秘密 ★ 启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：B

2023届广州市高三年级调研测试

数　学

本试卷共5页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项： 1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{y|y=x^2\}$，$B=\{x|y=\ln(2-x)\}$，则 $A\cap B=$

A．$[0,+\infty)$　　B．$(0,2)$　　C．$[0,2)$　　D．$(-\infty,2)$

2. 复数 $z=\dfrac{i}{1+2i}$ 的共轭复数 $\overline{z}$ 在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3. 已知 p：$(x+2)(x-3)<0$，q：$|x-1|<2$，则 p 是 q 的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4. 灯笼起源于中国的西汉时期，两千多年来，每逢春节人们便会挂起象征美好团圆意义的红灯笼，营造一种喜庆的氛围．如图1，某球形灯笼的轮廓由三部分组成，上下两部分是两个相同的圆柱的侧面，中间是球面除去上下两个相同球冠剩下的部分．如图2，球冠是由球面被平面截得的一部分，垂直于截面的直径被截得的部分叫做球冠的高，若球冠所在球面的半径为 R，球冠的高为 h，则球冠的面积 $S=2\pi Rh$．如图1，已知该灯笼的高为58cm，圆柱的高为5cm，圆柱的底面圆直径为14cm，则围成该灯笼中间球面部分所需布料的面积为

A．$1940\pi\ \text{cm}^2$　　B．$2350\pi\ \text{cm}^2$

C．$2400\pi\ \text{cm}^2$　　D．$2540\pi\ \text{cm}^2$

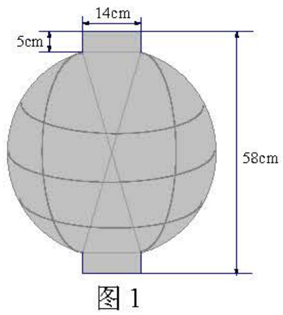


图 1

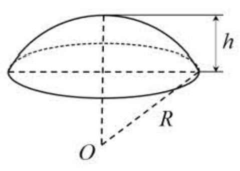


图 2

5. 若α，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，且$(1-\cos2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin2\alpha\cos\beta$，则下列结论正确的是

A. $2\alpha+\beta=\frac{5\pi}{2}$　　B. $2\alpha-\beta=\frac{3\pi}{4}$　　C. $\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$　　D. $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

6. 为调查某地区中学生每天睡眠时间，采用样本量比例分配的分层随机抽样，现抽取初中生800人，其每天睡眠时间均值为9小时，方差为1，抽取高中生1200人，其每天睡眠时间均值为8小时，方差为0.5，则估计该地区中学生每天睡眠时间的方差为

A. 0.96　　B. 0.94　　C. 0.79　　D. 0.75

7. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(x+1)+f(x-1)=2$，$f(x+2)$为偶函数，若$f(0)=2$，则$\sum\limits_{k=1}^{115}f(k)=$

A. 116　　B. 115　　C. 114　　D. 113

8. 双曲线$C:x^2-y^2=4$的左，右焦点分别为F_1，F_2，过F_2作垂直于x轴的直线交双曲线于A，B两点，$\triangle AF_1F_2$，$\triangle BF_1F_2$，$\triangle F_1AB$的内切圆圆心分别为O_1，O_2，O_3，则$\triangle O_1O_2O_3$的面积是

A. $6\sqrt{2}-8$　　B. $6\sqrt{2}-4$　　C. $8-4\sqrt{2}$　　D. $6-4\sqrt{2}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分．

9. 已知$\overline{A}$，$\overline{B}$分别为随机事件A，B的对立事件，$P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列结论正确的是

A. $P(A)+P(\overline{A})=1$　　B. $P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$

C. 若A，B互斥，则$P(AB)=P(A)P(B)$　　D. 若A，B独立，则$P(A|B)=P(A)$

10. 已知$f'(x)$是$f(x)$的导函数，$f(x)=a\sin x-b\cos x\ (ab\neq0)$，则下列结论正确的是

A. 将$f'(x)$图象上所有的点向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度可得$f(x)$的图象

B. $f(x)$与$f'(x)$的图象关于直线$x=\frac{3\pi}{4}$对称

C. $f(x)+f'(x)$与$f(x)-f'(x)$有相同的最大值

D. 当$a=b$时，$f(x)+f'(x)$与$f(x)-f'(x)$都在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

11. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}$，将△ ADC 沿对角线 AC 进行翻折，点 D 翻折至点 D'，连接 $D'B$，得到三棱锥 $D'-ABC$，则在翻折过程中，下列结论正确的是

A. 三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球表面积不变

B. 三棱锥 $D'-ABC$ 的体积最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. 异面直线 AD' 与 BC 所成的角可能是 $90°$

D. 直线 AD' 与平面 ABC 所成角不可能是 $60°$

12. 已知 $a>0$，$b>0$，$abe^{a}+\ln b-1=0$，则

A. $\ln b>\dfrac{1}{a}$　　B. $e^{a}>\dfrac{1}{b}$　　C. $a+\ln b<1$　　D. $ab<1$

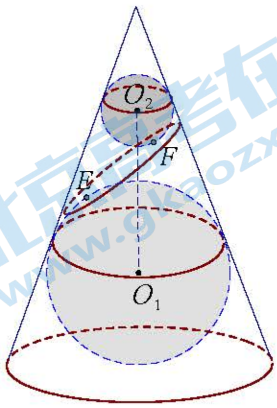
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知 $(a+x)(1+x)^5$ 的展开式中 x^4 的系数是 20，则实数 $a=$________.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,\lambda)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\lambda=$_______，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量的坐标为_______.

15. 若过点 $(0,b)\,(b>0)$ 只可以作曲线 $y=\dfrac{x}{e^{x}}$ 的一条切线，则 b 的取值范围是_______.

16. 如图是数学家 Germinal Dandelin 用来证明一个平面截圆锥得到的截口曲线是椭圆的模型．在圆锥内放两个大小不同的小球，使得它们分别与圆锥的侧面与截面都相切，设图中球 O_1，球 O_2 的半径分别为 4 和 2，球心距离 $|O_1O_2|=2\sqrt{10}$，截面分别与球 O_1，球 O_2 相切于点 E，F（E，F 是截口椭圆的焦点），则此椭圆的离心率等于_________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_6=4S_3$，$a_{2n}=2a_n+1\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=2^{n-1}a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$c=2b$，$2\sin A=3\sin 2C$.

（1）求 $\sin C$；

（2）若△ABC 的面积为 $\frac{3\sqrt{7}}{2}$，求 AB 边上的中线 CD 的长.

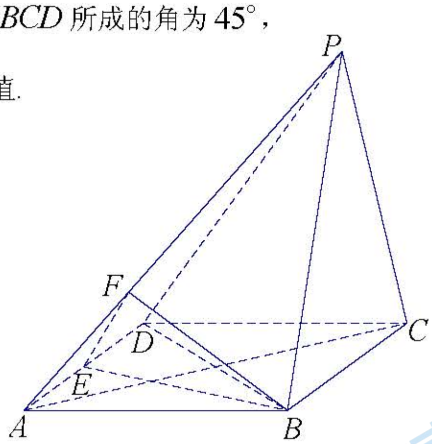
19.（12 分）

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle ACD=30°$，E 为 AD 的中点，点 F 在 PA 上，$AP=3AF$.

（1）证明：PC // 平面 BEF；

（2）若 $\angle PDC=\angle PDB$，且 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$，

求平面 AEF 与平面 BEF 夹角的余弦值.



20.（12 分）

世界卫生组织建议成人每周进行 2.5 至 5 小时的中等强度运动．已知 A 社区有 56％的居民每周运动总时间超过 5 小时，B 社区有 65％的居民每周运动总时间超过 5 小时，C 社区有 70％的居民每周运动总时间超过 5 小时，且 A，B，C 三个社区的居民人数之比为 $5:6:9$.

（1）从这三个社区中随机抽取 1 名居民，求该居民每周运动总时间超过 5 小时的概率；

（2）假设这三个社区每名居民每周运动总时间为随机变量 X（单位：小时），且 $X\sim N(5.5,\sigma^2)$．现从这三个社区中随机抽取 3 名居民，求至少有两名居民每周运动总时间为 5 至 6 小时的概率.

21.（12 分）

已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F到准线的距离为2，圆M与y轴相切，且圆心M与抛物线C的焦点重合.

（1）求抛物线C和圆M的方程；

（2）设$P\left(x_0,y_0\right)\left(x_0\neq 2\right)$为圆$M$外一点，过点$P$作圆$M$的两条切线，分别交抛物线$C$于两个不同的点$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$和点$Q\left(x_3,y_3\right),R\left(x_4,y_4\right)$．且$y_1y_2y_3y_4=16$，证明：点$P$在一条定曲线上.

22.（12 分）

已知函数$f(x)=a^x-\mathrm{e}x^2$，$a>0$且$a\neq 1$.

（1）设$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}+\mathrm{e}x$，讨论$g(x)$的单调性；

（2）若$a>1$且$f(x)$存在三个零点x_1，x_2，x_3.

（i）求实数a的取值范围；

（ii）设$x_1<x_2<x_3$，求证：$x_1+3x_2+x_3>\dfrac{2\mathrm{e}+1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

2023 届广州市高三年级调研测试

数学试题参考答案及评分标准

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．
4. 只给整数分数．选择题不给中间分．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	C	A	B	C	A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

9. ABD　　10. AC　　11. AD　　12. BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 2　　14. 2，$(-1,-1)$　　15. $\left(\dfrac{4}{e^2},+\infty\right)$　　16. $\dfrac{1}{3}$

说明：第14题第一空2分，第二空3分

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．

17.（10 分）

（1）解法 1：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$S_6=4S_3, a_{2n}=2a_n+1$得

$$\begin{cases}6a_1+15d=12a_1+12d,\\ a_1+(2n-1)d=2a_1+2(n-1)d+1.\end{cases}$$ ……………………2 分

解得$\begin{cases}a_1=1,\\ d=2.\end{cases}$ ……………………1 分

所以$a_n=1+2(n-1)=2n-1$． ……………………5 分

解法 2：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$S_6=4S_3, a_{2n}=2a_n+1$得

$$\begin{cases}6a_1+15d=12a_1+12d,\\ a_2=2a_1+1.\end{cases}$$ ……………………2 分

解得 $\begin{cases} a_1=1, \\ d=2. \end{cases}$ ……………………………………1 分

所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$． ……………………………………5 分

（2）**解法 1：** 由（1）得 $b_n=(2n-1)\times 2^{n-1}$，

$T_n=1\times 2^0+3\times 2^1+5\times 2^2+\cdots+(2n-3)\times 2^{n-2}+(2n-1)\times 2^{n-1}$，① …………6 分

$2T_n=1\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+(2n-3)\times 2^{n-1}+(2n-1)\times 2^n$，② …………7 分

①－② 得 $-T_n=1+2^2+2^3+\cdots+2^n-(2n-1)\times 2^n$ ……………………………8 分

$=1+\dfrac{2^2-2^n\times 2}{1-2}-(2n-1)\times 2^n$

$=(3-2n)\times 2^n-3$ ……………………………………9 分

所以 $T_n=(2n-3)\cdot 2^n+3$． ……………………………………………………10 分

解法 2： 由（1）得 $b_n=(2n-1)\times 2^{n-1}$，

因为 $b_n=(2n-3)\times 2^n-(2n-5)\times 2^{n-1}$， …………………7 分

则 $T_n=\left[(-1)\times 2^1-(-3)\times 2^0\right]+\left[1\times 2^2-(-1)\times 2^1\right]+\cdots+\left[(2n-3)\times 2^n-(2n-5)\times 2^{n-1}\right]$

……………………………………8 分

$=-(-3)\times 2^0+(2n-3)\times 2^n$， ……………………………………9 分

所以 $T_n=(2n-3)\times 2^n+3$． ……………………………………………………10 分

18.（12 分）

（1）由 $2\sin A=3\sin 2C$ 得 $2\sin A=3\times 2\sin C\cos C$，即 $\sin A=3\sin C\cos C$，…1 分

由正弦定理和余弦定理得 $a=3c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$， ……………………………3 分

又 $c=2b$，解得 $a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}b$． ……………………………………4 分

所以 $\cos C=\dfrac{\sin A}{3\sin C}=\dfrac{a}{3c}=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}b}{6b}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$， ……………………………5 分

（或由 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\frac{3}{2}b^2}{3\sqrt{2}b^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$）

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$． ……………………………………6 分

（2）解：因为△ ABC 的面积为 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$， ……………………7 分

所以 $ab=6\sqrt{2}$． ……………………………8 分

又 $a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}b$，$c=2b$，所以 $b=2$，$c=4, a=3\sqrt{2}$． ……………………………9 分

下面提供几种解法求 CD：

解法 1：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{8}$， ……………………………10 分

又 $AD=\dfrac{1}{2}AB=2$，

在△ ACD 中，$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos A=7$， ……………………………11 分

所以 $CD=\sqrt{7}$． ……………………………12 分

解法 2：延长 CD 至 E，使得 $CD=DE$，连 AE，则四边形 $ACBE$ 是平行四边形．

$\cos\angle EAC=\cos(\pi-\angle ACB)=-\cos\angle ACB=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$， ……………………………10 分

在△ ACE 中，$CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle EAC=28$， ……………………11 分

得 $CE=2\sqrt{7}$，

所以 $CD=\sqrt{7}$． ……………………………12 分

解法 3：因为 $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$， ……………………………10 分

所以 $|CD|^2=\overrightarrow{CD}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2)$

$=\dfrac{1}{4}(2^2+2\times2\times3\sqrt{2}\cos\angle ACB+(3\sqrt{2})^2)=7$． ……………………11 分

所以 $CD=\sqrt{7}$． ……………………………12 分

19．（12 分）

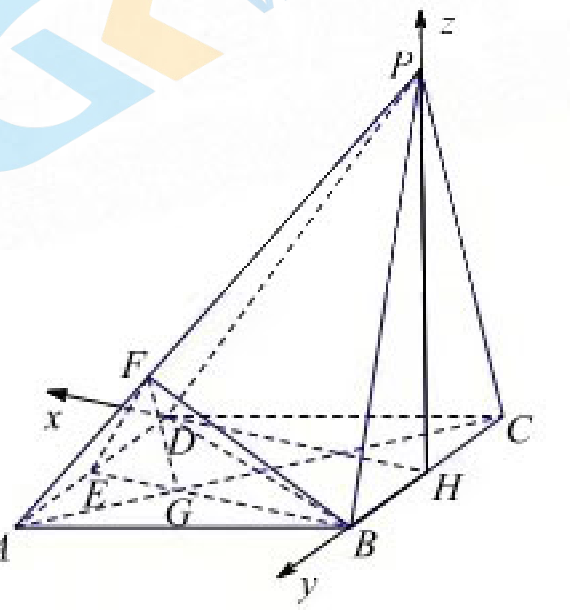
（1）证明：设 AC 交 BE 于 G，连接 FG，

因为 $AE\,/\!/\,BC$，且 $AE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC$，

所以△ AEG ∽△ CBG，所以 $\dfrac{AG}{GC}=\dfrac{1}{2}$． …1 分

又 $AP=3AF$，所以 $\dfrac{AF}{FP}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{AG}{GC}$， ……2 分

所以 $GF\,/\!/\,PC$． ……………………………3 分



又 $GF\subset$ 平面 BEF，$PC\not\subset$ 平面 BEF，

所以 $PC\,/\!/$ 平面 BEF． ……………………………4 分

（2）解：因为 $\angle ACD=30^\circ$，得 $\angle BCD=60^\circ$，又 $BC=CD$，则△ BCD 为正三角形．

又 $\angle PDC=\angle PDB$， $DB=DC$，

所以 $\triangle PDB\cong\triangle PDC$， 所以 $PB=PC$． ……………………5 分

取 BC 中点 H， 则 $PH\perp BC$． ……………………6 分

又平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$， 平面 $PBC\cap$ 平面 $ABCD=BC$，

所以 $PH\perp$ 平面 $ABCD$． ……………………7 分

所以 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle PDH=45^\circ$． ……………………8 分

设 $BC=2$， 连 DH， 则 $DH=PH=\sqrt{3}$．

如图所示，以 H 为坐标原点， HD， HB， HP 所在直线分别为 x 轴， y 轴， z 轴

建立空间直角坐标系 $H-xyz$，

则 $D(\sqrt{3},0,0)$， $B(0,1,0)$， $P(0,0,\sqrt{3})$， $E(\sqrt{3},1,0)$， $A(\sqrt{3},2,0)$，

从而由 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}=(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$， 得 $F(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{4}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$， ……………………9 分

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,-1,0)$， $\overrightarrow{BE}=(\sqrt{3},0,0)$， $\overrightarrow{BF}=(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$．

设平面 AEF 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y_1=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x_1-\frac{2}{3}y_1+\frac{\sqrt{3}}{3}z_1=0,\end{cases}$

取 $x_1=1$， 则 $z_1=1$， 故 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,1)$． ……………………10 分

设平面 BEF 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_2=0,\\ \frac{2\sqrt{3}}{3}x_2+\frac{1}{3}y_2+\frac{\sqrt{3}}{3}z_2=0,\end{cases}$

取 $z_2=1$， 则 $y_2=-\sqrt{3}$， 故 $\boldsymbol{n}_2=\left(0,-\sqrt{3},1\right)$． ……………………11 分

所以 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{1}{\sqrt{2}\times 2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$．

所以平面 AEF 与平面 BEF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$． ……………………12分

20.（12 分）

（1）解法 1：设“从这三个社区中随机抽取1名居民，该居民每周运动总时间超过5小时”为事件M，N_1,N_2,N_3分别表示所抽取的1名居民来自A,B,C社区．

依题意得 $P(N_1)=\frac{5}{5+6+9}=\frac{1}{4}$，$P(N_2)=\frac{6}{5+6+9}=\frac{3}{10}$，$P(N_3)=\frac{9}{5+6+9}=\frac{9}{20}$． …3 分

故$P(M)=P(N_1)P(M|N_1)+P(N_2)P(M|N_2)+P(N_3)P(M|N_3)$ ……………………4 分

$=\frac{1}{4}\times56\%+\frac{3}{10}\times65\%+\frac{9}{20}\times70\%=\frac{13}{20}$． ……………………………………6 分

解法 2：设“从这三个社区中随机抽取1名居民，该居民每周运动总时间超过5小时”为事件M，这三个社区的居民人数为n．

三个社区每周运动总时间超过5小时的人数为：

$\frac{5}{20}n\times0.56+\frac{6}{20}n\times0.65+\frac{9}{20}n\times0.7$． ……………………………………3 分

故$P(M)=\dfrac{\frac{5}{20}n\times0.56+\frac{6}{20}n\times0.65+\frac{9}{20}n\times0.7}{n}$ ……………………………………4 分

$=\frac{1}{4}\times0.56+\frac{3}{10}\times0.65+\frac{9}{20}\times0.7=\frac{13}{20}$． ……………………………………6 分

（2）解：由（1）知$P(X>5)=\frac{13}{20}$， ………………………………………………7 分

因为$X\sim N(5.5,\sigma^2)$，

则$P(5\le X\le 6)=\left(\frac{13}{20}-\frac{1}{2}\right)\times2=\frac{3}{10}$． ………………………………………………8 分

设η为抽取的3名居民中每周运动总时间为5小时至6小时的人数，

依题意得$\eta\sim B\left(3,\frac{3}{10}\right)$． ………………………………………………………………9 分

故$P(\eta=2)+P(\eta=3)=C_3^2(\frac{3}{10})^2\times(\frac{7}{10})+(\frac{3}{10})^3=\frac{27}{125}$． ……………………………11 分

所以至少有两名居民每周运动总时间为5小时至6小时的概率为$\frac{27}{125}$． …………12分

21.（12 分）

（1）解：由题设得$p=2$， ……………………………1 分

所以抛物线C的方程为$y^2=4x$． ……………………………2 分

因此，抛物线的焦点为$F(1,0)$，即圆M的圆心为$M(1,0)$． ……………………………3 分

由圆 M 与 y 轴相切，所以圆 M 半径为1.

所以圆 M 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$.　　　　　　　　　　　　　　　　……………………………4 分

（2）证法 1：由于 $P(x_0, y_0)(x_0\neq 2)$，每条切线都与抛物线有两个不同的交点，则 $x_0\neq 0$.

故设过点 P 且与圆 M 相切的切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，即 $kx-y+y_0-kx_0=0$.

依题意得 $\dfrac{|k+y_0-kx_0|}{\sqrt{k^2+1}}=1$.　　　　　　　　　　　　……………………………………5 分

整理得 $x_0(x_0-2)k^2-2y_0(x_0-1)k+y_0^2-1=0$. ①　　　　……………………………6 分

设直线 PA,PQ 的斜率分别为 k_1,k_2，则 k_1,k_2 是方程①的两个实根，

故 $k_1+k_2=\dfrac{2y_0(x_0-1)}{x_0(x_0-2)}$，$k_1\cdot k_2=\dfrac{y_0^2-1}{x_0(x_0-2)}$. ②　　　　……………………………7 分

由 $\begin{cases} kx-y+y_0-kx_0=0, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $ky^2-4y+4(y_0-kx_0)=0$. ③

因为点 A,B,Q,R 的纵坐标分别为 y_1,y_2,y_3,y_4，

则 $y_1y_2=\dfrac{4(y_0-k_1x_0)}{k_1}$. ④　　$y_3y_4=\dfrac{4(y_0-k_2x_0)}{k_2}$. ⑤　　……………………………8 分

由②，④，⑤三式得

$$y_1y_2y_3y_4=\frac{16(y_0-k_1x_0)(y_0-k_2x_0)}{k_1k_2}=\frac{16\left[y_0^2-(k_1+k_2)x_0y_0+x_0^2k_1k_2\right]}{k_1k_2}$$

$$=\frac{16\left[y_0^2-(k_1+k_2)x_0y_0\right]}{k_1k_2}+16x_0^2$$

$$=\frac{16\left[y_0^2-\dfrac{2y_0(x_0-1)}{x_0(x_0-2)}x_0y_0\right]}{\dfrac{y_0^2-1}{x_0(x_0-2)}}+16x_0^2=16.$$　　　　……………………………9 分

即 $y_0^2x_0(x_0-2)-2y_0(x_0-1)x_0y_0=(1-x_0^2)(y_0^2-1)$，　　……………………………10 分

即 $y_0^2x_0^2-2y_0^2x_0-2y_0^2x_0^2+2x_0y_0^2=y_0^2-x_0^2y_0^2-1+x_0^2$，即 $x_0^2+y_0^2=1$.　……11 分

所以点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上.　　　　　　　　　　　　　　　　……………………………12 分

证法 2：设切线方程为 $x-x_0=m(y-y_0)$，因为每条切线与抛物线均有两个交点，则 $y_0\neq\pm1$，

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。