2021 北京门头沟高三一模

数　　学

2021.3

考生须知

1.本试卷共 5 页。请将条形码粘贴在答题卡相应位置处。

2.试卷所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。

3.请使用 2B 铅笔填涂，用黑色字迹签字笔或钢笔作答。

4.考试时间 120 分钟，试卷满分 150 分。

一、选择题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.复数 $z=i(1-i)$ 的模 $|z|=$

（A）$\sqrt{2}$　　（B）2　　（C）1　　（D）

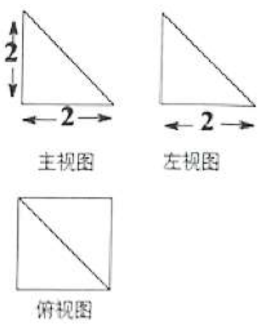
2.集合 $A=\{x|x>0\}$，$B=\{x||x|\le 2\}$, 则 $A\cap B=$

（A）R　　（B）$[-2,+\infty)$　　（C）$(0,2]$　　（D）$(0,+\infty)$

3.二项式 $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^5$ 展开式中，x^4 的系数是

（A） 40　　（B） 10　　（C） 40　　（D） -10

4.某四棱锥的三视图如图所示，则此四棱锥最长的棱长为



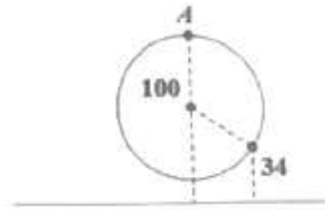
（A） 2　　（B） $2\sqrt{2}$

（C） 4　　（D） $2\sqrt{3}$

5.数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_{n+1}=-2a_n$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=|a_n|$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$

（A） $\dfrac{|1-(-2)^n|}{3}$　　（B） $\dfrac{1+2^n}{3}$　　（C） 2^n-1　　（D） $(-2)^n-1$

6.京西某游乐园的摩天轮采用了国内首创的横梁结构，风格更加简约，摩天轮直径 88 米，最高点 A 距离地面 100 米，匀速运行一圈的时间是 18 分钟.由于受到周边建筑物的影响，乘客与地面的距离超过 34 米时，可视为最佳观赏位置，在运行的一圈里最佳观赏时长为



（A）10 分钟　　（B）12 分钟　　（C）14 分钟　　（D）16 分钟

7. "$\ln(x+1)<0$"的一个必要而不充分条件是

（A）$-1<x<-\dfrac{1}{e}$　　（B）$x>0$

（C）$-1<x<0$　　（D）$x<0$

8.在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于 x 轴对称.若 $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$

（A）$-\dfrac{3}{5}$　　（B）$\dfrac{3}{5}$　　（C）1　　（D）$\dfrac{3}{4}$

9.已知抛物线 C:$y^2=2px$ 的焦点为 F，点 A 为抛物线 C 上横坐标为 3 的点，过点 A 的直线交 x 轴的正半轴于点 B，且△ABF 为正三角形，则 $p=$

（A）1　　（B）2　　（C）9　　（D）18

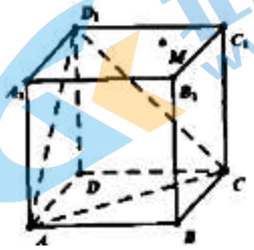
10.在平面直角坐标系中，从点 $P(-3,2)$ 向直线 $kx-y-2-k=0$ 作垂线，垂足为 M，则点 $Q(2,4)$ 与点 M 的距离$|MQ|$的最小值是

（A）$5-2\sqrt{2}$　　（B）$4\sqrt{2}$　　（C）$6\sqrt{2}$　　（D）17

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分。

11.在△ABC 中，$\angle B=\dfrac{2\pi}{3}$，$AB=1$，$BC=2$，则 AC 的长为____.

12.在边长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 是该正方体表面及其内部的一动点，且 BM//平面 AD_1C，则动点 M 的轨迹所形成区域的面积是____.



13.已知双曲线 C 的中心在坐标原点，且经过点 P（$\sqrt{2},\sqrt{3}$），下列条件中哪一个条件能确定唯一双曲线 C,该条件的序号是____；满足该条件的双曲线 C 的标准方程是____.

条件①:双曲线 C 的离心率 $e=2$；

条件②:双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$；

条件⑧:双曲线 C 的实轴长为 2.

14.函数 $f(x)=\sin\omega x\cos\omega x+\sqrt{3}\cos^2\omega x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\omega>0)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调，且 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，则 ω 的最小值为________.

15.正△ABC的边长为1，中心为O，过O的动直线l与边AB，AC分别相交于点M、N，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$.给出下列四个结论：

① $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

②若 $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{NC}=-\dfrac{1}{4}$

③ $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 不是定值，与直线 1 的位置有关

④△AMN 与△ABC 的面积之比的最小值为 $\dfrac{4}{9}$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题共 12 分）

第 24 届冬季奥运会将于 2022 年 2 月在北京和张家口举办，为了普及冬奥知识，京西某校组织全体学生进行了冬奥知识答题比赛，从全校众多学生中随机选取了 20 名学生作为样本，得到他们的分数统计如下：

分数段	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
人数	1	2	2	8	3	3	1

我们规定 60 分以下为不及格；60 分及以上至 70 分以下为及格；70 分及以上至 80 分以下为良好；80 分及以上为优秀。

（I）从这 20 名学生中随机抽取 2 名学生，恰好 2 名学生都是优秀的概率是多少?

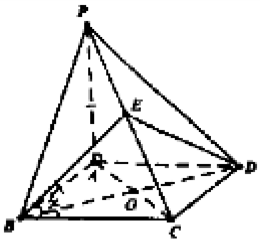
（II）将上述样本统计中的频率视为概率，从全校学生中随机抽取 2 人，以 X 表示这 2 人中优秀人数，求 X 的分布列与期望。

17.（本小题共 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $4BCD$ 为菱形，$AB=PA$，$PA\perp$底面 $ABCD,\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$E$ 是 PC 上任一点，$AC\cap BD=O$.

（I）求证：平面 $EBD\perp$平面 PAC；

（II）若 E 是 PC 的中点，求 ED 与平面 EBC 所成角的正弦值.



18.（本小题共 13 分）

已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n，数列$\{b_n\}$为等差数列，满足 $b_2=12,b_5=30$.再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求解下列问题：

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n 和它的前 n 项和 S_n；

（II）若对任意 $n\in N^*$不等式 $kS_n\geq b_n$ 恒成立，求 k 的取值范围.

条件① $a_n^2+a_n=2S_n$

条件② $a_1=9$，当 $n\geq2$，$a_2=2$，$a_{n+1}=a_n+2$

注：如果选择条件①、条件②分别解答，按第一个解答计分。

19.（本小题共 15 分）

曲线 C 上任一点 $M(x,y)$到点 $F_1(-1,0)$，$F_2(-1,0)$距离之和为 $2\sqrt{2}$，点 $P(x_0,y_0)$ 是曲线 C 上一点，直线 l 过点 P 且与直线 $x_0x+2y_0y-2=0$ 垂直，直线 l 与 x 轴交于点 Q.

（I）求曲线 C 的方程及点 Q 的坐标（用点 $P(x_0,y_0)$ 的坐标表示）；

（II）比较 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 与 $\dfrac{|QF_1|}{|QF_2|}$ 的大小，并证明你的结论.

20.（本小题共 15 分）

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}ax^2\ (a\in R)$.

（I）若曲线 $y=f(x)$ 在（0,+∞）上单调递增，求 a 的取值范围;

（II）若 $f(x)$ 在区间（0,+∞）上存在极大值 M，证明：$M<\frac{a}{2}$.

21.（本小题满分 15 分）

对于一个非空集合 A，如果集合 D 满足如下四个条件：

① $D\subseteq\{(a,b)\mid a\in A,b\in A\}$；

② $\forall a\in A,(a,a)\in D$；

③ $\forall a,b\in A,$，若 $(a,b)\in D$ 且 $(b,a)\in D$，则 $a=b$;

④ $\forall a,b,c\in A$，若 $(a,b)\in D$ 且 $(b,c)\in D$，则 $(a,c)\in D$，

则称集合 D 为 A 的一个偏序关系。

（I）设 $A=\{1,2,3\}$，判断集合 $D=\{(1,1),(1,2)(2,2),(2,3),(3,3)\}$ 是不是集合 A 的偏序关系，请你写出一个含有 4 个元素且是集合 A 的偏序关系的集合 D;

（II）证明：$R_{\le}=\{(a,b)|a\in R,b\in R,a\le b\}$ 是实数集 R 的一个偏序关系：

（III）设 E 为集合 A 的一个偏序关系，$a,b\in A$.若存在 $c\in A$,使得（c,a）$\in E$,（c,b）$\in E$，且 $\forall d\in A$，若 $(d,a)\in E$，$(d,b)\in E$，一定有 $(d,c)\in E$，则称 c 是 a 和 b 的交，记为 $c=a\wedge b$.证明：对 A 中的两个给定元素 a,b,若 $a\wedge b$ 存在，则一定唯一.

2021 北京门头沟高三一模数学

参考答案

一、选择题（本大题共 10 个小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1.解答：答案选 A. $z=1+\mathrm{i}\Rightarrow|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

2.解答：答案选 C.

3.解答：由通项公式得：$T_{r+1}=C_5^r(x^2)^{5-r}(-2)^r x^{-r}=C_5^r x^{10-3r}(-2)^r \Rightarrow 10-3r=4\Rightarrow r=2$

含有 x^4 的系数是 $C_5^2(-2)^2=40$，答案选 A.

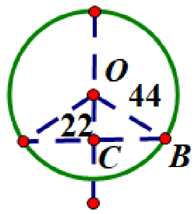
4.解：答案 D.根据直观图不难得出

最长的棱长为 $\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$

5.解答：数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，$b_1=1, q=2$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$

答案选 C.

6.解：答案 B.



法一：角速度为 $\dfrac{2\pi}{18}=\dfrac{\pi}{9}$，$OC=44-(34-12)=22$，$\angle BOC=\dfrac{\pi}{3}$，最佳观赏期的圆心角为 $2\pi-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$，在运行的一圈里最佳观赏时长为 $\dfrac{\frac{4\pi}{3}}{\frac{\pi}{9}}=12$

法二：角速度为 $\dfrac{2\pi}{18}=\dfrac{\pi}{9}$，点 P 到从最下端开始运动，运行中到地面距离为

$f(t)=44\sin(\dfrac{\pi}{9}t-\dfrac{\pi}{2})+56\ (0\le t\le 18)$

$f(t)\ge 34\Rightarrow -\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{9}t-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{7\pi}{6}\Rightarrow 3\le t\le 15$，最佳观赏期的时长为 12 分钟.

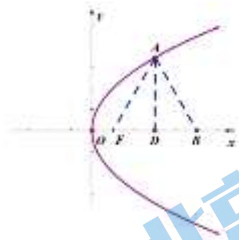
7. 解答：答案为 D.设"$\ln(x+1)<0$"的解集为 $M=\{x|-1<x<0\}$，它的必要条件的集合为 N，则 M 是 N 的真子集.

8.解答：答案 B.由题意得：$\cos\alpha=\cos\beta,\sin\alpha=-\sin\beta$，代入得：

$\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\dfrac{3}{5}$，

快速解法（口算的水平）：由三角函数定义、二倍角公式可得 $\cos^2\alpha=\dfrac{4}{5},\cos(\alpha-\beta)=2\cos^2\alpha-1=\dfrac{3}{5}$

9.解：由题意可知，当 B 在焦点 F 的右侧时，



$AF=3+\dfrac{p}{2},FD=3-\dfrac{p}{2}\Rightarrow 3-\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{2}(3+\dfrac{p}{2})\Rightarrow p=2$

当 B 在焦点 F 的左侧时，同理可得 $P=18$，此时点 B 在 x 轴的负半轴，不合题意.

10.解：答案 A.直线 $kx-y-2-k=0$ 过定点 $N(1,-2)$，可知点 M 是在以 PN 为直径的圆 $C:(x+1)^2+y^2=8$ 上，

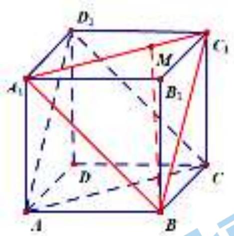
$QC=\sqrt{(2+1)^2+(4-0)^2}=5$，

可得：$|MQ|_{\min}=5-2\sqrt{2}$，答案为 A.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分.）

11.由余弦定理得：$AC=\sqrt{7}$

12.解：答案为 $2\sqrt{3}$.平面 BA_1C_1 平行平面 ACD_1，所以点 M 的轨迹是 ΔA_1C_1B 三角形及其内部.所以 $\triangle A_1BC_1$ 的面积为



$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$

13.解：①③不能唯一确定双曲线C，②能唯一确定双曲线C，设双曲线为$x^2-\frac{y^2}{3}=\lambda$，点$P(\sqrt{2},\sqrt{3})$代入得：

$\lambda=1\Rightarrow x^2-\frac{y^2}{3}=1$

注：第一空 2 分，第二空 3 分.

14.解 $f(x)=\sin\omega x\cos\omega x+\sqrt{3}\cos^2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\omega x=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})$

由题意得：$x=\frac{\pi}{3}$是它的一个称中心，$2\omega\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=k\pi\Rightarrow2\omega=3k-1$，$k\in Z$

ω最小值为 1.

15.其中所有正确结论的序号是 ①②④ .

解：① $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，可得①正确

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN})=-\frac{1}{4}$，显然②正确

③ $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3\mu}\overrightarrow{AN}$，又因为，$O,M,N$三点共线

所以，$\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{3\mu}=1\Rightarrow\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$是定值，可得③不正确

④设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}\Rightarrow\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$，由均值不等得$\lambda\mu\geq\frac{4}{9}$

$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{|AM|\cdot|AN|}{|AB|\cdot|AC|}=\lambda\mu$,由③得：$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3\Rightarrow\lambda\mu\geq\frac{4}{9}$，当且仅当$\lambda=\mu=\frac{2}{3}$时，

④正确.

本题给出的结论中，有多个符合要求，全部选对得 5 分，不选或有选错得 0 分，其它得 3 分.

三、**解答题：（本大题共 6 小题，满分 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明）**

16.解：（I）设恰好 2 名学生都是优秀这一事件为 A……………………………1 分

$P(A)=\frac{C_4^2}{C_{20}^2}=\frac{3}{95}$………………………………………………………………………2 分

注：如果没有设，给出了答也给 1 分

（II）设每名同学为优秀这一事件为B，由题意可得$P(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$……2 分

X 可取 0，1，2……………………………………………………………………1 分

$P(X=0)=C_2^0(1-\frac{1}{5})^2=\frac{16}{25}, P(X=1)=C_2^1\frac{1}{5}\times(1-\frac{1}{5})=\frac{8}{25}, P(X=2)=C_2^2(\frac{1}{5})^2=\frac{1}{25}$

……………………………………………………………………………………3 分

X	0	1	2
P	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$

……………………………………………………………………………………1 分

$EX=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ ………………………………………………………………………2 分

17.解：（I）$PA\perp$ 平面$ABCD\Rightarrow PA\perp BD$ （1）…………………………………1 分

底面 $ABCD$ 菱形，可得 $BD\perp AC$（2）………………………………………1 分

又 $PA\cap AC=A$

由（1），（2）可得，$BD\perp$ 平面PAC ………………………………………2 分

$BD\subset$ 平面EBD，平面 $EBD\perp$ 平面 PAC ………2 分

（II）若 E 是 PC 的中点，连结 OE，则

$OE\,//\,PA\Rightarrow OE\perp$ 平面$ABCD$ ……1 分

所以，OB,OC,OE 两两垂直，建立如图所示的坐标系………1 分

不妨设 $AB=2$，则 $B(\sqrt{3},0,0), D(-\sqrt{3},0,0), C(0,1,0), E(0,0,1)$ …2 分

设平面 EBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\vec{n}\cdot\vec{BE}=0, \vec{n}\cdot\vec{BC}=0\Rightarrow\vec{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$ …1 分

直线 DE 的方向向量 $\vec{n_2}=(\sqrt{3},0,1)$ ………………………………………1 分

$\cos<\vec{n_1},\vec{n_2}>=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{\sqrt{21}}{7}$ ……………………………………2 分

直线 ED 与平面 EBC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$ …………………………1 分

18.选择①解：（I）得：当 $n=1$ 时，$a_1=1$………………………1 分

当 $n\geq 2$ 时，$a_{n-1}^2+a_{n-1}=2S_{n-1}$ （1）$a_n^2+a_n=2S_n$ （2）两式相减得：

$a_n^2-a_{n-1}^2=a_n+a_{n-1}$ ……………………………………………………………2 分

而 $a_n>0$，可得：$a_n-a_{n-1}=1$，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列……………………1 分，

$a_n = 1+(n-1)\times 1 = n$ ……………………………………………………………1 分

$S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ………………………………………………………………1 分

（II）设 $b_n = b_1 + (n-1)d$， $b_2 = 12, b_5 = 30$，代入得： $b_n = 6n$ …………2 分

由 $kS_n \geq b_n$ 得： $k \geq \dfrac{12n}{n(n+1)} = \dfrac{12}{n+1}$ ……………………………………1 分

设 $c_n = \dfrac{12}{n+1}$， 则 $\{c_n\}$ 是递减数列……………………………………2 分

所以，当 $c_1 = \dfrac{12}{2} = 6$， c_n 达到最大…1 分

所以， k 的取值范围为 $[6,+\infty)$ ……………………………………………1 分

选择②

解： （I）

当 $n \geqslant 2$， $a_{n+1} = a_n + 2 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 2$， ……………………………………1 分

当 $n \geqslant 2$， $a_n = a_2 + (n-2)\times 2 \Rightarrow a_n = 2n-2$ ………………………………1 分

所以， $a_n = \begin{cases} 9 & n=1 \\ 2n-2 & n \geq 2 \end{cases}$ ………………1 分

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 9 + \dfrac{(n-1)(2+2n-2)}{2} = n^2 - n + 9$ ………2 分

（II）设 $b_n = b_1 + (n-1)d$， $b_2 = 12, b_5 = 30$，代入得： $b_n = 6n$ …………2 分

由 $kS_n \geq b_n$ 得： $k \geq \dfrac{6n}{n^2 - n + 9}$ ………………2 分

设 $c_n = \dfrac{6n}{n^2 - n + 9} = \dfrac{6}{n + \dfrac{9}{n} - 1} \leq \dfrac{6}{6-1} = \dfrac{6}{5}$， $k \geq \dfrac{6}{5}$ …………………………3 分

综上所述， k 的取值范围 $[\dfrac{6}{5},+\infty)$ ……………………………1 分

19.解： （I）由题意可知，曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆， $c=1$， $a=\sqrt{2}$， ……2 分

曲线 C 的方程为： $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ………………………………………………2 分

当 $y_0 = 0$ 时， 直线 l 与 x 轴重合，不合题意

当 $x_0 = 0$ 时， 直线 l 与 y 轴重合，点 Q 是原点， $Q(0,0)$ ……………………………1 分

当 $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ 时，由题意得：$k_l = \dfrac{2y_0}{x_0}$，直线 l 的方程：$2y_0x - x_0y - x_0y_0 = 0$…2 分

得 $Q(\dfrac{x_0}{2},0)$ ……………………………………………………………………1 分

综上所述，点 $Q(\dfrac{x_0}{2},0)$ ……………………………………………………………1 分

（II）点 $P(x_0,y_0)$ 满足方程：$\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$ ………………1 分

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}}{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}}$$ ……………………………………………………1 分

将 $y_0^2=1-\dfrac{x_0^2}{2}$ 代入整理得：$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\dfrac{\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}}{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}|x_0+2|}{\frac{1}{\sqrt{2}}|x_0-2|}=\dfrac{|x_0+2|}{|x_0-2|}$ ………2 分

$$\frac{|QF_1|}{|QF_2|}=\frac{\left|\frac{x_0}{2}+1\right|}{\left|\frac{x_0}{2}-1\right|}=\frac{|x_0+2|}{|x_0-2|}$$ ………………………………………………………1 分

所以，$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\dfrac{|QF_1|}{|QF_2|}$ …………………………………………………………………1 分

20.解：（I）$f'(x)=e^x-ax$ ………………………………………………1 分

由题意得：$f'(x)=e^x-ax\geq 0 \Rightarrow a\leq \dfrac{e^x}{x}$ …………………………………1 分

设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$，求导得：$g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$ ………………………………1 分

$g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上减，在区间 $(1,+\infty)$ 上增，$g(x)$ 的最小值为 $g(1)=e$……1 分

所以，$a\leq e$ ……………………………………………………………………1 分

（II）由（I）可知，当 $a\leq e$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，无极大值……1 分

所以，$a>e$ ………………………………………………………………………1 分

设 $h(x)=f'(x)=e^x-ax$，则 $h'(x)=e^x-a=0\Rightarrow x=\ln a$ …………………………1 分

$f'(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 上减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上增，$f'(x)$ 的最小值 $f'(\ln a)=a(1-\ln a)<0$…1 分

而 $f'(0)=1>0$，$f'(1)=e-a<0$，$f'(\ln a^2)=a(a-2\ln a)$，设 $t(x)=x-2\ln x\,(x>e)$，

求导得：$t'(x)=\dfrac{x-2}{x}>0$ $t(x)>t(e)=e-2>0$，所以，$f'(\ln a^2)=a(a-2\ln a)>0$…2 分

由零点存在定理得：$f'(x)$ 在 $(0,\ln a)$，$(\ln a,+\infty)$ 上分别有一个零点 x_1,x_2，

即 $f'(x_1)=0\Rightarrow e^{x_1}=ax_1$，$f'(x_2)=0\Rightarrow e^{x_2}=ax_2$，且 $0<x_1<1$……1 分

$f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上增，在 (x_1,x_2) 减，在 $(x_2,+\infty)$ 上增，$f(x)$ 极大值为 $f(x_1)=M$ …1 分

$M=f(x_1)=e^{x_1}-\frac{1}{2}ax_1^2=ax_1-\frac{1}{2}ax_1^2=\frac{1}{2}ax_1(2-x_1)$，由匀值不等式得，$M<\frac{a}{2}$…2 分

21.解：（I）集合 D 满足①②③，但不满足④，因为 $(1,2)\in D,(2,3)\in D$ 由题意 $(1,3)\in D$，而 $(1,3)\notin D$，所以不满足④，集合 D 不是集合 A 的偏序关系………2 分

$D=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$（开放性）……………………………………2 分

注：（I）如果只给出结果，扣 1 分

（II）证：$R_{\le}=\{(a,b)\,|\,a\in R,b\in R,a\le b\}$ 显然满足①②………..1 分

$\forall(a,b)\in D\Rightarrow a\le b$，且 $(b,a)\in D\Rightarrow b\le a$，则 $a=b$，满足条件③……1 分

$\forall a,b,c\in R$，若 $(a,b)\in R_{\le}$ 且 $(b,c)\in R_{\le}$，则 $a\le b,b\le c$，所以 $a\le c$，

所以 $(a,c)\in R_{\le}$，满足条件④…2 分

综上所述，$R_{\le}=\{(a,b)\,|\,a\in R,b\in R,a\le b\}$ 是实数集 **R** 的一个偏序关系…1 分

（III）反证法。假设对 A 中的两个给定元素 a,b，且 $a\wedge b$ 存在，但不唯一。

设 $c_1=a\wedge b$，$c_2=a\wedge b$，且 $c_1\ne c_2$ 则 $(c_1,a)\in E$，$(c_1,b)\in E$，$(c_2,a)\in E$，$(c_2,b)\in E$，其中 E 为集合 A 的一个偏序关系。……………………………2 分

且 $\forall d\in A$，若 $(d,a)\in E$，$(d,b)\in E$，一定有 $(d,c_1)\in E$，所以 $(c_2,c_1)\in E$，

……………………………………………………………………………………2 分

同理 $(c_1,c_2)\in E$，则 $c_2=c_1$，与 $c_1\ne c_2$ 矛盾。………………………………1 分

所以，对 A 中的两个给定元素 a,b，若 $a\wedge b$ 存在，则一定唯一。……1 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。