2023 北京怀柔一中高二（下）期中

数　　学

第一部分 （选择题　共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{1+a_n}$，则$a_3=$(　　　)

A. 1　　　B. 2　　　C. $\dfrac{6}{5}$　　　D. $\dfrac{2}{3}$

2. 某班周一上午共有四节课，计划安排语文、数学、美术、体育各一节，要求体育不排在第一节，则该班周一上午不同的排课方案共有(　　　)

A. 24 种　　　B. 18 种　　　C. 12 种　　　D. 6 种

3. 若a、b、c成等差数列，则（　　　）

A. $2b=a+c$　　　B. $2b=ac$　　　C. $b^2=a+c$　　　D. $b^2=ac$

4. 在$(2+x)^6$的展开式中二项式系数最大的项是（　　　）

A. 第 3 项和第 4 项　　B. 第 4 项和第 5 项　　C. 第 3 项　　　D. 第 4 项

5. 某种灯泡的使用寿命为 2000 小时的概率为 0.85，超过 2500 小时的概率为 0.35，若某个灯泡已经使用了 2000 小时，那么它能使用超过 2500 小时的概率为（　）

A. $\dfrac{17}{20}$　　　B. $\dfrac{7}{17}$　　　C. $\dfrac{7}{20}$　　　D. $\dfrac{3}{17}$

6. 为了配合创建全国文明城市的活动，我校现从 4 名男教师和 5 名女教师中，选取 3 人，组成创文明志愿者小组，若男女至少各有一人，则不同的选法共有(　　　)

A. 140 种　　　B. 70 种　　　C. 35 种　　　D. 84 种

7. 若离散型随机变量X的分布列为：

X	0	1
P	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a^2}{2}$

则X的数学期望$E(X)=$　(　　　)

A. 2　　　B. 2 或$\dfrac{1}{2}$　　　C. 2 或$\dfrac{1}{2}$　　　D. $\dfrac{1}{2}$

8. 某学生回家途中遇到红灯的概率为$\dfrac{3}{5}$，这名学生回家途中共有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，设X表示这名学生回家途中遇到红灯的次数，则$P(X\geqslant 2)$等于(　)

A. $\dfrac{81}{125}$　　　B. $\dfrac{54}{125}$　　　C. $\dfrac{36}{125}$　　　D. $\dfrac{27}{125}$

9．设$\{a_n\}$是首项为正数的等比数列，公比为q，则“$q<0$”是“对任意正整数n，$a_{2n-1}>a_{2n}$”的(　　)

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

10. 对任意$m\in\mathbf{N}^*$，若递增数列$\{a_n\}$中不大于$2m$的项的个数恰为m，且$a_1+a_2+\cdots+a_n=100$，则n的最小值为

A. 8　B. 9　C. 10　D. 11

第二部分　（非选择题　共 110 分）

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 求和：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=$__________.

12. 在$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中常数项的值为________.

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=150$，则$S_9=$______________.

14.若实数 1，$x,y,4$成等差数列，-2，a，b，c，-8成等比数列，则$\frac{y-x}{b}=$__________.

15.“斐波那契数列”是数学史上的一个著名的数列．在斐波那契数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n\in N^*)$．设数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，若已知$a_{99}=\lambda$，$S_{99}=\mu(\lambda,\mu\in R)$，则$a_{100}=$________.（用$\lambda$和$\mu$表示）

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
选项	C	B	A	D	B	B	D	A	A	C

二、填空题

11. $\frac{n}{n+1}$　12. 15　13. 270　14. $-\frac{1}{4}$　15. $\mu-\lambda+1$

三、解答题（共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16.（本小题满分 14 分）

袋中有大小相同，质地均匀的 3 个白球，5 个黑球，从中任取 2 个球，设取到白球的个数为X.

（Ⅰ）求$P(X=1)$的值；

（Ⅱ）求随机变量X的分布列和数学期望.

解：（1）X 的可能取值为：0,1,2.

“X=1”指事件“取出的 2 个球中，恰有 1 个白球”，

所以 $P(X=1)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$

（2）X 的可能取值为：0,1,2.

$P(X=0)=\frac{C_3^0C_5^2}{C_8^2}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$；

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$；

$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$

所以，随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$

17.（本小题满分 13 分）

数列$\{a_n\}$是等差数列，S_n表示其前n项之和，$a_2=6$， $a_3+a_7=0$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）求S_n的最大值.

解：（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的公差为d，

则 $a_2=a_1+d$, ①

$a_3+a_7=a_1+2d+a_1+6d=2a_1+8d=0$，即 $a_1+4d=0$ ②，

有①②解得：$a_1=8,d=-2,$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=10-2n.$

（Ⅱ）由 $a_n=10-2n\geq0$, 得 $n\leq5$, 且当 $n=5$ 时，$a_5=0$,

所以，当 $n=4$或$n=5$时，S_n 取最大值，$S_4=S_5=20$.

另解：$\because S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(8+10-2n)}{2}=n(9-n)=-n^2+9n=-\left(n-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}$,

而 $n\in N^*$, 所以，当 $n=4$或$n=5$时，S_n 取最大值，$S_4=S_5=20$.

18.（本小题满分 14 分）

某中学羽毛球兴趣小组有甲、乙、丙三位组员，在单打比赛中，没有平局，且甲赢乙的概率为0.5，甲赢丙的概率为0.6. 甲想挑战乙和丙．于是甲和乙、丙两位组员各自进行了一场比赛.

（Ⅰ）若甲两场比赛都赢了，则挑战成功，求甲挑战成功的概率；

（Ⅱ）设甲赢的场数为随机变量 X，求 X 的分布列及数学期望.

解：(1) 甲挑战成功的概率 $P=0.5\times0.6=0.3$.

(2) 由题意可知，X 的可能取值为 0，1，2，

则 $P(X=0)=(1-0.5)\times(1-0.6)=0.2$，

$P(X=1)=(1-0.5)\times0.6+0.5\times(1-0.6)=0.5$，

$P(X=2)=0.3$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.2	0.5	0.3

故 $E(X)=0\times0.2+1\times0.5+2\times0.3=1.1$.

19.（本小题满分 14 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，在条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若$\left\{b_n-\frac{1}{a_n}\right\}$是公差为 2 的等差数列，$b_1=2$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n.

条件①：$a_1=1$且$a_n-2a_{n-1}=0(n\geq 2)$；

条件②：$S_n=2^n-1$；

条件③：$2a_n-S_n=1$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【小问 1 详解】

选条件①：因为$a_1=1$，且$a_n-2a_{n-1}=0(n\geq 2)$，即$a_n=2a_{n-1}$

所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列

所以$a_n=2^{n-1}$.

选条件②：当$n=1$时，$a_1=S_1=1$

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-(2^{n-1}-1)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$

因为当$n=1$时，上式也成立，

所以$a_n=2^{n-1}$.

选条件③：因为$2a_n-S_n=1$，得$S_n=2a_n-1$

当$n=1$时，$2a_1-S_1=1$，得$a_1=1$

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-1-(2a_{n-1}-1)=2a_n-2a_{n-1}$

整理得$a_n=2a_{n-1}$

所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，2 为公比　等比数列

所以$a_n=2^{n-1}$.

【小问 2 详解】

因为$\left\{b_n-\frac{1}{a_n}\right\}$是公差为 2 的等差数列，$b_1=2$，

而$\frac{1}{a_1}=1$,所以$b_1-\frac{1}{a_1}=1$,所以$b_n-\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$,

所以$b_n=2n-1+\frac{1}{a_n}=2n-1+\frac{1}{2^{n-1}}$，

所以，数列$\{b_n\}$的前 n 项和

$$T_n=1+1+3+\frac{1}{2}+5+\frac{1}{4}+\cdots+2n-1+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=[1+3+5+\cdots+(2n-1)]+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=n^2+2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

20.（本小题满分 15 分）

为研究某地区 2022 届大学毕业生毕业三个月后的毕业去向，某调查公司从该地区 2022 届大学毕业生中随机选取了 1000 人作为样本进行调查，结果如下：

毕业去向	继续学习深造	单位就业	自主创业	自由职业	慢就业
人数	200	560	14	128	98

假设该地区 2022 届大学毕业生选择的毕业去向相互独立.

（Ⅰ）若该地区一所高校 2022 届大学毕业生的人数为 2500，试根据样本估计该校 2022 届大学毕业生选择“单位就业”的人数；

（Ⅱ）从该地区 2022 届大学毕业生中随机选取 3 人，记随机变量 X 为这 3 人中选择“继续学习深造”的人数．以样本的频率估计概率，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）该公司在半年后对样本中的毕业生进行再调查，发现仅有选择“慢就业”的毕业生中的 a $(0<a<98)$ 人选择了上表中其他的毕业去向，记此时表中五种毕业去向对应人数的方差为 s^2．当 a 为何值时，s^2 最小．（结论不要求证明）

解：（Ⅰ）由题意得，该校 2022 届大学毕业生选择“单位就业”的人数为 $2500\times\dfrac{560}{1000}=1400$．

（Ⅱ）由题意得，样本中 1000 名毕业生选择“继续学习深造”的频率为 $\dfrac{200}{1000}=\dfrac{1}{5}$．

用频率估计概率，从该地区 2022 届大学毕业生中随机选取 1 名学生，估计该生选择“继续学习深造”的概率为 $\dfrac{1}{5}$．

随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3．

所以 $P(X=0)=C_3^0(\dfrac{1}{5})^0(1-\dfrac{1}{5})^3=\dfrac{64}{125}$，$P(X=1)=C_3^1(\dfrac{1}{5})(1-\dfrac{1}{5})^2=\dfrac{48}{125}$，

$P(X=2)=C_3^2(\dfrac{1}{5})^2(1-\dfrac{1}{5})=\dfrac{12}{125}$，$P(X=3)=C_3^3(\dfrac{1}{5})^3(1-\dfrac{1}{5})^0=\dfrac{1}{125}$．

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{64}{125}$	$\dfrac{48}{125}$	$\dfrac{12}{125}$	$\dfrac{1}{125}$

$E(x)=0\times\dfrac{64}{125}+1\times\dfrac{48}{125}+2\times\dfrac{12}{125}+3\times\dfrac{1}{125}=\dfrac{3}{5}$．

（Ⅲ）$a=42$．

21．（本小题满分 15 分）

对于给定的正整数 m 和实数 α，若数列 $\{a_n\}$ 满足如下两个性质：① $a_1+a_2+\cdots+a_m=a$；②对 $\forall n\in N^*$，$a_{n+m}=a_n$，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_m(a)$．

（Ⅰ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_2(1)$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和；

（Ⅱ）对于给定的正奇数 t，若数列 $\{a_n\}$ 同时具有性质 $P_4(4)$ 和 $P_t(t)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅲ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_m(a)$，

求证：存在自然数 N，对任意的正整数 k，不等式 $\dfrac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}}{k}\geq\dfrac{a}{m}$ 均成立．

【答案】解：(I) 依题意 $a_1+a_2=1$，且 $a_{n+2}=a_n(n=1,2,\cdots)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 10 和为 5．

(II) 由于数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_4(4)$ 和 $P_1(t)$，其中 t 为大于零的奇数，

令 $t=2k-1$，$k\in N^*$，

则有 $a_{n+2}=a_{n+2+2k-1+2k-1}=a_{n+4k}=a_n$，

所以 $a_{n+1}=a_{n+1+2k-1}=a_{n+2k}=a_n$，

综上，$\{a_n\}$ 为常数列.

又因为 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_6(4)$，

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=4$，

所以 $a_n=1$.

(III) 证明：要证 $\dfrac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+1}}{k}\geqslant\dfrac{a}{m}$，

只需证 $a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+\alpha}\geqslant k\cdot\dfrac{a}{m}$，

即只需证 $(a_{N+1}-\dfrac{a}{m})+(a_{N+2}-\dfrac{a}{m})+\cdots+(a_{N+1}-\dfrac{a}{m})\geqslant 0$，

令数列 $b_n=a_n-\dfrac{a}{m}$，由于数列 $\{a_n\}$ 其有性质 $P_m(a)$，

则数列 $\{b_n\}$ 其有性质 $P_m(0)$，

令 $S_i=b_2+b_2+\cdots+b_i(i\in N^*)$，

设 S_1，S_2，…，S_m 的最小值为 $S_N(1\leqslant N\leqslant m)$，

对 $\forall k\in N^*$，令 $N+k=pm+r$，p，$r\in N$，$0<r\leqslant m$，

由于 $\{b_n\}$ 具有性质 $P_m(0)$，所以 $S_m=0$，

所以 $S_{m+r}=S_m+b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{m+r}=b_1+b_2+\cdots+b_r=S_r\geqslant S_N$，

所以 $\dfrac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}}{k}\geqslant\dfrac{a}{m}$ 成立.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16.（本小题满分 14 分）

袋中有大小相同，质地均匀的 3 个白球，5 个黑球，从中任取 2 个球，设取到白球的个数为 X.

（Ⅰ）求 $P(X=1)$ 的值；

（Ⅱ）求随机变量 X 的分布列和数学期望.

17.（本小题满分 13 分）

数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 表示其前 n 项之和，$a_2=6$，$a_3+a_7=0$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求 S_n 的最大值.

18.（本小题满分 14 分）

某中学羽毛球兴趣小组有甲、乙、丙三位组员，在单打比赛中，没有平局，且甲赢乙的概率为0.5，甲赢丙的概率为0.6. 甲想挑战乙和丙．于是甲和乙、丙两位组员各自进行了一场比赛．

（Ⅰ）若甲两场比赛都赢了，则挑战成功，求甲挑战成功的概率；

（Ⅱ）设甲赢的场数为随机变量 X，求 X 的分布列及数学期望．

19.（本小题满分 14 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，在条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若$\left\{b_n-\dfrac{1}{a_n}\right\}$是公差为 2 的等差数列，$b_1=2$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n．

条件①：$a_1=1$且$a_n-2a_{n-1}=0(n\geq 2)$；

条件②：$S_n=2^n-1$；

条件③：$2a_n-S_n=1$．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

20.（本小题满分 15 分）

为研究某地区 2022 届大学毕业生毕业三个月后的毕业去向，某调查公司从该地区 2022 届大学毕业生中随机选取了 1000 人作为样本进行调查，结果如下：

毕业去向	继续学习深造	单位就业	自主创业	自由职业	慢就业
人数	200	560	14	128	98

假设该地区 2022 届大学毕业生选择的毕业去向相互独立．

（Ⅰ）若该地区一所高校 2022 届大学毕业生的人数为 2500，试根据样本估计该校 2022 届大学毕业生选择“单位就业”的人数；

（Ⅱ）从该地区 2022 届大学毕业生中随机选取 3 人，记随机变量 X 为这 3 人中选择“继续学习深造”的人数．以样本的频率估计概率，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）该公司在半年后对样本中的毕业生进行再调查，发现仅有选择“慢就业”的毕业生中的 a $(0<a<98)$ 人选择了上表中其他的毕业去向，记此时表中五种毕业去向对应人数的方差为 s^2．当 a 为何值时，s^2 最小．（结论不要求证明）

21.（本小题满分 15 分）

对于给定的正整数 m 和实数 α，若数列 $\{a_n\}$ 满足如下两个性质：① $a_1+a_2+\cdots+a_m=a$；②对 $\forall n\in N^*$，$a_{n+m}=a_n$，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_m(a)$.

（Ⅰ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_2(1)$，求数列 $\{a_n\}$ 的前10项和;

（Ⅱ）对于给定的正奇数 t，若数列 $\{a_n\}$ 同时具有性质 $P_4(4)$ 和 $P_t(t)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（Ⅲ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_m(a)$，

求证：存在自然数 N，对任意的正整数 k，不等式 $\dfrac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}}{k}\geq\dfrac{a}{m}$ 均成立.

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
选项	C	B	A	D	B	B	D	A	A	C

二、填空题

11. $\frac{n}{n+1}$　　12. 15　　13. 270　　14. $-\frac{1}{4}$　　15. $\mu-\lambda+1$

三、解答题（共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16. 解：（1）X 的可能取值为：0,1,2.

“X=1”指事件“取出的 2 个球中，恰有 1 个白球”，

所以 $P(X=1)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$

（3）X 的可能取值为：0,1,2.

$P(X=0)=\frac{C_3^0C_5^2}{C_8^2}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$；

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$；

$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$

所以，随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$

17.解：（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $a_2=a_1+d$, ①

$a_3+a_7=a_1+2d+a_1+6d=2a_1+8d=0$，即 $a_1+4d=0$ ②，

有①②解得：$a_1=8,d=-2,$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=10-2n.$

（Ⅱ）由 $a_n=10-2n\geq 0,$ 得 $n\leq 5,$ 且当 $n=5$ 时，$a_5=0,$

所以，当 $n=4$ 或 $n=5$ 时，S_n 取最大值，$S_4=S_5=20.$

另解：$\because S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(8+10-2n)}{2}=n(9-n)=-n^2+9n=-\left(n-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4},$

而 $n\in N^*$, 所以，当 $n=4$或$n=5$时，S_n 取最大值，$S_4=S_5=20$.

18.解：(1) 甲挑战成功的概率 $P=0.5\times0.6=0.3$.

(2) 由题意可知，X 的可能取值为 0，1，2，

则 $P(X=0)=(1-0.5)\times(1-0.6)=0.2$，

$P(X=1)=(1-0.5)\times0.6+0.5\times(1-0.6)=0.5$，

$P(X=2)=0.3$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.2	0.5	0.3

故 $E(X)=0\times0.2+1\times0.5+2\times0.3=1.1$.

19.【小问 1 详解】

选条件①：因为 $a_1=1$，且 $a_n-2a_{n-1}=0(n\geq2)$，即 $a_n=2a_{n-1}$

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列

所以 $a_n=2^{n-1}$.

选条件②：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-(2^{n-1}-1)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$

因为当 $n=1$ 时，上式也成立，

所以 $a_n=2^{n-1}$.

选条件③：因为 $2a_n-S_n=1$，得 $S_n=2a_n-1$

当 $n=1$ 时，$2a_1-S_1=1$，得 $a_1=1$

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-1-(2a_{n-1}-1)=2a_n-2a_{n-1}$

整理得 $a_n=2a_{n-1}$

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比　等比数列

所以 $a_n=2^{n-1}$.

【小问 2 详解】

因为 $\left\{b_n-\frac{1}{a_n}\right\}$ 是公差为 2 的等差数列，$b_1=2$，

而 $\frac{1}{a_1}=1$, 所以 $b_1-\frac{1}{a_1}=1$, 所以 $b_n-\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$,

所以 $b_n=2n-1+\frac{1}{a_n}=2n-1+\frac{1}{2^{n-1}}$，

所以，数列$\{b_n\}$的前 n 项和

$$T_n=1+1+3+\frac{1}{2}+5+\frac{1}{4}+\cdots+2n-1+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=[1+3+5+\cdots+(2n-1)]+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=n^2+2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

20. 解：（Ⅰ）由题意得，该校 2022 届大学毕业生选择“单位就业”的人数为$2500\times\frac{560}{1000}=1400$.

（Ⅱ）由题意得，样本中1000 名毕业生选择“继续学习深造”的频率为$\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}$.

用频率估计概率，从该地区 2022 届大学毕业生中随机选取 1 名学生，估计该生选择“继续学习深造”的概率为$\frac{1}{5}$.

随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3.

所以 $P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{5})^0(1-\frac{1}{5})^3=\frac{64}{125}$， $P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{5})(1-\frac{1}{5})^2=\frac{48}{125}$，

$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{5})^2(1-\frac{1}{5})=\frac{12}{125}$， $P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{5})^3(1-\frac{1}{5})^0=\frac{1}{125}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$E(x)=0\times\frac{64}{125}+1\times\frac{48}{125}+2\times\frac{12}{125}+3\times\frac{1}{125}=\frac{3}{5}$.

（Ⅲ）$a=42$.

21.【答案】解：(I) 依题意 $a_1+a_2=1$，且 $a_{n+2}=a_n(n=1,2,\cdots)$，

所以数列$\{a_n\}$的前 10 和为5.

(II) 由于数列$\{a_n\}$具有性质 $P_4(4)$ 和 $P_t(t)$，其中 t 为大于零的奇数，

令 $t=2k-1$，$k\in N^*$，

则有 $a_{n+2}=a_{n+2+2k-1+2k-1}=a_{n+4k}=a_n$，

所以 $a_{n+1}=a_{n+1+2k-1}=a_{n+2k}=a_n$，

综上，$\{a_n\}$为常数列.

又因为$\{a_n\}$具有性质 $P_6(4)$，

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=4$，

所以 $a_n=1$.

(III) 证明：要证 $\dfrac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+1}}{k}\geqslant\dfrac{a}{m}$，

只需证 $a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+\alpha}\geqslant k\cdot\dfrac{a}{m}$，

即只需证 $(a_{N+1}-\dfrac{a}{m})+(a_{N+2}-\dfrac{a}{m})+\cdots+(a_{N+1}-\dfrac{a}{m})\geqslant 0$，

令数列 $b_n=a_n-\dfrac{a}{m}$，由于数列 $\{a_n\}$ 其有性质 $P_m(a)$，

则数列 $\{b_n\}$ 其有性质 $P_m(0)$，

令 $S_i=b_2+b_2+\cdots+b_i(i\in N^*)$，

设 S_1，S_2，…，S_m 的最小值为 $S_N(1\leqslant N\leqslant m)$，

对 $\forall k\in N^*$，令 $N+k=pm+r$，p，$r\in N$，$0<r\leqslant m$，

由于 $\{b_n\}$ 具有性质 $P_m(0)$，所以 $S_m=0$，

所以 $S_{m+r}=S_m+b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{m+r}=b_1+b_2+\cdots+b_r=S_r\geqslant S_N$，

所以 $\dfrac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}}{k}\geqslant\dfrac{a}{m}$ 成立.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。