2024年普通高等学校招生全国统一考试仿真试题

数学(一)参考答案及解析

一、选择题

1.D 【解析】数据由小到大排列为5,5,6,7,8,8,8,因此,这组数据的众数为8,中位数为7.故选D.

2.C 【解析】将 $y=ax^2\ (a\neq 0)$,化为抛物线的标准方程 $x^2=\frac{1}{a}y\ (a\neq 0)$,当 $a>0$ 时,$2p=\frac{1}{a}$,得到 $p=\frac{1}{2a}$,由抛物线的准线方程为 $y=-\frac{p}{2}=-\frac{1}{4a}$;当 $a<0$ 时,$2p=-\frac{1}{a}$,得到 $p=-\frac{1}{2a}$,由抛物线的准线方程为 $y=\frac{p}{2}=-\frac{1}{4a}$;综上:其准线方程为 $y=-\frac{1}{4a}$.故选C.

3.C 【解析】由题意得 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 成等差数列,即 $9,36-9,a_7+a_8+a_9$ 成等差数列,即 $2\times(36-9)=9+a_7+a_8+a_9$,解得 $a_7+a_8+a_9=45$.故选C.

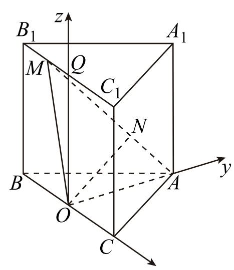
4.B 【解析】先从5人中选出4人值班,再从4人中选出2人值第三天,剩余2人分别值第一、二天,所以安排方法数为 $C_5^4\cdot C_4^2\cdot A_2^2=60$.故选B.

5.B 【解析】由题可知,$\sqrt{5}\pi=\pi ab$,即 $ab=\sqrt{5}$,$\triangle F_1PF_2$ 是 $\angle F_1F_2P=120^\circ$ 的等腰三角形,则有:$|F_1F_2|=|PF_2|$,$\angle PF_1F_2=\angle F_2PF_1=30^\circ$,$\angle F_2PA=30^\circ$,所以 $|PF_2|=2|AF_2|=2(4-c)=8-2c$,又因为 $|F_1F_2|=2c$,即 $2c=8-2c$,$c=2$,可得:$\begin{cases}ab=\sqrt{5}\\c=2\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=\sqrt{5}\\c=2\\b=1\end{cases}$,故离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.故选B.

6.C 【解析】过 D 作 $DF\parallel CE$ 交 AB 于 F,由平行线的性质得,$\frac{AF}{EF}=\frac{AD}{DC}=4$,$\frac{BO}{BD}=\frac{BE}{BF}=\frac{5}{6}$,所以 $\overrightarrow{BO}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BD}$,$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,所以 $\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}^2}{|\overrightarrow{AC}|^2}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.故选C.

7.C 【解析】由 $f'(x)=2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}>0$ 得函数 $f(x)$ 单调递增,由题 $f(x)=-2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{\frac{1}{x}}-\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$,$\therefore f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$,则 $\frac{1}{m}=\frac{1}{n^2}$,即 $m=n^2$,$3m+\frac{1}{n^2}=3n^2+\frac{1}{n^2}\geqslant 2\sqrt{3n^2\cdot\frac{1}{n^2}}=2\sqrt{3}$,当且仅当 $n^2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立.故选C.

8.B 【解析】取 B_1C_1 中点 Q,连接 OQ,OA,则 OC,OA,OQ 两两垂直,如图,以 O 为原点,OC,OA,OQ 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,



则 $O(0,0,0)$,$A(0,\sqrt{3},0)$,$B_1(-1,0,\sqrt{3})$,

$C_1(1,0,\sqrt{3})$，因为 M 是棱 B_1C_1 上一动点，设 $M(a,0,\sqrt{3})$，且 $a\in[-1,1]$，所以 $\overrightarrow{OM}=(a,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{MA}=(-a,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，由题意得 $\frac{MN}{MO}=\frac{MO}{MA}$，即 $MN=\frac{MO^2}{MA}=\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^2}}=\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+6}}$，于是令 $t=\sqrt{a^2+6}$，$t\in[\sqrt{6},\sqrt{7}]$，所以 $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+6}}=\frac{t^2-3}{t}=t-\frac{3}{t}$，$t\in[\sqrt{6},\sqrt{7}]$，又函数 $y=t-\frac{3}{t}$ 在 $t\in[\sqrt{6},\sqrt{7}]$ 上为增函数，所以线段 MN 长度的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{4\sqrt{7}}{7}\right]$. 故选 B.

二、选择题

9. AC 【解析】因为 $i^3z_0=\frac{-2+i}{1-2i}$，所以 $-iz_0=\frac{-2+i}{1-2i}$，所以 $z_0=\frac{-2+i}{-i(1-2i)}=\frac{2-i}{2+i}=\frac{3-4i}{5}$，$z_0$ 的实部为 $\frac{3}{5}$，z_0 的虚部为 $-\frac{4}{5}$，所以 A 正确，B 错误；因为 $|z_0|=1$，所以满足：$|z|\leqslant|z_0|$ 的复数 z 对应的点所在区域的面积为 π，所以 C 正确，z_0 对应的向量与 x 轴正方向所在向量夹角的正切值 $=\frac{\left|-\frac{4}{5}\right|}{\left|\frac{3}{5}\right|}=\frac{4}{3}$，所以 D 错误. 故选 AC.

10. ABD 【解析】对于 A：$b(\sqrt{3}\sin A-\cos C)=(c-a)\cdot\cos B$，由正弦定理得 $\sin B(\sqrt{3}\sin A-\cos C)=(\sin C-\sin A)\cos B$，$\sqrt{3}\sin B\sin A-\sin B\cos C=\sin C\cos B-\sin A\cos B$，$\sqrt{3}\sin B\sin A+\sin A\cos B=\sin A$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\neq0$，所以 $\sqrt{3}\sin B+\cos B=1$，$\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$B=\frac{2\pi}{3}$，故 A 正确；对于 B，由余弦定理知 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$9=a^2+c^2+ac$，因为 $a>0,c>0$，所以 $9=a^2+c^2+ac\geqslant3ac$，$ac\leqslant3$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立，因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，所以 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，故 B 正确；对于 C，由 B 知 $9=a^2+c^2+ac=(a+c)^2-ac$，则 $(a+c)^2=9+ac$，所以 $(a+c)^2=9+ac\leqslant12\Rightarrow a+c\leqslant2\sqrt{3}$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立，所以 $a+b+c$ 的最大值为 $3+2\sqrt{3}$，故 C 错；对于 D，因为 BM 为 AC 边上的中线，所以 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$|\overrightarrow{BM}|=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2-ac}$，得 $|\overrightarrow{BM}|=\frac{1}{2}\sqrt{9-2ac}$，因为 $ac\leqslant3$，所以 $|\overrightarrow{BM}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 D 正确. 故选 ABD.

11. ABD 【解析】选项 A：圆 C 的圆心 $(0,0)$ 到直线 l：$x-y-2=0$ 的距离为 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，圆 C 上的点到直线 l 的距离的最小值为 $\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}$，最大值为 $\sqrt{2}+1>\frac{1}{2}$，所以圆 C 上有两个点到直线 l 的距离为 $\frac{1}{2}$，故 A 正确；选项 B：点 $M(3,2)$ 关于直线 l 的对称点为 $M'(4,1)$，根据对称性，$|PM|+|PN|$ 的最小值为 $|M'N|$ 的最小值. 圆 C：$x^2+y^2=1$ 的圆心 $(0,0)$，半径 $r=1$，又 $M'(4,1)$，所以 $|M'C|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}>r$，即点 M' 在圆外，所以 $|M'N|_{\min}=|M'C|-r=\sqrt{17}-1$，故 B 正确；选项 C：由切线的性质可知 $\triangle OPQ$ 为直角三角形，$\sin\angle OPQ=\frac{r}{|OP|}=\frac{1}{|OP|}$，所以当 $|OP|$ 最小时，$\sin\angle OPQ$ 最大，此时 $\angle OPQ$ 最大，$|OP|_{\min}=\sqrt{2}$，$\sin\angle OPQ=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以最大角小于 60°，所以

$\angle OPQ$不可能为$60°$,故C错误;选项D:设点$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$P(x_0,y_0)$,$x_1^2+y_1^2=1$,$x_2^2+y_2^2=1$,$x_0-y_0-2=0$,$k_{PM}=-\frac{x_1}{y_1}$,切线PM的方程为:$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$,整理得:$y_1y+x_1x-x_1^2-y_1^2=0$,即$y_1y+x_1x-1=0$,同理切线$PN$的方程为$y_2y+x_2x-1=0$,因为点$P(x_0,y_0)$分别在两条切线上,所以有$y_1y_0+x_1x_0-1=0$,$y_2y_0+x_2x_0-1=0$,所以直线$MN$的方程为$yy_0+xx_0-1=0$,又因为$x_0-y_0-2=0$,所以有:$yy_0+x(y_0+2)-1=0$,$(x+y)y_0+2x-1=0$,所以$\begin{cases}x+y=0\\2x-1=0\end{cases}$,解得$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}$,所以直线$MN$恒过定点$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$,故D正确.故选ABD.

三、填空题

12. $\{x\mid 0<x<1\}$　**【解析】**因为$x^2<1$,所以$-1<x<1$,所以$B=\{x\mid -1<x<1\}$,因为$A=\{x\mid 0<x<2\}$,所以$A\cap B=\{x\mid 0<x<1\}$.故答案为$\{x\mid 0<x<1\}$.

13. $\left(0,\frac{3}{5}\right]$　**【解析】**令$f(x)=0$得,$x=\frac{(5k-1)\pi}{5\omega}(k\in\mathbf{Z})$,若$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$内存在零点,则$\exists k\in\mathbf{Z}$满足:$\frac{\pi}{3}<\frac{(5k-1)\pi}{5\omega}<\frac{4\pi}{3}$,因为$\omega>0$,所以$5k-1>0$,所以$k\geqslant 1$,所以$\exists k\in\mathbf{Z}$,且$k\geqslant 1$满足:$\frac{3(5k-1)}{20}<\omega<\frac{3(5k-1)}{5}$,解法一:若$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$内不存在零点,则$\forall k\in\mathbf{Z}$,且$k\geqslant 1$满足$\omega\leqslant\frac{3(5k-1)}{20}$或$\omega\geqslant\frac{3(5k-1)}{5}$,得$0<\omega\leqslant\frac{3}{5}$,所以当$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$内没有零点时,$0<\omega\leqslant\frac{3}{5}$.

解法二:即$\left(\frac{3}{5},\frac{12}{5}\right)\cup\left(\frac{27}{20},\frac{27}{5}\right)\cup\cdots=\left(\frac{3}{5},+\infty\right)$,若$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$内不存在零点,则$0<\omega\leqslant\frac{3}{5}$.故答案为$\left(0,\frac{3}{5}\right]$.

14. $34;-36$　**【解析】**因为函数$f(x)=(x^2-2x)\cdot(x^2+ax+b)$的图象关于$x=-2$对称,令$f(x)=0$,可得$x^2-2x=0$,可得$x=0$或$x=2$,由对称性可知,方程$x^2+ax+b=0$的两根分别为$x=-4$、$x=-6$,由韦达定理可得$\begin{cases}-4-6=-a\\(-4)\times(-6)=b\end{cases}$,可得$\begin{cases}a=10\\b=24\end{cases}$,所以,$f(x)=x(x-2)(x^2+10x+24)=x(x-2)(x+4)(x+6)$,则$f(-4-x)=(-x-4)(-x-6)(-x)(-x+2)=x(x-2)(x+4)\cdot(x+6)=f(x)$,所以,函数$f(x)=x(x-2)(x+4)(x+6)$的图象关于直线$x=-2$对称得证,则$a+b=34$,因为$f(x)=(x^2+4x)(x^2+4x-12)$,令$t=x^2+4x=(x+2)^2-4\geqslant -4$,令$h(t)=t(t-12)=t^2-12t=(t-6)^2-36$,所以,$h(t)_{\min}=h(6)=-36$.故答案为$34;-36$.

四、解答题

15. **解:**(1)$\because f(x)=x^3+ax^2+bx+c$,

$\therefore f'(x)=3x^2+2ax+b$,　(1分)

由已知得,$\frac{1}{3}$,1是$3x^2+2ax+b=0$的两个根,

故$\begin{cases}\frac{1}{3}+1=-\frac{2a}{3}\\ \frac{1}{3}\times1=\frac{b}{3}\end{cases}$,解得 $a=-2,b=1$;　　(3 分)

此时 $f(x)=x^3-2x^2+x+c$,

则 $f'(x)=3x^2-4x+1$,令 $f'(x)<0$,解得 $\frac{1}{3}<x<1$,令 $f'(x)>0$,解得 $x<\frac{1}{3}$或 $x>1$,

所以函数 $f(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{3},1\right)$上单调递减.　　(6 分)

可知 $x=\frac{1}{3}$和 $x=1$ 均为极值点,符合题意,

$\therefore a=-2,b=1.$　　(7 分)

(2)由(1)得 $f(x)=x^3-2x^2+x+c$,

$f'(x)=3x^2-4x+1$,结合(1)可知,$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{3},1\right)$上单调递减,

$\therefore f(x)$的极小值为 $f(1)=c$,极大值为 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}+c$,　　(11 分)

若方程 $f(x)=0$ 有三个不同的实根,只需$\begin{cases}\frac{4}{27}+c>0\\ c<0\end{cases}$,

解得$-\frac{4}{27}<c<0$,$\therefore c$ 的范围是$\left(-\frac{4}{27},0\right)$.　　(13 分)

16. **解**:(1)由已知得,$X=0,20,40$,　　(1 分)

$P(X=0)=C_2^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

$P(X=20)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$,

$P(X=40)=C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,　　(4 分)

所以 X 的分布列为

X	0	20	40
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(5 分)

由已知得,$Y=20,40$,　　(6 分)

所以 $P(Y=40)=\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{3}$,

$P(Y=20)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.　　(8 分)

所以 Y 的分布列为

Y	20	40
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

(9 分)

(2)甲在第二轮得分分类如下:

选 20 分和 30 分的题所得分数为 20 分和 50 分,

选 20 分和 40 分的题所得分数为 20 分和 60 分,

选 30 分和 40 分的题所得分数为 0 分、30 分、40 分和 70 分,　　(10 分)

乙在第二轮得分分类如下:

选 20 分和 30 分的题所得分数为 0 分、20 分、30 分和 50 分,

选 20 分和 40 分的题所得分数为 0 分、20 分、40 分和 60 分,

选 30 分和 40 分的题所得分数为 0 分、30 分、40 分和 70 分,　　(11 分)

由已知及(1)得,

甲两轮的总积分不低于 90 分的概率为

$P_{甲}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right]+\frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(1\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{5}{36}$;　　(12 分)

乙两轮的总积分不低于 90 分的概率为，

$P_{乙}=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)\right]+\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{5}{48}$，　(13 分)

因为 $P_{甲}>P_{乙}$，所以甲更容易晋级复赛.　(15 分)

17. **解**：(1)过点 A 作 $AE\perp PB$ 于点 E，因为平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，且平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，

因为 $AE\subset$ 平面 PAB，所以 $AE\perp$ 平面 PBC，

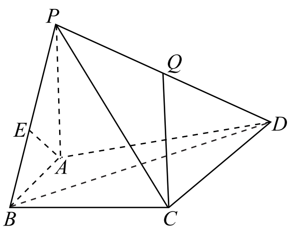
因为 $BC\subset$ 平面 PBC，所以 $AE\perp BC$；

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，

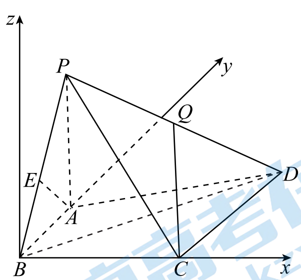
所以 $PA\perp BC$，　(3 分)

PA，$AE\subset$ 平面 PAB，$PA\cap AE=A$，所以 $BC\perp$ 平面 PAB，　(5 分)

因为 $AB\subset$ 平面 PAB，所以 $AB\perp BC$.　(6 分)



(2)以点 B 为坐标原点，BC，BA 分别为 x 轴，y 轴，过点 B 作平行于 PA 的直线为 z 轴，如图建立空间直角坐标系.



所以 $B(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$P(0,2,4)$，　(7 分)

设 $D(x,y,0)$，因为 $BD=2\sqrt{5}$，所以 $x^2+y^2=20$　①，

$AC=AD=2\sqrt{2}$，所以 $x^2+(y-2)^2=8$　②，

由①②得：$x=2$，$y=4$，所以 $D(2,4,0)$，　(9 分)

因为 $P(0,2,4)$，所以 $Q(1,3,2)$，$\overrightarrow{CQ}=(-1,3,2)$，$\overrightarrow{BP}=(0,2,4)$，$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$，

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y+4z=0\\ 2x=0\end{cases}$，令 $y=2$，得 $z=-1$，$\boldsymbol{n}=(0,2,-1)$，　(13 分)

设直线 CQ 与平面 PBC 所成的角为 θ，

$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CQ}|}{|\boldsymbol{n}|\,|\overrightarrow{CQ}|}=\frac{2\sqrt{70}}{35}$.　(15 分)

18. **解**：(1)因为 $C:\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$，所以 $F_2(3,0)$，

又因为 $PO\perp PF_2$，$|PO|=\sqrt{6}$，所以 $|PF_2|=\sqrt{3}$，　(3 分)

又由双曲线的定义可知 $|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{3}$，

所以 $|PF_1|=3\sqrt{3}$，

又因为 O 为 F_1F_2 的中点，E 为 PF_2 的中点，

所以 $|OE|=\frac{1}{2}|PF_1|=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.　(6 分)

(2)根据题意，可设直线 $l:x=my+3$，$\left(\left|\frac{1}{m}\right|>\frac{b}{a}=\sqrt{2}\right)$

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1,\\ x=my+3,\end{cases}$，

化简得 $(2m^2-1)y^2+12my+12=0$，

由题意可知 $2m^2-1\neq0$，

且 $\Delta=(12m)^2-4\times12(2m^2-1)=48(m^2+1)>0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

所以 $y_1+y_2=-\frac{12m}{2m^2-1}$，$y_1y_2=\frac{12}{2m^2-1}$，　(9 分)

所以 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}$

$=\sqrt{\left(-\frac{12m}{2m^2-1}\right)^2-4\times\frac{12}{2m^2-1}}$

$=4\sqrt{\frac{3(m^2+1)}{(2m^2-1)^2}}$

所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OF_2||y_1-y_2|$

$=6\sqrt{3}\sqrt{\frac{m^2+1}{(2m^2-1)^2}}$. (12 分)

令 $6\sqrt{3}\sqrt{\frac{m^2+1}{(2m^2-1)^2}}=6\sqrt{6}$,

解得 $m^2=1$(舍)或 $m^2=\frac{1}{8}$. (15 分)

当 $m^2=\frac{1}{8}$时,$m=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$,所以直线 $l:4x-\sqrt{2}y-12=0$ 或 $l:4x+\sqrt{2}y-12=0$. (17 分)

19. **解**:(1)结合数列 A_n 的定义,

对①,$a_1+a_2=2$,不满足 $a_i+a_j=a_s+a_t$,故①不符合; (2 分)

对②,当 $a_i+a_j=2$ 时,存在 $a_s+a_t=2$,同理当 $a_i+a_j=4$ 时,存在 $a_s+a_t=4$,当 $a_i+a_j=3$ 时,存在$a_s+a_t=3$,故②符合;

同理对③也满足,故满足题目条件的序列号为:②③. (5 分)

(2)当 $m=3$ 时,设数列 A_n 中 1,2,3 出现的频次为 q_1,q_2,q_3,

由题意知,$q_i\geqslant1$,假设 $q_1<4$ 时,$a_1+a_2<a_s+a_t$,(对任意 $s>t>2$),与已知矛盾,故 $q_1\geqslant4$, (7 分)

同理可证 $q_3\geqslant4$,

假设 $q_2=1$,数列 A_n 可表示为:1,1,1,1,2,3,3,3,3,

显然 $a_4+a_5\neq a_s+a_t$,故 $q_2\geqslant2$,

经验证 $q_2=2$ 时,显然符合 $a_i+a_j=a_s+a_t$,

所以 $q_1\geqslant4,q_2\geqslant2,q_3\geqslant4$,数列 A_n 的最短数列可表示为:1,1,1,1,2,2,3,3,3,3,

故 $S=4+4+12=20$. (10 分)

(3)由(2)知,数列 A_n 首尾应该满足 B_n:1,1,1,1,2,2,3,…,998,999,999,1 000,1 000,1 000,1 000,假设 3,4,5,…,998 中间各出现一次,此时 $n=1008$,显然满足 $a_{k+1}-a_k=0$ 或 1, (12 分)

对 $a_i=a_j=1$ 或 $a_i=a_j=1\ 000$ 时,显然满足 $a_i+a_j=a_s+a_t(q_1=4,q_{1\ 000}=4)$; (13 分)

对 $a_i=1,a_j=2$,或 $a_i=999,a_j=1\ 000$ 时,显然满足 $a_i+a_j=a_s+a_t(q_1=4,q_2=2,q_{999}=2,q_{1\ 000}=4)$; (14 分)

对 $a_i=1,a_j>2$ 时,则可选取 $a_s=2,a_k=a_j-1$,满足 $a_i+a_j=a_s+a_k$;

同理若 $a_i=1\ 000,a_j<999$,则可选取 $a_s=999,a_t=a_j+1$,满足 $a_i+a_j=a_s+a_t$; (15 分)

如果 $1<a_i\leqslant a_j<1\ 000$,则可取 $a_s=a_i-1,a_t=a_j+1$,这种情况下每个数最多被选取一次,因此也成立,

故对任意 i,j,都存在 s,t,使得 $a_i+a_j=a_s+a_t$,其中 $i,j,s,t\in\{1,2,\cdots,n\}$且两两不相等,故 n 的最小值为 1 008. (17 分)