2023 北京密云高二（下）期末

数　　学

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}, B=\{x|x(x-1)\le 0\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{0,1\}$

2. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+3>0$”的否定为（　）

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+3<0$　　B. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+3\le 0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+3<0$　　D. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+3\le 0$

3. 已知 $a>b$，则下列不等式中成立的是（　）

A. $2^a>2^b$　　B. $ab>b^2$　　C. $a^2>b^2$　　D. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

4. 5 名同学分别报名参加学校的足球队、篮球队、乒乓球队，每人限报其中的一个运动队，则不同的报名方法的种数为（　）

A. 5^3　　B. 3^5　　C. A_5^3　　D. C_5^3

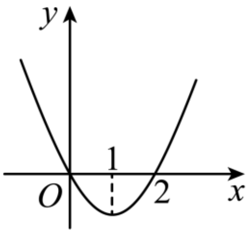
5. 下列函数中，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的奇函数是（　）

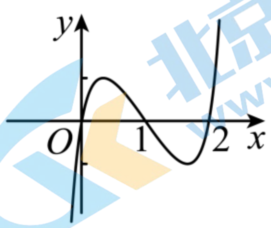
A. $y=\sqrt{x}$　　B. $y=x^{-1}$　　C. $y=\ln|x|$　　D. $y=x-\frac{1}{x}$

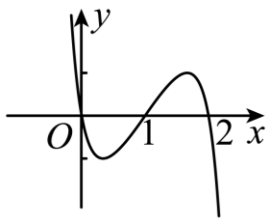
6. 某校开展“迎奥运阳光体育”活动，共设踢毽、跳绳、拔河、推火车、多人多足五个集体比赛项目，各比赛项目逐一进行．为了增强比赛的趣味性，在安排比赛顺序时，多人多足不排在第一场，拔河排在最后一场，则不同的安排方案种数为（　）

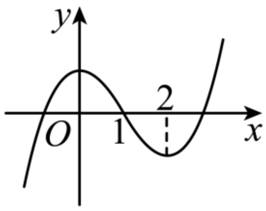
A. 3　　B. 18　　C. 21　　D. 24

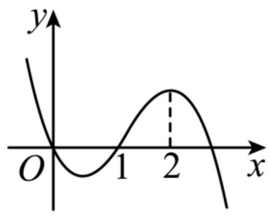
7. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，$y=f'(x)$ 的图象如图所示，则 $y=f(x)$ 的图象最有可能的是（　）



A.


B.


C. 

D. 

8. “$\lg x<\lg y$”是“$x<y$”成立的（　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 单级火箭在不考虑空气阻力和地球引力的理想情况下的最大速度v满足公式：$v=v_0\cdot\ln\dfrac{m_1+m_2}{m_1}$.其中$m_1$，$m_2$分别为火箭结构质量和推进剂的质量.$v_0$是发动机的喷气速度.已知某单级火箭结构质量是推进剂质量的2倍，火箭的最大速度为10km/s.则火箭发动机的喷气速度约为（　）（参考数据：$\ln2\approx0.7$，$\ln3\approx1.1$，$\ln4\approx1.4$）

A. 15km/s

B. 25km/s

C. 35km/s

D. 45km/s

10. 已知函数$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，$f'(x)$是$f(x)$的导函数，则下列结论正确的是（　）

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=f(x)$

B. $\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)<0$

C. 若$0<x_1<x_2$，则$x_1f(x_1)<x_2f(x_2)$

D. 若$0<x_1<x_2$，则$f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 在$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$的展开式中，$x$的系数为______；各项系数之和为______.（用数字作答）

12. 已知$x>1$，那么$x+\dfrac{1}{x-1}$的最小值为__________.

13. 在5道试题中有2道代数题和3道几何题，每次从中随机抽出1道题，抽出的题不再放回，则第1次抽到代数题且第2次抽到几何题的概率为______；在第1次抽到代数题的条件下，第2次抽到几何题的概率为______.

14. 一个车辆制造厂引进了一条摩托车整车装配流水线，这条流水线生产的摩托车数量x（单位：辆）与创造的价值y（单位：元）之间的关系为：$y=-20x^2+2200x$.如果这家工厂希望在一个星期内利用这条流水线创收60000元以上，请你给出一个该工厂在这周内生成的摩托车数量的建议，使工厂能够达成这个周创收目标，那么你的建议是______.

15. 已知函数$f(x)=\begin{cases}e^x-x,x\le k\\x^3-x+1,x>k\end{cases}$.

①若$k=0$，不等式$f(x)<1$的解集为______；

②若函数$g(x)=f(x)-1$恰有两个零点，则实数k的取值范围为______.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 某校高二年级的全体学生都参加了体质健康测试，已知测试成绩满分为 100 分，规定测试成绩在区间 $[85,100]$ 内为“体质优秀”，在 $[75,85)$ 内为“体质良好”，在 $[60,75)$ 内为“体质合格”，在 $[0,60)$ 内为“体质不合格”.现从这个年级中随机抽取 6 名学生，测试成绩如下：

学生编号	1	2	3	4	5	6
测试成绩	60	85	80	78	90	91

（1）若该校高二年级有 600 名学生，试估计高二年级“体质优秀”的学生人数______；

（2）若从这 6 名学生中随机抽取 3 人，记 X 为抽取的 3 人中“体质良好”的学生人数，求 X 的分布列；

（3）求（2）中 X 的均值.

17. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2-3x+\ln x$.

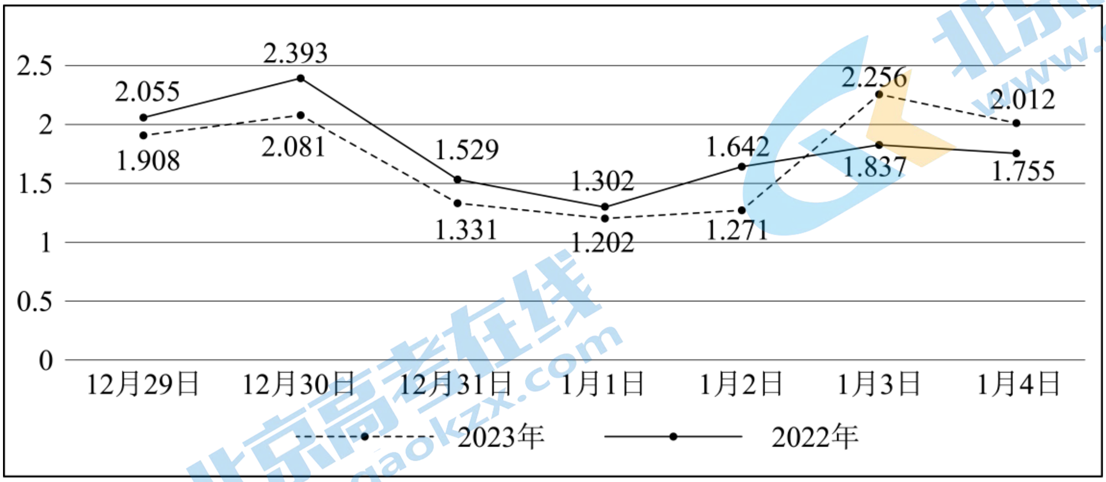
（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间和极值.

18. 交通拥堵指数（TPI）是表征交通拥堵程度的客观指标，TPI 越大代表拥堵程度越高．某平台计算 TPI 的公式为：$\mathrm{TPI}=\dfrac{\text{实际行程时间}}{\text{畅通行程时间}}$，并按 TPI 的大小将城市道路拥堵程度划分为如下表所示的 4 个等级：

TPI	$[1,1.5)$	$[1.5,2)$	$[2,4)$	不低于 4
拥堵等级	畅通	缓行	拥堵	严重拥堵

某市 2023 年元旦及前后共 7 天与 2022 年同期的交通高峰期城市道路 TP1 的统计数据如下图：



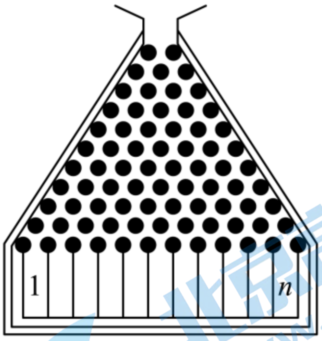
（1）从 2022 年元旦及前后共 7 天中任取 1 天，求这一天交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”的概率；

（2）从 2023 年元旦及前后共 7 天中任取 3 天，将这 3 天中交通高峰期城市道路 TPI 比 2022 年同日 TPI 高的天数记为 X，求 X 的分布列及数学期望 $E\left(X\right)$；

（3）把 12 月 29 日作为第 1 天，将 2023 年元旦及前后共 7 天的交通高峰期城市道路 TPI 依次记为

$a_1,a_2,\cdots,a_7$，将 2022 年同期 TPI 依次记为 $b_1,b_2,\cdots,b_7$，记 $c_i=a_i-b_i(i=1,2,\cdots,7)$，$\bar{c}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{n}c_i$．请直接写出 $|c_i-\bar{c}|$ 取得最大值时 i 的值.

19. 高尔顿钉板装置如图所示，在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木块，小木块之间留有适当的空隙作为通道，前面挡有一块玻璃，让一个小球从高尔顿板上方的通道口落下，小球在下落的过程中每次碰到小木钉后都等可能地向左或向右滚下，最后掉入高尔顿板底部的格子中，格子从左到右依次编号为 0，1，2，…，10，用 X 表示小球最后落入格子的号码.



（1）当 $X=4$ 时，求小球向右下落的次数；

（2）求 X 的分布列；

（3）求 $E\left(X\right)$.

20. 已知函数 $f\left(x\right)=xe^x-ax\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）若 $y=f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，求实数 a 的取值范围；

（2）当 $a=1$ 时，判断 0 是否为函数 $f\left(x\right)$ 的极值点，并说明理由；

（3）判断 $f\left(x\right)$ 的零点个数，并说明理由.

21. 已知数列 A：a_1，a_2，…，a_n，…，满足 $a_1=0$，$|a_{i+1}|=|a_i+1|$ $\left(i=1,2,\cdots,n,\cdots\right)$，数列 A 的前 n 项和记为 S_n.

（1）写出 S_3 的值；

（2）若 $a_5=-2$，求 S_5 的值；

（3）是否存在数列 A，使得 $S_{2022}=1011$?如果存在，写出此时 a_{2023} 的值；如果不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】D

【分析】根据集合的交集运算即可求解.

【详解】解：$B=\left\{x\left|x(x-1)\le 0\right.\right\}=\left\{x\left|0\le x\le 1\right.\right\}, A=\left\{-1,0,1\right\}$,

$A\cap B=\{0,1\}$,

故选：D

2. 【答案】D

【分析】根据题意，由全称命题的否定是特称命题，即可得到结果.

【详解】因为命题"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+3>0$"，则其否定为"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+3\le 0$"

故选：D

3. 【答案】A

【分析】A 选项可根据指数函数性质判断，BCD 选项可以举反例得出.

【详解】A 选项，根据指数函数 $y=2^x(x\in\mathbf{R})$ 单调递增可知，$a>b\Leftrightarrow 2^a>2^b$，A 选项正确；

BCD 选项，取 $a=1,b=-1$，B 选项变成 $-1>1$，C 选项变成 $1>1$，D 选项变成 $1<-1$，BCD 均错误.

故选：A

4. 【答案】B

【分析】

把不同的报名方法可分 5 步完成，结合分步计数原理，即可求解.

【详解】由题意，不同的报名方法可分 5 步完成：

第一步：第一名同学报名由 3 种方法

第二步：第二名同学报名由 3 种方法

第三步：第三名同学报名由 3 种方法

第四步：第四名同学报名由 3 种方法

第五步：第五名同学报名由 3 种方法

根据分步乘法计数原理，共有 $3\times 3\times 3\times 3\times 3=3^5$ 种方法.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了分步计数原理的应用，其中解答中认真审题，合理分步求解是解答的关键，着重考查了分析问题和解答问题的能力.

5. 【答案】D

【分析】由函数奇偶性的定义及对数函数与幂函数的性质即可求解.

【详解】对于 A：$y=\sqrt{x}$，定义域为 $[0,+\infty)$，不关于原点对称，

所以 $y=\sqrt{x}$ 不具有奇偶性，故选项 A 错误；

对于 B：$y=x^{-1}$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因为 $(-x)^{-1}=-x^{-1}$，所以 $y=x^{-1}$ 为奇函数，

由幂函数性质可知 $y=x^{-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故选项 B 错误；

对于 C：$y=\ln|x|$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因为 $\ln|-x|=\ln|x|$，

所以函数 $y=\ln|x|$ 为偶函数，且 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y=\ln x$，

由对数函数的性质知函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故选项 C 错误；

对于 D：$y=x-\dfrac{1}{x}$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因为 $(-x)-\left(\dfrac{1}{-x}\right)=-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$，

所以 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 为奇函数，又 $y=x$ 与 $y=-\dfrac{1}{x}$ 都在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由单调性的性质可知 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故选项 D 正确.

故选：D.

6.【答案】B

【分析】

根据题意，分析可得：“多人多足”有3种安排方法，再将踢毽、跳绳、推火车安排在剩下的3个位置，由分步计数原理计算可得答案.

【详解】根据题意，多人多足不排在第一场，拔河排在最后一场，

则“多人多足”有3种安排方法，

将踢毽、跳绳、推火车安排在剩下的3个位置，有 $A_3^3=6$ 种安排方法，

则有 $3\times6=18$ 种安排方法.

故选：B.

7.【答案】C

【分析】根据导函数的图象得出函数的单调区间，根据函数 $f(x)$ 的单调性即可判断.

【详解】由导函数的图象可得当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

只有 C 选项的图象符合.

故选：C.

8.【答案】A

【分析】根据函数 $y=\lg x$ 的单调性化简 $\lg x<\lg y$，得 $0<x<y$，从而根据充分条件与必要条件的定义判断即可.

【详解】因为函数 $y=\lg x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由 $\lg x<\lg y$，可得 $0<x<y$，

而“$0<x<y$”是“$x<y$”成立的充分不必要条件.

所以“$\lg x<\lg y$”是“$x<y$”成立的充分不必要条件.

故选：A

9.【答案】B

【分析】根据题意，代入计算，即可得到结果.

【详解】由题意可得，$10=v_0\ln\dfrac{m_1+m_2}{m_1}$，其中 $m_1=2m_2$，

则 $10=v_0\ln\dfrac{3}{2}=v_0(\ln 3-\ln 2)=0.4v_0$，求得 $v_0=25$.

故选：B

10.【答案】C

【分析】根据函数的奇偶性概念判断 A，根据导函数的符号判断 B，利用函数的单调性结合不等式的性质即可判断 C，利用特例法排除选项 D.

【详解】对于 A，函数定义域为 R，$f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=-\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，所以 $f(-x)=-f(x)$，错误；

对于 B，因为 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=1-\dfrac{2}{2^x+1}$，所以 $f'(x)=\dfrac{2\times 2^x\ln 2}{(2^x+1)^2}$，由 $\ln 2>0$ 知 $f'(x)>0$，错误；

对于 C，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增，

$x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，故对 $0<x_1<x_2$，$0<f(x_1)<f(x_2)$，

由不等式的性质可得 $0<x_1f(x_1)<x_2f(x_2)$，正确；

对于 D，$f(1)=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$，$f(2)=\dfrac{2^2-1}{2^2+1}=\dfrac{3}{5}$，$f(3)=\dfrac{3^2-1}{3^2+1}=\dfrac{4}{5}$，

取 $x_1=1,x_2=2$，则 $x_1+x_2=3$，$f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{14}{15},f(x_1+x_2)=\dfrac{4}{5}$，

此时，$f(x_1)+f(x_2)>f(x_1+x_2)$，错误.

故选：C

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】 ①. 10 ②. 32

【分析】先求出二项式展开式的通项公式，然后令 x 的次数为 1 求出 r，再代入通项公式可求出 x 的系数，令 $x=1$ 可求出各项系数之和.

【详解】$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_5^r x^{5-2r}$，

令 $5-2r=1$，得 $r=2$，所以 x 的系数为 $C_5^2=10$，

令 $x=1$，则 $(1+1)^5=32$，所以各项系数之和为 32，

故答案为：10，32

12.【答案】3

【分析】利用基本不等式计算可得.

【详解】因为 $x>1$，所以 $x-1>0$，

所以 $x+\frac{1}{x-1}=(x-1)+\frac{1}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+1=3$，

当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$，即 $x=2$ 时取等号.

故答案为：3

13.【答案】 ①. $\frac{3}{10}$##0.3 ②. $\frac{3}{4}$##0.75

【分析】设事件 A 表示“第 1 次抽到代数题”，事件 B 表示“第 2 次抽到几何题”，然后利用古典概型公式代入求解出 $P(A)$ 与 $P(AB)$，再代入条件概率公式即可求解.

【详解】设事件 A 表示“第 1 次抽到代数题”，事件 B 表示“第 2 次抽到几何题”，

则 $P(A)=\frac{C_2^1}{C_5^1}=\frac{2}{5}$，所以第 1 次抽到代数题且第 2 次抽到几何题的概率为 $P(AB)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^1C_4^1}=\frac{3}{10}$.

在第 1 次抽到代数题的条件下，第 2 次抽到几何题的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$.

故答案为：$\frac{3}{10}$；$\frac{3}{4}$.

14.【答案】摩托车数量在 51 到 59 辆

【分析】根据题意可得 $-20x^2+2200x>60000$，解不等式，且 x 取不等式解集中的正整数即可

【详解】由题意得 $-20x^2+2200x>60000$，化简得 $x^2-110x+3000<0$，

得 $(x-50)(x-60)<0$，解得 $50<x<60$，

因为 x 取正整数，

所以该工厂在这周内生成的摩托车数量在 51 到 59 辆时，工厂能够达成这个周创收目标.

故答案为：摩托车数量在 51 到 59 辆

15.【答案】 ①. $(0,1)$ ②. $-1\leq k<1$

【分析】（空 1）$k=0$ 时，借助导数工具判断 $e^x-x-1\geq 0$，结合三次函数的零点情况，分段求解不等式；

（空 2）结合上一空 $e^x-x-1\ge 0$ 进行零点个数的判断

【详解】$k=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}e^x-x, x\le 0\\ x^3-x+1, x>0\end{cases}$，则 $f(x)-1=\begin{cases}e^x-x-1, x\le 0\\ x^3-x, x>0\end{cases}$，

令 $\begin{cases}x^3-x<0\\ x>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x(x+1)(x-1)<0\\ x>0\end{cases}$，解得 $x\in(0,1)$，

令 $h(x)=e^x-x-1(x\le 0)$，$h'(x)=e^x-1\le 0(x\le 0)$，

即 $h(x)$ 在 $x\in(-\infty,0]$ 上单调递减，于是 $h(x)\ge h(0)=0$，

即 $e^x-x-1\ge 0$，即 $e^x-x-1<0$ 无解，

综上可知，$f(x)<1$ 的解集为 $(0,1)$；

$g(x)=f(x)-1=\begin{cases}e^x-x-1, x\le k\\ x^3-x, x>k\end{cases}$，根据上一空的分析可知，$e^x-x-1\ge 0$，$x=0$ 取得等号，

故 $k<0$ 时，$e^x-x-1=0$ 无解，$x^3-x=0\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0$，$x=-1$，0 或1，

$x^3-x=0$ 在 $x>k$ 时有 2 个根，即 $x=-1$ 这个根需排除在外，则 $k\ge -1$，于是 $-1\le k<0$；

当 $k\ge 0$ 时，$e^x-x-1=0$ 有唯一解 $x=0$，于是 $x^3-x=0$ 在 $x>k$ 时有1个根，

即 $x=1$ 这个根需恰好被包含在内，故 $k<1$，即 $0\le k<1$.

综上所述，$-1\le k<1$.

故答案为：$(0,1)$；$-1\le k<1$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）300；

（2）分布列见解析；　（3）$E(X)=1$.

【分析】（1）先计算出优秀率的估计值，再由频率和频数的关系求频数；

（2）可得 X 的可能取值为 0，1，2，求出 X 取不同值的概率即可得出分布列；

（3）根据随机变量的均值公式求解.

【小问 1 详解】

高二年级随机抽取的 6 名学生中，“体质优秀”的有 3 人，优秀率为 $\frac{1}{2}$，

将此频率视为概率，估计高二年级“体质优秀”的学生人数为 $\frac{1}{2}\times 600=300$（人）；

【小问 2 详解】

高二年级抽取的 6 名学生中“体质良好”的有 2 人，非“体质良好”的有 4 人.

所以 X 的可能取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_2^0C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

【小问 3 详解】随机变量 X 的均值 $E\left(X\right)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$

17.【答案】(1) $y+2=0$；

(2) 函数 $f(x)$ 的单调递增区间有 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间有 $\left(\frac{1}{2},1\right)$，

极大值为 $-\frac{5}{4}-\ln 2$，极小值为 -2.

【分析】(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域和导函数，利用导数的几何意义求切线斜率，由点斜式求切线方程；

(2) 解方程 $f'(x)=0$ 求其根，由导数的正负来判断函数的单调区间，从而可求出函数的极值.

【小问 1 详解】

函数 $f\left(x\right)=x^2-3x+\ln x$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，

导函数 $f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{\left(2x-1\right)\left(x-1\right)}{x}$，

所以 $f'(1)=0, f(1)=-2$，

故切线方程为 $y+2=0$；

【小问 2 详解】

由 (1) $f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{\left(2x-1\right)\left(x-1\right)}{x}$，

令 $f'(x)=0$，可得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=1$，

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'\ x\ >0$，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增；

当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$f'\left(x\right)<0$，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'\ x\ >0$，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增；

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间有 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间有 $\left(\frac{1}{2},1\right)$，

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 取极大值，极大值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}-\ln 2$，

当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取极小值，极小值为 $f(1)=-2$.

18.【答案】(1) $\frac{2}{7}$

(2) 答案见解析　(3) $i=6$

【分析】(1) 根据随机事件的概率公式即可求解;

(2) 结合题意先求出 X 的分布列，再结合数学期望的公式求解即可;

(3) 结合题意先求得 $\bar{c}\approx -0.065$，进而即可求解.

【小问 1 详解】

由图可知，2022 年元旦及前后共 7 天中，交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”的共 2 天,

所以这一天交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”的概率为 $\frac{2}{7}$.

【小问 2 详解】

由图可知，2023 年元旦及前后共 7 天中比 2022 年同日 TPI 高的天数只有 1 月 3 日和 1 月 4 日这 2 天,

所以 $P\left(X=0\right)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$,

$P\left(X=1\right)=\frac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$,

$P\left(X=2\right)=\frac{C_5^1C_2^2}{C_7^3}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$,

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

数学期望 $E\left(X\right)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$.

【小问 3 详解】

由题意，$c_1=a_1-b_1=1.908-2.055=-0.147$,

$c_2=a_2-b_2=2.081-2.393=-0.312$,

$c_3=a_3-b_3=1.331-1.529=-0.198$,

$c_4=a_4-b_4=1.202-1.302=-0.1$,

$c_5=a_5-b_5=1.271-1.642=-0.371$,

$c_6=a_6-b_6=2.256-1.837=0.419$,

$c_7=a_7-b_7=2.012-1.755=0.257$,

所以 $\bar{c}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{n}c_i=\frac{1}{7}\times\left(-0.147-0.312-0.198-0.1-0.371+0.419+0.257\right)\approx -0.065$,

所以$\left|c_i-\bar{c}\right|$取得最大值时，$i=6$.

19.【答案】(1) 4　(2) 分布列见解析

(3) 5

【分析】(1) 根据试验即可求出；

(2) 分析得到 $X\sim B\left(10,\frac{1}{2}\right)$，进而利用二项分布求概率公式求出相应的概率；

(3) 利用期望公式求出期望.

【小问 1 详解】

当 $X=4$时，则小球最终落入 4 号格子，则在通过的 10 层中有 4 层需要向右，6 层向左，

故小球向右下落的次数为 4；

【小问 2 详解】

设 A="向右下落"，$\overline{A}$="向左下落"，则 $P(A)=P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{2}$，

因为小球最后落入格子的号码 X 等于事件 A 发生的次数，

而小球下落的过程中共碰撞小木钉 10 次，所以 $X\sim B\left(10,\frac{1}{2}\right)$，

X 的可能取值为 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，

所以 $P(X=0)=\mathrm{C}_{10}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$，$P(X=1)=\mathrm{C}_{10}^{1}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{9}=\frac{5}{512}$，

$P(X=2)=\mathrm{C}_{10}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{8}=\frac{45}{1024}$，$P(X=3)=\mathrm{C}_{10}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{15}{128}$，

$P(X=4)=\mathrm{C}_{10}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=\frac{105}{512}$，$P(X=5)=\mathrm{C}_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{63}{256}$，

$P(X=6)=\mathrm{C}_{10}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{105}{512}$，$P(X=7)=\mathrm{C}_{10}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{15}{128}$，

$P(X=8)=\mathrm{C}_{10}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{45}{1024}$，$P(X=9)=\mathrm{C}_{10}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{512}$，

$P(X=10)=\mathrm{C}_{10}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=\frac{1}{1024}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{1024}$	$\frac{5}{512}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{105}{512}$	$\frac{63}{256}$	$\frac{105}{512}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{5}{512}$	$\frac{1}{1024}$

【小问 3 详解】由 (2) 知

$$EX=0\times\frac{1}{1024}+1\times\frac{5}{512}+2\times\frac{45}{1024}+3\times\frac{15}{128}+4\times\frac{105}{512}+5\times\frac{63}{256}+6\times\frac{105}{512}+7\times\frac{15}{128}+8\times\frac{45}{1024}$$

$$+9\times\frac{5}{512}+10\times\frac{1}{1024}=5.$$

20.【答案】（1）$\left(-\infty,-\frac{1}{e^2}\right]$

（2）是，理由见解析　（3）答案见解析

【分析】（1）对函数求导，若 $y=f(x)$ 在 R 上是增函数，即 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，得 $a\leq(1+x)e^x$，设 $g(x)=(1+x)e^x$，求导后利用单调性求得函数的最小值，即可求得结果；

（2）$f'(x)=(1+x)e^x-1$，令 $h(x)=(1+x)e^x-1$，对函数 $h(x)$ 求导后求得 $f'(x)$ 的单调性即可判断出结果；

（3）令 $f(x)=xe^x-ax=0$，即 $x(e^x-a)=0$，对 a 分类讨论求解方程的根，从而得出答案.

【小问 1 详解】

$f(x)=xe^x-ax(a\in\mathbf{R})$，则 $f'(x)=(1+x)e^x-a$，

若 $y=f(x)$ 在 R 上是增函数，即 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，得 $a\leq(1+x)e^x$，

设 $g(x)=(1+x)e^x$，$g'(x)=(x+2)e^x$，

$g'(x)>0$ 得 $x>-2$，$g'(x)<0$ 得 $x<-2$，

即 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 递减，在 $(-2,+\infty)$ 递增，

则 $g(x)\geq g(-2)=-\frac{1}{e^2}$，

故 $a\leq-\frac{1}{e^2}$，即 $a\in\left(-\infty,-\frac{1}{e^2}\right]$.

【小问 2 详解】

当 $a=1$ 时，$f'(x)=(1+x)e^x-1$，

令 $h(x)=(1+x)e^x-1$，$h'(x)=(x+2)e^x$，

当 $x\in(-2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，$f'(x)$ 单调递增，又 $f'(0)=0$，

当 $x\in(-2,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'\ x\ >0$，$f(x)$ 单调递增，

故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点.

【小问 3 详解】

令 $f(x)=xe^x-ax=0$，即 $x\left(e^x-a\right)=0$，

当 $a\le 0$ 时，$e^x-a>0$，故 $f(x)=0$ 的根有 1 个，即 $x=0$，则 $f(x)$ 有 1 个零点；

当 $a=1$ 时，由 $e^x-1=0$，得 $x=0$，故 $f(x)=0$ 的根有 1 个，即 $x=0$，则 $f(x)$ 有 1 个零点；

当 $a>0$ 且 $a\ne 1$ 时，由 $e^x-a=0$，得 $x=\ln a$，故 $f(x)=0$ 的根有 2 个，即 $x=0$ 或 $x=\ln a$，则 $f(x)$ 有 2 个零点，

综上，当 $a\le 0$ 或 $a=1$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点；当 $a>0$ 且 $a\ne 1$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点.

21.【答案】（1）-1 或 3

（2）-2

（3）不存在，理由见解析

【分析】（1）利用 $a_1=0$ 与递推公式求出 a_2,a_3 的可能值，从而求出 S_3 的值；

（2）由（1）a_2,a_3 的值，分类讨论，结合 $a_5=-2$ 求出 a_4 的值，从而求出 S_5 的值；

（3）将 $|a_{i+1}|=|a_i+1|$ 两边平方后，推出 $a_n^2=2S_{n-1}+n-1$，从而求出 $a_{2023}^2=4044$，结合 a_n 为整数，判断方程无解即可.

【小问 1 详解】

因为 $a_1=0$，$|a_{i+1}|=|a_i+1|(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，

所以 $|a_1+1|=|a_2|=1$，解得 $a_2=-1$ 或 $a_2=1$，

当 $a_2=1$ 时，由 $|a_3|=|a_2+1|=2$，解得 $a_3=2$ 或 $a_3=-2$，

当 $a_2=-1$ 时，由 $|a_3|=|a_2+1|=0$，解得 $a_3=0$，

所以 $S_3=0+(-1)+0=-1$ 或 $S_3=0+1+(-2)=-1$ 或 $S_3=0+1+2=3$，

【小问 2 详解】

当 $a_3=0$ 时，$|a_3+1|=|a_4|=1$，则 $a_4=-1$ 或 $a_4=1$，此时由 $|a_4+1|=|a_5|=2$ 知 $a_4=1$，$a_4=-1$ 不满足，舍去；

当 $a_3=-2$ 时，$|a_3+1|=|a_4|=1$，则 $a_4=1$ 或 $a_4=-1$，$a_4=1$ 满足 $|a_4+1|=|a_5|=2$，$a_4=-1$ 不满足，舍去；

当 $a_3=2$ 时，由 $|a_3+1|=|a_4|=3$，得 $a_4=-3$ 或 $a_4=3$，由 $|a_4+1|=|a_5|=2$ 知 $a_4=-3$ 满足题意，当 $a_4=3$ 时，不满足题意，

综上，$a_2=-1,a_3=0,a_4=1,a_5=-2$ 或 $a_2=1,a_3=-2,a_4=1,a_5=-2$，或

$a_2=1,a_3=2,a_4=-3,a_5=-2$，

所以 $S_5=0+(-1)+0+1+(-2)=-2$ 或 $S_5=0+1+(-2)+1+(-2)=-2$ 或

$S_5=0+1+2+(-3)+(-2)=-2$，

故 $S_5=-2$.

【小问 3 详解】

由 $|a_{i+1}|=|a_i+1|(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，$a_1=0$ 可得 a_n 为整数，$a_i^2+2a_i+1=a_{i+1}^2,a_1=0$，

所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0+(a_1^2+2a_1+1)+(a_2^2+2a_2+1)+\cdots+(a_{n-1}^2+2a_{n-1}+1)$，

则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{n-1}^2)+2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})+n-1$，

所以 $a_n^2=2S_{n-1}+n-1$，

若存在数列 A，使得 $S_{2022}=1011$，则 $a_{2023}^2=2S_{2022}+2022=4044$，

又 a_{2023} 为整数，所以方程无解，

故不存在数列 A，使得 $S_{2022}=1011$.

【点睛】思路点睛：分类讨论思想解决高中数学问题的一种重要思想方法，是中学数学四种重要的数学思想之一，尤其在解决含参数问题发挥着奇特功效，大大提高了解题能力与速度.运用这种方法的关键是将题设条件研究透，这样才能快速找准突破点. 充分利用分类讨论思想方法能够使问题条理清晰，进而顺利解答，希望同学们能够熟练掌握并应用与解题当中.