湛江市2021年普通高考测试(一)

数　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$，则下面选项中一定成立的是

A. $A\cap B=A$　　B. $A\cap B=B$　　C. $A\cup B=B$　　D. $A\cup B=\mathbf{R}$

2. 中国数学奥林匹克由中国数学会主办，是全国中学生级别最高、规模最大、最具影响力的数学竞赛. 某重点高中为参加中国数学奥林匹克做准备，对该校数学集训队进行一次选拔赛，所得分数的茎叶图如图所示，则该集训队考试成绩的众数与中位数分别为

7	1 2 3 4 4 5 5 7
8	3 4 5 5 5 6

A. 85，75

B. 85，76

C. 74，76

D. 75，77

3. 已知圆锥的轴截面是边长为8的等边三角形，则该圆锥的侧面积是

A. 64π　　B. 48π　　C. 32π　　D. 16π

4. 将函数$f(x)=\sin x$的图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{\omega}(\omega>0)$，纵坐标不变，得到函数$g(x)$的图象，若函数$g(x)$的最小正周期为$6\pi$，则

A. $\omega=\frac{1}{3}$　　B. $\omega=6$　　C. $\omega=\frac{1}{6}$　　D. $\omega=3$

5. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则“$S_{n+1}>S_n$”是“$\{a_n\}$单调递增”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知抛物线$C:x^2=-2py(p>0)$的焦点为F，点M是C上的一点，M到直线$y=2p$的距离是M到C的准线距离的2倍，且$|MF|=6$，则$p=$

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

7. 已知$a=3.2^{0.1}$，$b=\log_2 5$，$c=\log_3 2$，则

A. $b>a>c$　　B. $c>b>a$　　C. $b>c>a$　　D. $a>b>c$

8. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_1$的直线交椭圆$C$于$A$，$B$

两点，若$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，且$|BF_2|,|AB|,|AF_2|$成等差数列，则$C$的离心率为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 若复数$z=\sqrt{3}-\mathrm{i}$，则

A. $|z|=2$　　B. $|z|=4$

C. z的共轭复数$\bar{z}=\sqrt{3}+\mathrm{i}$　　D. $z^2=4-2\sqrt{3}\mathrm{i}$

10. 已知$(1-2x)^{2021}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{2021}x^{2021}$，则

A. 展开式中所有项的二项式系数和为2^{2021}

B. 展开式中所有奇次项系数和为$\frac{3^{2021}-1}{2}$

C. 展开式中所有偶次项系数和为$\frac{3^{2021}-1}{2}$

D. $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2021}}{2^{2021}}=-1$

11. 已知函数$f(x)=x^3-3\ln x-1$，则

A. $f(x)$的极大值为0

B. 曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线为x轴

C. $f(x)$的最小值为0

D. $f(x)$在定义域内单调

12. 在梯形$ABCD$中，$AB=2AD=2DC=2CB$，将$\triangle BDC$沿BD折起，使C到C'的位置(C与C'不重合)，E,F分别为线段AB,AC'的中点，H在直线DC'上，那么在翻折的过程中

A. DC'与平面ABD所成角的最大值为$\frac{\pi}{6}$

B. F在以E为圆心的一个定圆上

C. 若$BH\perp$平面ADC'，则$\overrightarrow{DH}=3\overrightarrow{C'H}$

D. 当$AD\perp$平面BDC'时，四面体$C'ABD$的体积取得最大值

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 一条与直线$x-2y+3=0$平行且距离大于$\sqrt{5}$的直线方程为____▲____.

14. 若向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=4,|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=8$，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为____▲____，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$____▲____.(第一空3分，第二空2分)

15. 若某商品的广告费支出x(单位：万元)与销售额y(单位：万元)之间有如下对应数据：

x	2	4	5	6	8
y	20	40	60	70	80

根据上表，利用最小二乘法求得y关于x的回归直线方程为$\hat{y}=\hat{b}x+1.5$，据此预测，当投入10万元时，销售额的估计值为____▲____万元.

16. 已知$y=f(x)$的图象关于坐标原点对称，且对任意的$x\in\mathbf{R}$，$f(x+2)=f(-x)$恒成立，当$-1\leqslant x<0$时，$f(x)=2^x$，则$f(2021)=$____▲____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AD\perp CD$，$\angle BAD=\frac{3\pi}{4}$，$2AB=BD=4$.

(1)求 $\cos\angle ADB$；

(2)若 $BC=\sqrt{22}$，求 CD.

18.(12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足 $2a_n=3a_{n+1}-a_{n+2}$，$a_2-a_1=1$.

(1)证明：数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列；

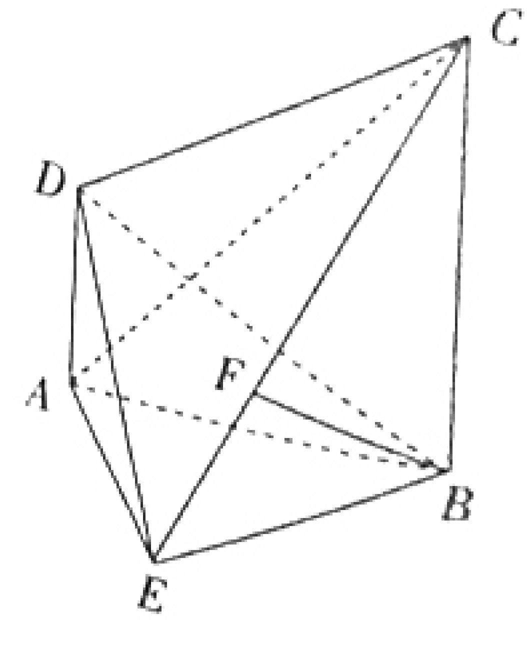
(2)若 $a_1=\frac{1}{2}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

19.(12 分)

如图，平面 $ABCD\perp$平面 ABE，$AD/\!/BC$，$BC\perp AB$，$AB=BC=2AE=2$，F 为 CE 上一点，且 $BF\perp$平面 ACE.

(1)证明：$AE\perp$平面 BCE；

(2)若平面 ABE 与平面 CDE 所成锐二面角为 60°，求 AD.



20.(12 分)

某校针对高一学生安排社团活动,周一至周五每天安排一项活动,活动安排表如下:

时间	周一	周二	周三	周四	周五
活动项目	篮球	国画	排球	声乐	书法

要求每位学生选择其中的三项,学生甲决定选择篮球,不选择书法;乙和丙无特殊情况,任选三项.

(1)求甲选排球且乙未选排球的概率;

(2)用 X 表示甲、乙、丙三人选择排球的人数之和,求 X 的分布列和数学期望.

21.(12 分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,其中 $c>0$,$M(c,3)$在 C 上,且 C 的离心率为 2.

(1)求 C 的标准方程;

(2)若 O 为坐标原点,$\angle F_1MF_2$ 的角平分线 l 与曲线 $D:\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的交点为 P,Q,试判断 OP 与 OQ 是否垂直,并说明理由.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=e^x$,$g(x)=2ax+1$.

(1)若 $f(x)\geq g(x)$恒成立,求 a 的取值集合;

(2)若 $a>0$,且方程 $f(x)-g(x)=0$ 有两个不同的根 x_1,x_2,证明:$\frac{x_1+x_2}{2}<\ln 2a$.

湛江市 2021 年普通高考测试(一)

数学参考答案

1. B　因为 $(\complement_{\mathrm{R}}A)\cap B=\varnothing$，所以 $B\subseteq A$，则 $A\cap B=B$.

2. B　因为出现次数最多的数是 85，所以众数为 85；从小到大排列，中间两个数为 75，77，所以中位数为 $\frac{75+77}{2}=76$.

3. C　由题意可知该圆锥的底面圆半径为 4，母线长为 8，则该圆锥的侧面积是 $\frac{1}{2}\times 2\pi\times 4\times 8=32\pi$.

4. A　由题意可知 $g(x)=\sin\omega x$，因为 $g(x)$ 的最小正周期为 6π，所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}=6\pi$，得 $\omega=\frac{1}{3}$.

5. D　设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，若 $S_{n+1}>S_n$，则 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=a_1q^n>0$，所以可能 $a_1>0$，$q>1$ 或 $a_1>0$，$0<q<1$；若 $a_1<0$，$q\in(0,1)$，则 $\{a_n\}$ 单调递增，但 $0>a_{n+1}>a_n\cdots>a_1$，$S_{n+1}<S_n$，故选 D.

6. A　设 $M(x_0,y_0)$，由 $2p-y_0=2(\frac{p}{2}-y_0)$，得 $y_0=-p$. 因为 $|MF|=\frac{p}{2}+p=6$，所以 $p=4$.

7. A　因为 $1<3^{0.1}<3$，$2^{0.5}<2$，$\log_2 5>\log_2 4=2$，$\log_3 2<\log_3 3=1$，所以 $b>a>c$.

8. A　设 $|BF_2|=x$，$|AB|=x+d$，则 $|AF_2|=x+2d$，

因为 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，所以 $\angle ABF_2=90^\circ$，则 $x^2+(x+d)^2=(x+2d)^2$，

解得 $x=3d$. 由椭圆的定义知 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a$，则 $4a=3x+3d=12d$，所以 $a=3d=|BF_2|$.

在直角 $\triangle BF_2F_1$ 中，$2a^2=4c^2$，即 $a=\sqrt{2}c$，故 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. AC　因为 $z=\sqrt{3}-\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$，$\bar{z}=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，$z^2=2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

10. ACD　由二项式定理可知，$(a+b)^n$ 的展开式中所有项的二项式系数和为 2^n，故 A 正确.

令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2021}=(-1)^{2021}=-1$，①

令 $x=-1$，得 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{2021}=3^{2021}$，②

①－②得 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2021}=-\frac{3^{2021}+1}{2}$，故 B 不正确.

①＋②得 $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2020}=\frac{3^{2021}-1}{2}$，故 C 正确.

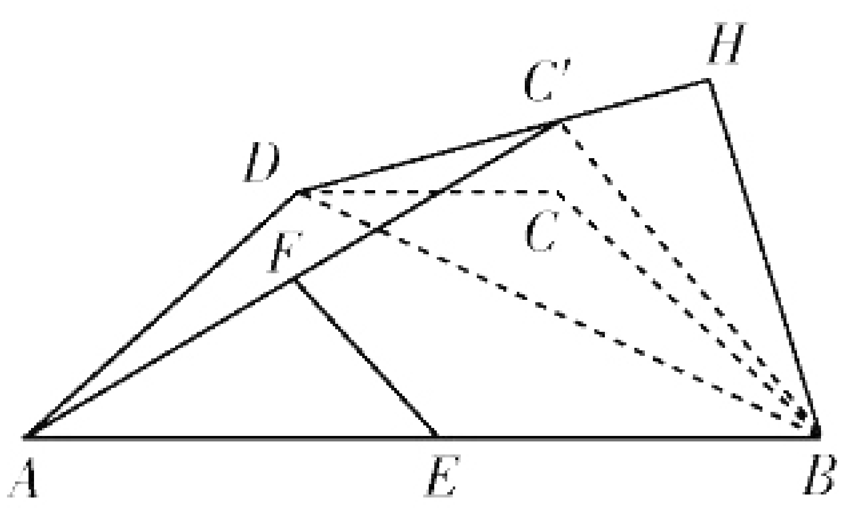
令 $x=0$，得 $a_0=1$，

令 $x=\frac{1}{2}$，得 $0=a_0+a_1\times\frac{1}{2}+a_2\times(\frac{1}{2})^2+\cdots+a_{2021}\times(\frac{1}{2})^{2021}$，

所以 $a_1\times\frac{1}{2}+a_2\times(\frac{1}{2})^2+\cdots+a_{2021}\times(\frac{1}{2})^{2021}=-a_0=-1$，故 D 正确.

11. BC　因为 $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 时取得极小值，也是最小值，无极大值. 因为 $f(1)=0$，$f'(1)=0$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线即为 x 轴.

12. ACD　如图，在梯形 $ABCD$ 中，因为 $AB/\!/CD$，$AB=2AD=2DC=2CB$，



所以易得 $AD\perp DB$，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，$\angle BDC=\angle DBC=\frac{\pi}{6}$.

在将 $\triangle BDC$ 沿 BD 翻折至 $\triangle BDC'$ 的过程中，$\angle BDC$ 与 $\angle DBC$ 的大小保持不变，由线面角的定义可知，DC' 与平面 ABD 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{6}$，故 A 正确；

因为 $\angle DBC$ 大小不变，所以在翻折的过程中，C' 的轨迹是以 BD 为轴的一个圆锥的底面圆周.

而 EF 是$\triangle ABC'$的中位线，所以点 F 的轨迹在一个圆锥的底面圆周上，
但此圆的圆心不是点 E，故 B 不正确；
当 $BH\perp$平面 ADC'时，$BH\perp DH$．

因为$\angle HC'B=\frac{\pi}{3}$，所以 $DC'=BC'=2C'H$，所以$\overrightarrow{DH}=3\overrightarrow{C'H}$，故 C 正确；

在翻折的过程中，$\triangle BC'D$ 的面积不变，显然当 $AD\perp$平面 BDC'时，四面体 $C'ABD$ 的体积取得最大值，故 D 正确．

13．$x-2y+c=0(c>8$ 或 $c<-2)$(写出符合条件的一条直线方程即可)　设与直线 $x-2y+3=0$ 平行的直线方程为 $x-2y+c=0$，由$\frac{|c-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}>\sqrt{5}$，得 $c>8$ 或 $c<-2$．

14．$\frac{3\pi}{4}$；$2\sqrt{2}$　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8$，且$|\boldsymbol{a}|=4$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$．因为$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$，所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-8}{4\times2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\theta=\frac{3\pi}{4}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$．

15．106.5　由数据表可知，$\bar{x}=\frac{2+4+5+6+8}{5}=5$，$\bar{y}=\frac{20+40+60+70+80}{5}=54$，得样本点的中心为(5，54)，代入回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+1.5$ 中，解得 $\hat{b}=10.5$，所以回归直线方程为 $\hat{y}=10.5x+1.5$，当 $x=10$ 时，$\hat{y}=10.5\times10+1.5=106.5$ 万元．

16．$-\frac{1}{2}$　因为 $y=f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+2)=f(-x)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，
所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即函数 $y=f(x)$的周期为 4，
故 $f(2021)=f(4\times505+1)=f(1)=-f(-1)=-2^{-1}=-\frac{1}{2}$．

17．解：(1)在$\triangle ABD$ 中，由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，

所以 $\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{4}$．…………………………………………………… 3 分

因为$\angle ADB<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\angle ADB=\frac{\sqrt{14}}{4}$．…………………………………… 5 分

(2)因为 $\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{4}$，且$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{4}$．…………………………………… 7 分

在$\triangle BDC$ 中，根据余弦定理得 $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC$，
化简得 $CD^2-2\sqrt{2}CD-6=(CD-3\sqrt{2})(CD+\sqrt{2})=0$，
故 $CD=3\sqrt{2}$．…………………………………………………………… 10 分

18．(1)证明：由 $2a_n=3a_{n+1}-a_{n+2}$，可知 $a_{n+2}-a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n$，…………………… 3 分
因为 $a_2-a_1=1$，
所以数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列．…………………………… 5 分
(2)解：由(1)知，数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，
所以 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$，……………………………………………………… 6 分
所以 $a_n-a_{n-1}=2^{n-2}(n\geqslant2)$，
$a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-3}$，
……
$a_3-a_2=2^1$，
$a_2-a_1=2^0$，

上述各式相加得 $a_n-a_1=2^0+2^1+\cdots+2^{n-2}=\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}-1(n\geqslant 2)$. …………………………… 9 分

因为 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $a_n=2^{n-1}-\frac{1}{2}$， …………………………… 11 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}-\frac{1}{2}$. …………………………… 12 分

19.（1）证明：因为 $BF\perp$ 平面 ACE，$AE\subset$ 平面 ACE，

所以 $BF\perp AE$. …………………………… 1 分

因为 $BC\perp AB$，且平面 $ABCD\perp$ 平面 ABE，

所以 $BC\perp$ 平面 ABE. …………………………… 2 分

因为 $AE\subset$ 平面 ACE，所以 $BC\perp AE$. …………………………… 3 分

因为 $BF\cap BC=B$，

所以 $AE\perp$ 平面 BCE. …………………………… 4 分

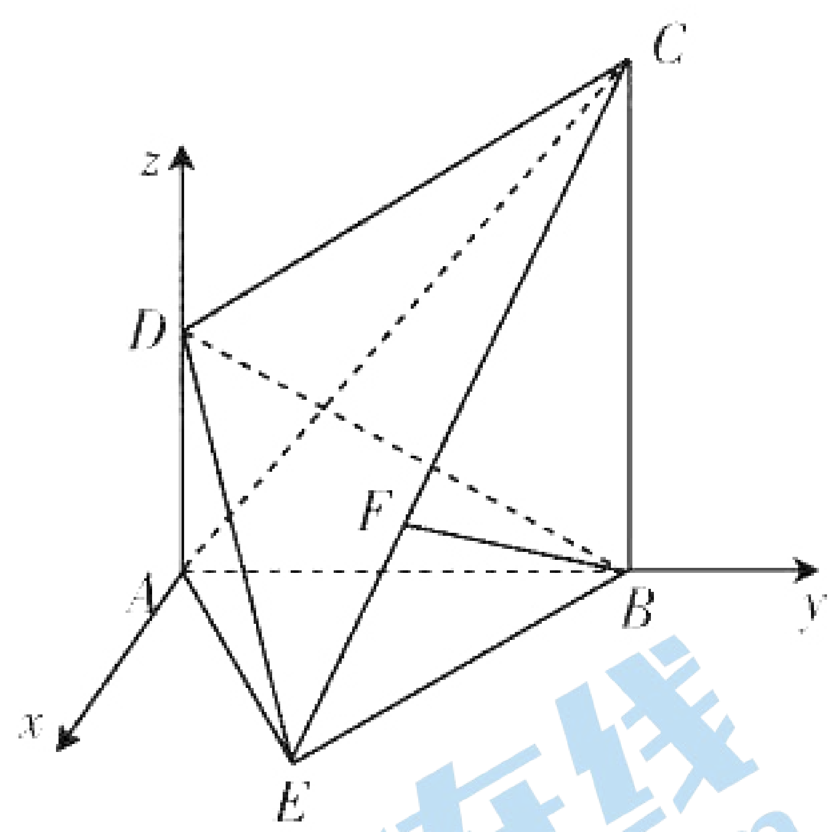
（2）解：因为 $AE\perp$ 平面 BCE，$BE\subset$ 平面 BCE，

所以 $AE\perp BE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$AB=2AE=2$，

所以 $\angle ABE=30^\circ$，$\angle BAE=60^\circ$. …………………………… 5 分

如图，以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



设 $AD=a$，则 $D(0,0,a)$，$E(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$C(0,2,2)$，

所以 $\overrightarrow{DE}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-a)$，$\overrightarrow{CE}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},-2)$. …………………………… 6 分

设平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-az=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}y-2z=0,\end{cases}$ …………………………… 8 分

令 $z=2$，则 $\boldsymbol{n}=(\frac{\sqrt{3}}{3}(2+3a),a-2,2)$. …………………………… 9 分

平面 ABE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$， …………………………… 10 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{3}(2+3a)^2+(a-2)^2+4}}=\cos 60^\circ$， …………………………… 11 分

解得 $a=\frac{\sqrt{15}}{3}$，即 $AD=\frac{\sqrt{15}}{3}$. …………………………… 12 分

20. 解：（1）设 A 表示事件"甲选排球"，B 表示事件"乙选排球"，

则 $P(A)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$. …………………………… 3 分

因为事件 A，B 相互独立，

所以甲选排球且乙未选排球的概率 $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=\frac{2}{3}\times(1-\frac{3}{5})=\frac{4}{15}$. …………………………… 6 分

（2）设 C 表示事件"丙选排球"，则 $P(C)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，

X 的可能取值为 0，1，2，3. …………………………… 7 分

$P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{75}$； …………………………… 8 分

$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{4}{15}$； …………………………… 9 分

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{11}{25}$; ………………………………… 10 分

$P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$. ………………………………… 11 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{75}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{6}{25}$

$E(X)=0\times\frac{4}{75}+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{11}{25}+3\times\frac{6}{25}=\frac{28}{15}$. ………………………………… 12 分

21. 解：(1) 由 $e=2$，得 $c=2a$，$b=\sqrt{3}a$，………………………………… 2 分

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$. ………………………………… 3 分

因为点 $M(c,3)$ 在 C 上，所以 $c=2$，$b=\sqrt{3}$，$a=1$.

故双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………… 5 分

(2) 由(1)知 $M(2,3)$，曲线 D 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

则 $\overrightarrow{MF_1}=(-4,-3)$，$\overrightarrow{MF_2}=(0,-3)$，………………………………… 6 分

所以 $\angle F_1MF_2$ 的角平分线 l 的一个方向向量为 $\frac{\overrightarrow{MF_1}}{|\overrightarrow{MF_1}|}+\frac{\overrightarrow{MF_2}}{|\overrightarrow{MF_2}|}=(-\frac{4}{5},-\frac{8}{5})$，………………………………… 8 分

可知直线 l 的斜率为 2，

即直线 l 的方程为 $y=2x-1$.

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=2x-1,\end{cases}$ 得 $19x^2-16x-8=0$. ………………………………… 9 分

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

所以 $x_1+x_2=\frac{16}{19}$，$x_1x_2=-\frac{8}{19}$. ………………………………… 11 分

所以 $y_1y_2=-\frac{45}{19}$.

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=-\frac{53}{19}\neq 0$，故 OP 与 OQ 不垂直. ………………………………… 12 分

22. (1) 解：由 $f(x)\geqslant g(x)$，可得 $e^x-2ax-1\geqslant 0$.

(i) 当 $x>0$ 时，$e^x-2ax-1\geqslant 0$ 可化为 $2a\leqslant\frac{e^x-1}{x}$.

令 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h'(x)=e^x-1$.

当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)>h(0)=0$，

故 $e^x>x+1$，即 $e^x-1>x$，$\frac{e^x-1}{x}>1$.

故要使 $2a\leqslant\frac{e^x-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则 $2a\leqslant 1$，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

(ii) 当 $x<0$ 时，$e^x-2ax-1\geqslant 0$ 可化为 $2a\geqslant\frac{e^x-1}{x}$.

令 $F(x)=\frac{e^x-1}{x}$，由(i)可知，此时 $F(x)=\frac{e^x-1}{x}<1$，故 $a\geqslant\frac{1}{2}$. ………………………………… 3 分

(iii) 当 $x=0$ 时，$a\in\mathbf{R}$. ………………………………… 4 分

综上所述，a 的值取集合为 $\{\frac{1}{2}\}$. ………………………………… 5 分

(2)证明：令 $G(x)=f(x)-g(x)$，则 $G(x)=e^x-2ax-1$，$G'(x)=e^x-2a$.

令 $G'(x)>0$，得 $x>\ln 2a$；令 $G'(x)<0$，得 $x<\ln 2a$.

所以 $G(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上单调递增.

因为方程 $f(x)-g(x)=0$ 有两个不同的根 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$，

则 $x_1\in(-\infty,\ln 2a)$，$x_2\in(\ln 2a,+\infty)$. ………………………………………………………… 6 分

要证 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln 2a$，只需证 $x_1<2\ln 2a-x_2$.

而 $2\ln 2a-x_2=\ln 2a+\ln 2a-x_2<\ln 2a$，且函数 $G(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 上单调递减.

故只需证 $G(x_1)>G(2\ln 2a-x_2)$. ………………………………………………………… 7 分

因为 $G(x_1)=G(x_2)$，所以只需证 $G(x_2)>G(2\ln 2a-x_2)$.

即只需证 $G(x_2)-G(2\ln 2a-x_2)>0$. ………………………………………………………… 8 分

记 $p(x)=G(x)-G(2\ln 2a-x)$，$x>\ln 2a$.

即 $p(x)=e^x-2ax-[e^{2\ln 2a-x}-2a(2\ln 2a-x)]=e^x-(2a)^2e^{-x}-4ax+4a\ln 2a$，

$p'(x)=e^x+\dfrac{4a^2}{e^x}-4a$. ………………………………………………………… 9 分

因为 $e^x+\dfrac{4a^2}{e^x}-4a\geq 2\sqrt{e^x\times\dfrac{4a^2}{e^x}}-4a=4a-4a=0$（当且仅当 $e^x=\dfrac{4a^2}{e^x}$，即 $x=\ln 2a$ 时，等号成立），

所以函数 $p(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. ………………………………………………………… 10 分

因为 $x_2>\ln 2a$，所以 $p(x_2)>p(\ln 2a)=0$，即 $G(x_2)-G(2\ln 2a-x_2)>0$.

所以 $G(x_1)>G(2\ln 2a-x_2)$.

因为 $G(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 上单调递减，所以 $x_1<2\ln 2a-x_2$，即 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln 2a$. ……………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。