

2023~2024 学年高三第一次联考(月考)试卷

数 学

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围:集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数及其应用。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \mid \frac{2x+1}{x-4} \leq 0\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B$ 的子集的个数为
A. 7 B. 8 C. 15 D. 16
2. 已知幂函数 $f(x) = (2m^2 - 2m - 11)x^{m+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $m =$
A. $\frac{1+\sqrt{23}}{2}$ B. 3
C. $\frac{1+\sqrt{23}}{2}$ 或 $\frac{1-\sqrt{23}}{2}$ D. 3 或 -2
3. 已知 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \neq 0$, “关于 x 的不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 与 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集相同”是“ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知函数 $f(x) = 4\ln x - |4x - 1|$, 则 $f(x)$ 的最大值为
A. -4 B. -3 C. -2 D. -1
5. 设 $a = (\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}}$, $b = (\frac{5}{4})^{\frac{1}{3}}$, $c = (\frac{3}{4})^{\frac{1}{4}}$, 则 a, b, c 的大小关系是
A. $c < a < b$ B. $c < b < a$
C. $a < c < b$ D. $b < c < a$
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2-a)x + 3a, & x < 1, \\ 2^{x^2+2x-2} - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ 的值域为 \mathbf{R} , 则 a 的取值范围是
A. $[-1, 2)$ B. $(-1, 2)$
C. $[-\frac{1}{2}, 2)$ D. $(-\frac{1}{2}, 2)$

7. 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 且 $f(3) = 0$, 则不等式 $(2x-1)f(x) > 0$ 的解集是

- A. $(-3, \frac{1}{2})$ B. $(-3, \frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$
C. $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, 3)$ D. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 若存在实数 x_1, x_2, x_3 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) =$

- $f(x_3)$, 则 $x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + x_3f(x_3)$ 的最大值为
A. $3e^3 - 12$ B. $3e^3 - 20$ C. $5e^5 - 12$ D. $5e^5 - 20$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a \neq 1, b \neq 1$, 若 $\log_a b < 1$, 则下列不等式可能成立的是
A. $(b-1)(b-a) > 0$ B. $(b-1)(a-b) > 0$
C. $(a-1)(b-a) > 0$ D. $(a-1)(a-b) > 0$
 10. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $2a + b = 1$, 则下列说法正确的是
A. ab 有最大值 $\frac{1}{8}$ B. $\sqrt{2a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$
C. $\frac{1}{a} + \frac{a}{b}$ 有最小值 4 D. $4a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 11. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax + 2$ ($a \in \mathbf{R}$), 则下列说法正确的是
A. 若 $a = 4$, 则 $f(x)$ 的极小值为 -14
B. 若 $a \leq 0$, 则函数 $f(x)$ 有极值点
C. 若 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上有极值点, 则 a 的取值范围是 $[1, 4]$
D. 若函数 $f(x)$ 恰有 3 个零点, 则 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$
 12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(1+x) = f(1-x), f(x-2) = -f(-x)$, 且当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = a \cdot x^2 + 1$, 则下列说法正确的是
A. 函数 $y = f(x-1)$ 为奇函数
B. 当 $x \in [3, 5]$ 时, $f(x) = x^2 - 8x + 14$
C. $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(99) = 1$
D. 若 $g(x) = f(x) - \log_3(x+1)$, 则 $g(x)$ 恰有 4 个不同的零点
- 三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。
13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_3(x+2) + 3, & x \geq 0, \\ f(x+4), & x < 0, \end{cases}$ 则 $f(-2023) =$ _____.
 14. $\log_2 3 \times \log_3 4 + 3^{\log_3 4} + (-1.08)^0 =$ _____.
 15. 已知 $x > \frac{1}{4}, y > 0$, 且 $x + y = \frac{3}{2y} - \frac{1}{4x-1}$, 则 y 的最大值为 _____.
 16. 已知正实数 x, y 满足 $\ln x = ye^x + \ln y$, 则 xy 的最大值为 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ 的定义域为集合 A, 集合 $B = \{x | m-2 \leq x \leq 2m-1\}$,

- (1) 若 $m=3$, 求 $A \cup B$;
- (2) 若 $A \cap B = B$, 求 m 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \log_2(2^x + 1) + ax$ 是偶函数.

- (1) 求 a 的值;
- (2) 设 $g(x) = f(x) + x, h(x) = x^2 - 2x + m$, 若对任意的 $x_1 \in [0, 4]$, 存在 $x_2 \in [0, 5]$, 使得 $g(x_1) \geq h(x_2)$, 求 m 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

- (1) 若 $f(x) > 0$ 的解集为 $\{x | -2 < x < 5\}$, 解关于 x 的不等式 $bx^2 + ax + 2b - c < 0$;
- (2) 若 $f(x) \geq 2ax + b$ 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 恒成立, 求 $\frac{b^2}{4a^2 + c^2}$ 的最大值.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 3^x + a \cdot 3^{-x} (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若 $a=3$, 求不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集;
- (2) 若 $f(1) = \frac{10}{3}, g(x) = 9^x + 9^{-x} + mf(x) + 2m - 1$, 求 $g(x)$ 的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x-2)e^x - \frac{a}{2}x^2 + ax - 1 (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若 $a=2$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2\ln x + ax (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若 $f(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围;
- (2) 设 $g(x) = x^3 - f(x), x_1, x_2$ 为函数 $g(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 x_2 < 1$.