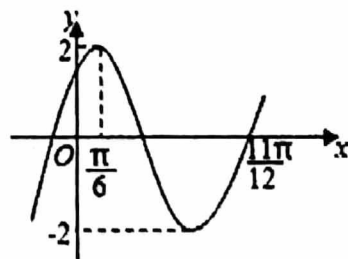
三、解答题 共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

16. (本小题 13 分)

函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 为常数, $A > 0$, $\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$) 的图象如图所示。

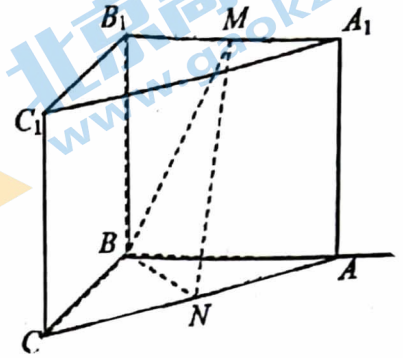
(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(II) 求 $f(-\frac{5\pi}{3})$ 的值。



17. (本小题 14 分)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BCC_1B_1 为正方形, 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,
 $AB=BC=2$, M, N 分别为 A_1B_1 , AC 的中点.



(I) 求证: $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(II) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值.

条件①: $AB \perp MN$;

条件②: $BM = MN$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分。

18. (本小题 13 分)

甲、乙两人进行射击比赛, 各射击 4 局, 每局射击 10 次, 射击命中目标得 1 分, 未命中目标得 0 分. 两人 4 局的得分情况如下:

甲	6	6	9	9
乙	7	9	x	y

(I) 若从甲的 4 局比赛中, 随机选取 2 局, 求这 2 局的得分恰好相等的概率;

(II) 如果 $x = y = 7$, 从甲、乙两人的 4 局比赛中随机各选取 1 局, 记这 2 局的得分和为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(III) 在 4 局比赛中, 若甲、乙两人的平均得分相同, 且乙的发挥更稳定, 写出 x 的所有可能取值. (结论不要求证明)

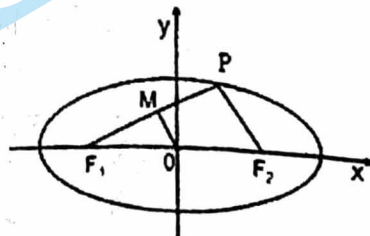
19. (本小题 15 分)

已知 P 为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上任意一点, F_1, F_2 为左、右焦点, M 为 PF_1 中

点. 如图所示: 若 $|OM| + \frac{1}{2}|PF_1| = 2$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求椭圆 E 的标准方程;

(II) 已知直线 l 经过 $(-1, \frac{1}{2})$ 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 与椭圆交于 A, B 两点, 求弦长 $|AB|$ 的值.



20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 求证: 曲线 $y = f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有且只有一条斜率为 2 的切线.

21. (本小题 15 分)

已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2)$ 具有性质 P : 对任意的 $i, j (1 \leq i \leq j \leq n)$,

a_i, a_j 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A .

(I) 分别判断数集 $\{1, 3, 4\}$ 与 $\{1, 2, 3, 6\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;

(II) 证明: $a_1 = 1$, 且 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} = a_n$;

(III) 证明: 当 $n = 5$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯