通州区高三年级一模考试

数学试卷

2020 年 4 月

考生须知	1.本试卷共 4 页，满分 150 分．考试时长 120 分钟．
	2.本试卷分为第一部分和第二部分两部分．
	3.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．
	4.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|0<x\leq 2\}$，$B=\{x|1<x<3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|0<x<3\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$　　C. $\{x|0<x\leq 1\}$　　D. $\{x|1<x\leq 2\}$

2. 已知复数 $z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$ （i 是虚数单位），则 $|z|=$

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. 3

3. 函数 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$ 的最小正周期是（　　）

A．$\dfrac{\pi}{2}$　　B．π　　C．2π　　D．4π

4. 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(1)=2$，下列一定在函数 $f(x)$ 图象上的点是

A. （1，-2）　　B. （-1，-2）　　C. （-1，2）　　D. （2，1）

5. 已知 a，3，b，9，c 成等比数列，且 $a>0$，则 $\log_3 b-\log_3 c$ 等于

A. -1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

6. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点与双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点重合，则 $p=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

7. 在 $(2x-\dfrac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项是

A. -160　　B. -20　　C. 20　　D. 160

8. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{3}),\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{3}))$．

则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

A.1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 与 α 有关

9. 若 $a>0$，$b>0$，则“$ab\geqslant1$”是“$a+b\geqslant2$”的

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　　　　D．既不充分也不必要条件

10. 某同学在数学探究活动中确定研究主题是“$a^n(a>1,n\in\mathbf{N}^*)$是几位数”，他以 $2^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 为例做研究，得出相应的结论，其研究过程及部分研究数据如下表：

$N=2^n(n>0)$	$\lg N$	N 的位数
2^1	$\lg 2$	一位数
2^2	$\lg 4$	一位数
2^3	$\lg 8$	一位数
2^4	$1+\lg 1.6$	两位数
2^5	$1+\lg 3.2$	两位数
2^6	$1+\lg 6.4$	两位数
2^7	$2+\lg 1.28$	三位数
2^8	$2+\lg 2.56$	三位数
2^9	$2+\lg 5.12$	三位数
2^{10}	$3+\lg 1.024$	四位数
……	……	……

试用该同学的研究结论判断 4^{50} 是几位数（参考数据 $\lg 2\approx0.3010$）

A. 101　　B. 50　　C. 31　　D. 30

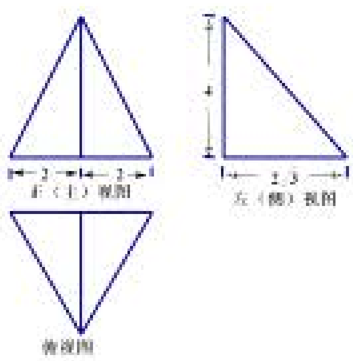
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,m)$，其中 $m\in\mathbf{R}$．若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，则 m 等于 ________.

12. 圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $x+\sqrt{3}y+1=0$ 的距离为________.

13.某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积等于______.



14. 中国古代数学著作《孙子算经》中有这样一道算术题：“今有

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

物不知其数，三三数之余二，五五数之余三，问物几何？”，将上述问题的所有正整数答案从小到大组成一个数列 $\{a_n\}$，则 $a_1=$______；$a_n=$______．（注：三三数之余二是指此数被3除余2，例如“5”）

15.给出下列四个函数，① $y=x^2+1$；② $y=|x+1|+|x+2|$；③ $y=2^x+1$；④ $y=x^2+\cos x$ 其中值域为 $[1,+\infty)$ 的函数的序号是______．

三、解答题：本大题共6小题，共85分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.（本小题14分）已知△ABC，满足 $a=\sqrt{7}$，$b=2$，______，判断△ABC 的面积 $S>2$ 是否成立？说明理由．

从① $A=\dfrac{\pi}{3}$，② $\cos B=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ 这两个条件中任选一个，补充到上面问题条件中的空格处并做答．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

17．（本小题 14 分）2019 年 1 月 1 日，我国开始施行《个人所得税专项附加扣除操作办法》，附加扣除的专项包括子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息、住房租金、赡养老人．某单位有老年员工 140 人，中年员工 180 人，青年员工 80 人，现采用分层抽样的方法，从该单位员工中抽取 20 人，调查享受个人所得税专项附加扣除的情况，并按照员工类别进行各专项人数汇总，数据统计如下：

专项 员工　人数	子女教育	继续教育	大病医疗	住房贷款利息	住房租金	赡养老人
老员工	4	0	2	2	0	3
中年员工	8	2	1	5	1	8
青年员工	1	2	0	1	2	1

（Ⅰ）在抽取的 20 人中，老年员工、中年员工、青年员工各有多少人；

（Ⅱ）从上表享受住房贷款利息专项扣除的员工中随机选取 2 人，记 X 为选出的中年员工的人数，求 X 的分布列和数学期望．

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

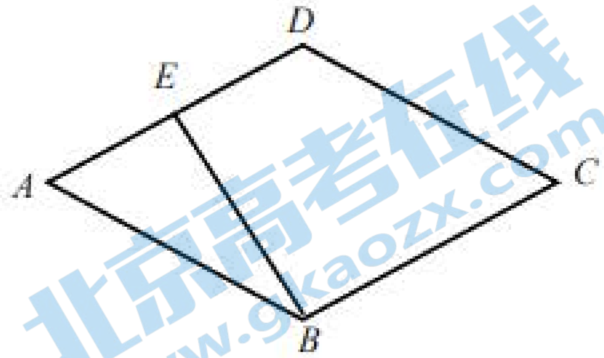
18. （本小题 15 分）

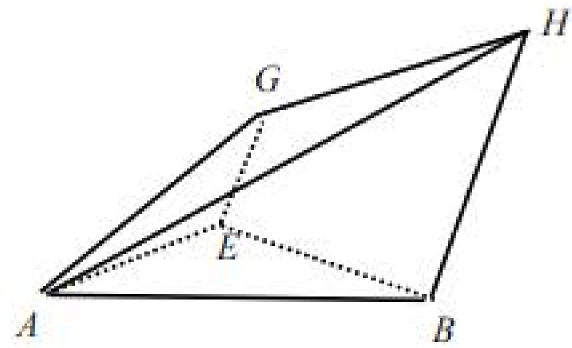
如图，已知四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle A=60^0$，取 AD 中点为 E.现将四边形 $EBCD$ 沿 BE 折起至 $EBHG$，使得 $\angle AEG=90^\circ$.

(Ⅰ)求证：$AE\perp$ 平面 $EBHG$；

(Ⅱ)求二面角 A-GH-B 的余弦值；

(Ⅲ)若点 F 满足 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}$，当 EF // 平面 AGH 时，求 λ 的值.





19.（本小题 14 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，点 $A(0,1)$在椭圆 C 上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，过原点的直线（不与 x 轴垂直）与椭圆 C 交于 M、N 两点，直线 AM、AN 与 x 轴分别交于点 E、F. 问：y 轴上是否存在定点 G，使得$\angle OGE=\angle OFG$？若存在，求点 G 的坐标；若不存在，说明理由.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

20.（本小题 14 分）已知函数 $f(x)=(x-a)e^{x}+x+a$，设 $g(x)=f'(x)$.

（Ⅰ）求 $g(x)$ 的极小值；

（Ⅱ）若 $f(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

21.（本小题 14 分）

用$[x]$表示一个小于或等于 x 的最大整数.如：$[2]=2$，$[4.1]=4$，$[-3.1]=-4$.已知实数列 $a_0,a_1,\cdots$ 对于所有非负整数 i 满足 $a_{i+1}=[a_i]\cdot(a_i-[a_i])$，其中 a_0 是任意一个非零实数.

(Ⅰ) 若 $a_0=-2.6$，写出 a_1,a_2,a_3；

(Ⅱ)若 $a_0>0$，求数列$\{[a_i]\}$的最小值；

(Ⅲ)证明：存在非负整数 k，使得当 $i\ge k$ 时，$a_i=a_{i+2}$.

北京高考在线 www.gkaozx.com

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

通州区高三年级一模考试

数学试卷参考答案及评分标准 2020年4月

一、选择题：（每小题4分，共40分.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	B	B	A	D	A	B	A	C

二、填空题（每道小题5分，共25分）

11．6； 12．1； 13．$\frac{16\sqrt{3}}{3}$； 14．8；15n-7；（第一空2分，第二空3分）

15．①②④（答对一个给1分，答对两个给3分，全对给5分，出现一个错误不得分.）

三、解答题：本大题共6小题，共85分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．（本小题14分）

解：选①，$\triangle ABC$ 的面积 $S>2$ 成立，理由如下：

当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，$\cos A=\frac{1}{2}=\frac{4+c^2-7}{2\cdot 2c}$， ……………4分

所以 $c^2-2c-3=0$，所以 $c=3$， ……………6分

则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times \sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ……………10分

因为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}=\sqrt{\frac{27}{4}}>\sqrt{4}=2$， ……………12分

所以 $S>2$ 成立. ……………14分

选②，$\triangle ABC$ 的面积 $S>2$ 不成立，理由如下：

当 $\cos B=\frac{\sqrt{21}}{7}$ 时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{21}}{7}$， ……………4分

即 $\frac{7+c^2-4}{2\sqrt{7}c}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

整理得，$c^2-2\sqrt{3}c+3=0$，所以 $c=\sqrt{3}$. ……………6分

因 $a^2=7, b^2+c^2=4+3=7$， ……………8分

所以 $\triangle ABC$ 是A为直角的三角形， ……………10分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}<2$， ……………12分

所以不成立. ……………14分

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

17. （本小题 14 分）

解：（Ⅰ）该单位员工共 140+180+80=400 人，

抽取的老年员工$140\times\frac{20}{400}=7$人，

中年员工$180\times\frac{20}{400}=9$人，

青年员工$80\times\frac{20}{400}=4$人 ………………4 分

（Ⅱ）X 的可取值为 0,1,2 ………………5 分

$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$，$P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{10}{28}$ ………………11 分

所以的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{10}{28}$

$E(X)=\frac{5}{4}$. ………………14 分

18. （本小题 15 分）

(Ⅰ)证明：在左图中，$\triangle ABD$ 为等边三角形，E 为 AD 中点

所以 $BE\perp AD$， ………………2 分

所以 $BE\perp AE$

因为$\angle AEG=90^{\circ}$，

所以 $GE\perp AE$. ………………3 分

因为 $GE\perp AE$，$BE\perp AE$，$GE\cap BE=E$

所以$AE\perp$平面$EBHG$. ………………4 分

(Ⅱ) 设菱形 $ABCD$ 的边长为 2，

由(Ⅰ)可知 $GE\perp AE$，$BE\perp AE$，$GE\perp BE$.

所以以 E 为原点，EA,EB,EG 所在直线分别为 x,y,z 轴，

建立如图空间坐标系

可得$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$G(0,0,1)$，$H(0,\sqrt{3},2)$ ………………6 分

$\overrightarrow{AG}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AH}=(-1,\sqrt{3},2)$

设平面 AGH 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+z=0\\ -x+\sqrt{3}y+2z=0\end{cases}$.

令 x=1，则 $\vec{n}=(1,-\frac{\sqrt{3}}{3},1)$ ....8 分

平面 $EBHG$ 的法向量为 $\overrightarrow{EA}=(1,0,0)$ ....9 分

设二面角 A-GH-B 的大小为 $\theta(\theta<90^0)$

$\cos\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{EA}>|=\frac{\sqrt{21}}{7}$ .... 11 分

(III) 由 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}$，则 $F(1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$

所以 $\overrightarrow{EF}=(1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$ .... 12 分

因为 EF // 平面 AGH，则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0$ .... 13 分

即 $1-2\lambda=0$ .... 14 分

所以 $\lambda=\frac{1}{2}$ .... 15 分

19. （本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ....1 分

b=1,

又 $a^2=b^2+c^2$

解得 $a=\sqrt{2},c=1$ .... 4 分

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ .... 5 分

（Ⅱ）设 $M(x_0,y_0)$，由题意及椭圆的对称性可知 $N(-x_0,-y_0)(y_0\neq\pm1)$ .... 6 分

则直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$ .... 7 分

直线 AN 的方程为 $y=\frac{y_0+1}{x_0}x+1$ .... 8 分

则 E 点坐标为 $(\frac{x_0}{1-y_0},0)$，F 点坐标为 $(\frac{-x_0}{1+y_0},0)$ .... 10 分

假设存在定点 G（0，n）使得∠OGE=∠OFG，

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

即 $\tan\angle OGE=\tan\angle OFG$ （也可以转化为斜率来求）.................. 11 分

即 $\frac{|OE|}{|OG|}=\frac{|OG|}{|OF|}$

即 $|OG|^2=|OE||OF|$ .... 12 分

即 $n^2=\frac{x_0^{\ 2}}{1-y_0^{\ 2}}=2$

所以 $n=\pm\sqrt{2}$ .... 13 分

所以存在点 G 坐标为 $(0,\pm\sqrt{2})$ 满足条件. .... 14 分

20. （本小题 14 分）

解：（Ⅰ） $f'(x)=(x-a+1)e^x+1$ .... 1 分

由题意可知 $g(x)=(x-a+1)e^x+1$，

所以 $g'(x)=(x-a+2)e^x$ .... 2 分

当 $x>a-2$ 时 $g'(x)>0$， $g(x)$ 在 $(a-2,+\infty)$ 上单调递增；.................. 3 分

当 $x<a-2$ 时 $g'(x)<0$， $g(x)$ 在 $(-\infty,a-2)$ 上单调递减.................. 4 分

所以 $g(x)$ 在 $x=a-2$ 处取得极小值，为 $g(a-2)=-e^{a-2}+1$ .... 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f'(x)=g(x)\geq -e^{a-2}+1$

当 $a\leq 2$ 时 $f'(x)\geq -e^{a-2}+1>0$， .... 6 分

所以 $f(x)$ 在单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$ .... 7 分

即 $a\leq 2$ 时 $f(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立. .... 8 分

当 $a>2$ 时 $f'(0)=g(0)=2-a<0$， ....9 分

又 $f'(a)=g(a)=e^a+1>0$， .... 10 分

又由于 $f'(x)$ 在 $(a-2,+\infty)$ 上单调递增；在 $(0,a-2)$ 上单调递减；

所以在 $(0,a)$ 上一定存在 x_0 使得 $f'(x_0)=0$， .... 11 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增，

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

所以 $f(x_0)<f(0)=0$ ………………12 分

所以在 $(0,+\infty)$ 存在 x_0，使得 $f(x_0)<0$， ………………13 分

所以当 $a>2$ 时，$f(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上不恒成立

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$. ………………14 分

21.（本小题 14 分）

解：(Ⅰ) $a_1=-1.2$、$a_2=-1.6$、$a_3=-0.8$. ………………3 分

(Ⅱ) 因 $a_0>0$，则 $[a_0]\ge 0$，

所以 $a_1=[a_0](a_0-[a_0])\ge 0$，

设 $[a_i]\ge 0, i\ge 1$，则 $a_{i+1}=[a_i](a_i-[a_i])\ge 0$，

所以 $[a_i]\ge 0,\forall i\ge 0$.

又因 $0\le a_i-[a_i]<1$，

则 $a_{i+1}=[a_i](a_i-[a_i])\le [a_i]$，则 $[a_{i+1}]\le [a_i],\forall i\ge 0$. ………………4 分

假设 $\forall i\ge 0$, 都有 $[a_i]>0$ 成立，

则 $a_{i+1}=[a_i](a_i-[a_i])<[a_i]$，

则 $[a_{i+1}]<[a_i],\forall i\ge 0$，即 $[a_{i+1}]\le [a_i]-1,\forall i\ge 0$， ………………5 分

则 $[a_n]\le [a_0]-n,\forall n\ge 1$，

则当 $n\ge [a_0]$ 时，$[a_n]\le 0$，

这与假设矛盾，所以 $[a_i]>0,\forall i\ge 0$ 不成立，………………6 分

即存在 $k\in N,[a_k]=0$.

从而 $\{[a_i]\}$ 的最小值为 0. ………………7 分

(Ⅲ) 当 $a_0>0$ 时，由（2）知，存在 $k\in N,[a_k]=0$，

所以 $a_{k+1}=0$, 所以 $[a_{k+1}]=0$,

所以 $a_i=0,\forall i\ge k$，成立. ………………8 分

当 $a_0<0$ 时，若存在 $k\in N, a_k=0$, 则 $a_i=0,\forall i\ge k$，得证；………………9 分

若 $a_i<0,\forall i\ge 0$，则 $[a_i]\le -1$，

则 $a_{i+1}=[a_i](a_i-[a_i])>[a_i]$，

则 $[a_{i+1}]\ge [a_i],\forall i\ge 0$，

所以数列 $\{[a_i]\}$ 单调不减.

由于 $[a_i]$ 是负整数，

所以存在整数 m 和负整数 c，使得当 $i\ge m$ 时，$[a_i]=c$.

所以，当 $i\ge m$ 时，$a_{i+1}=c(a_i-c)$，

则 $a_{i+1}-\dfrac{c^2}{c-1}=c(a_i-\dfrac{c^2}{c-1})$，令 $b_i=a_i-\dfrac{c^2}{c-1}$，

即 $b_{i+1}=cb_i, i\ge m$.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

当$b_m=0$时，则$b_i=0, i\ge m$，则$a_i=\frac{c^2}{c-1}, i\ge m$，得证. ....11 分

当$b_m\ne 0$时，$b_i\ne 0, i\ge m$，$b_i=c^{i-m}b_m, i\ge m$，

因当$i\ge m$时，$[a_i]=c$，则$a_i\in[c,c+1)$，则$\{b_i\}$有界，

所以$|c|\le 1$，所以负整数$c=-1$. .... 12 分

$\therefore a_i=-\frac{1}{2}+(-1)^{i-m}b_m=-\frac{1}{2}+(-1)^{i-m}(a_m+\frac{1}{2})(i\ge m)$，

则$a_i=\begin{cases}a_m, i=m,m+2,m+4,\cdots\\ -1-a_m, i=m+1,m+3,\cdots\end{cases}$ .... 13 分

令$k=m$，满足当$i\ge k$时，$a_i=a_{i+2}$.

综上，存在非负整数k，使得当$i\ge k$时，$a_i=a_{i+2}$ ....14 分

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！