北京十四中 2022—2023 学年度第一学期　期中检测

高三数学 测试卷　2022.11

班级：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

注意事项		
注意事项	1. 本试卷共两页，共 21 道小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。 2. 在答题卡上指定位置贴好条形码，或填涂考号。 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4. 在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。 5. 答题不得使用任何涂改工具。	出题人：刘莉梅 审核人：张　敏

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．若集合 $A=\{x\mid x\geq 0\}$，且 $B\subseteq A$，则集合 B 可能是（　　）

A．$\{1,2\}$　　B．$\{x\mid x\leq 1\}$　　C．$\{-1,0,1\}$　　D．R

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$ 的定义域为（　　）

A．$(0,+\infty)$　　B．$(0,1)\cup(1,+\infty)$　　C．$[0,+\infty)$　　D．$[0,1)\cup(1,+\infty)$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,m)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2)$，若 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则实数 $m=$（　　）

A．-1　　B．1　　C．2　　D．-5

4．将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图像，则 $g(x)=$（　　）

A．$\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$　　B．$\sin(2x+\dfrac{2\pi}{3})$　　C．$\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$　　D．$\sin(2x-\dfrac{2\pi}{3})$

5. 已知 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，则 $f(x)>0$ 的解集是（　　）

A．$(-1,0)$　　B．$(0,1)$　　C．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　D．$(-1,0)\cup(0,1)$

6．下列区间中，包含函数 $f(x)=e^x+x-6$ 的零点的是(　　)

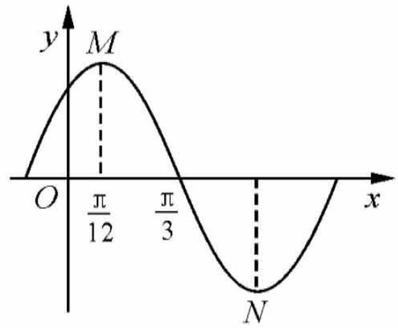
A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(3,4)$

7. 已知三角形 ABC，那么“$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|>\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$”是“三角形 ABC 为锐角三角形”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

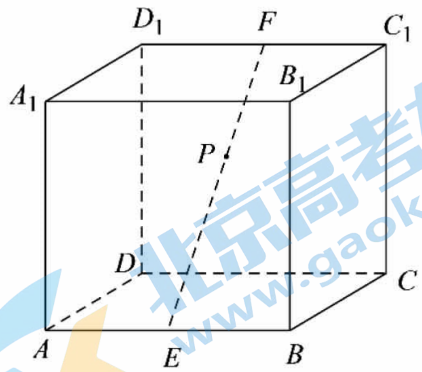
C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

8. 若函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）在一个周期内的图像如图所示，$M,N$ 分别是这段图像的最高点和最低点，且 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，（O 为坐标原点）则 $A\cdot\omega=$（　　）



A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{7}}{12}\pi$　　C. $\dfrac{\sqrt{7}}{6}\pi$　　D. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}\pi$

9．在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别为棱 AB，C_1D_1 的中点，点 P 为线段 EF 上的动点.则下面结论中错误的是（　　）



A．$PA_1=PB_1$　　B．A_1B_1 // 平面 D_1AP

C．$D_1P\perp B_1C$　　D．$\angle B_1PC$ 是锐角

10. 在标准温度和大气压下，人体血液中氢离子的物质的量的浓度（单位 mol/L，记作 $[H^+]$）和氢氧根离子的物质的量的浓度（单位 mol/L，记作 $[OH^-]$）的乘积等于常数 10^{-14}．已知 pH 值的定义为 $pH=-\lg[H^+]$，健康人体血液的 pH 值保持在 7.35～7.45 之间，那么健康人体血液中的 $\dfrac{[H^+]}{[OH^-]}$ 可以为（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）(　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{6}$　　(D) $\dfrac{1}{10}$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知 $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$，且 $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$. 则 $\cos\alpha =$________，$\tan\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) =$________.

12. 若 $f(x) = x^3 - 3x$ 的两个极值点为 x_1, x_2，则 $x_1 + x_2 =$_______.

13. 在 $\triangle ABC$ 中，$a = 2\sqrt{7}$, $b = 2$，$\angle A = 60°$，则 $c =$________；$\dfrac{\sin 2A}{\sin C} =$________.

14. 已知平面 α 和三条不同的直线 m，n，l.给出下列六个论断：①$m \perp \alpha$；②$m // \alpha$；③$m // l$；④$n \perp \alpha$；⑤$n // \alpha$；⑥$n // l$.以其中两个论断作为条件，使得 $m // n$ 成立.这两个论断可以是______.（填上你认为正确的一组序号）

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x, & x \geqslant a, \\ 2x, & x < a \end{cases}$.

① 若 $a = 0$，则函数 $f(x)$ 的零点有________个；

② 若存在实数 m，使得函数 $y = f(x) + m$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）

16.（本小题满分 14 分）

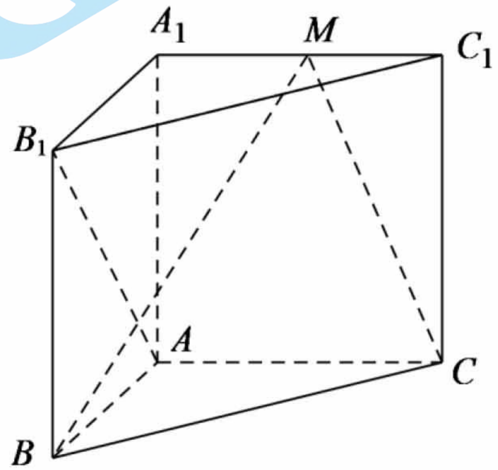
如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，$AA_1 \perp$ 平面 ABC, $AB \perp AC$, $AB = AC = AA_1 = 1$，

M 为线段 A_1C_1 上的一点.

（Ⅰ）求证：$BM \perp AB_1$；

（Ⅱ）若 M 为线段 A_1C_1 的中点，

求直线 AB_1 与平面 BCM 所成角大小.



17.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x-2\sin^2 x+1$.

(Ⅰ) 求 $f(\frac{\pi}{4})$ 的值;

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 的最小正周期及对称轴方程;

(Ⅲ) 求 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的单调递增区间.

18.（本小题满分 14 分）

开展中小学生课后服务，是促进学生健康成长、帮助家长解决接送学生困难的重要举措，是进一步增强教育服务能力、使人民群众具有更多获得感和幸福感的民生工程。某校为确保学生课后服务工作顺利开展，制定了两套工作方案，为了解学生对这两个方案的支持情况，现随机抽取 100 个学生进行调查，获得数据如下表：

	男	女
支持方案一	24	16
支持方案二	25	35

假设用频率估计概率，且所有学生对活动方案是否支持相互独立.

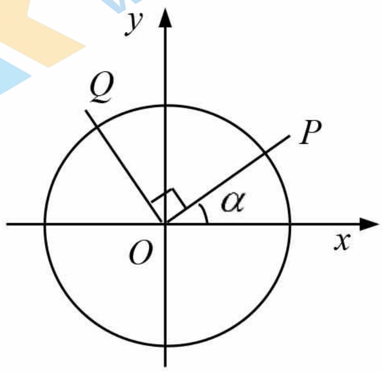
（Ⅰ）从样本中抽 1 人，求已知抽到的学生支持方案二的条件下，该学生是女生的概率；

（Ⅱ）从该校支持方案一和支持方案二的学生中各随机抽取 1 人，设 X 为抽出两人中女生的个数，求 X 的分布列与数学期望；

（Ⅲ）在（Ⅱ）中，Y 表示抽出两人中男生的个数，试判断方差 $D(X)$ 与 $D(Y)$ 的大小.（直接写结果）

19.（本小题满分 15 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，设锐角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点 $P(x_1,y_1)$，将射线 OP 绕坐标原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后与单位圆交于点 $Q(x_2,y_2)$．记 $f(\alpha)=y_1+y_2$．



（Ⅰ）求函数 $f(\alpha)$ 的值域；

（Ⅱ）设 ΔABC 的角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $f(C)=\sqrt{2}$，$c=1$，求 ΔABC 面积的最大值．

20.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅲ）当 $x\in\left[2,3\right]$ 时，如果曲线 $y=f\left(x\right)$ 恒在 x 轴上方，求 a 的取值范围.

21.（本小题 14 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且椭圆 C 经过点 $(1,\frac{\sqrt{6}}{2})$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）已知过点 $P(4,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A，B，与直线 $x=1$ 交于点 Q，设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{QB}$ (λ，$\mu\in\mathbf{R}$)，求证：$\lambda+\mu$ 为定值.

参考答案

一、选择题

（1）A　（2）B　（3）D　（4）B　（5）C

（6）B　（7）B　（8）C　（9）D　（10）C

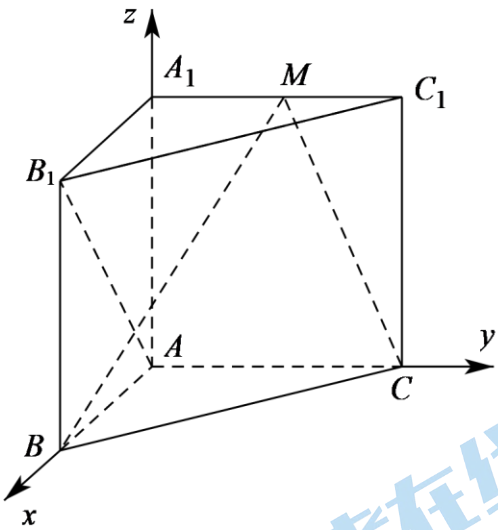
二、填空题

11. $-\frac{4}{5},-7$　　12. 0　　13. $6;\frac{\sqrt{7}}{3}$

14. ①④（或③⑥）　　15. 2； $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

(两空的都第一空 3 分，第二空 2 分)

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）



16．(14 分)证明：因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC， $AB,AC\subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1\perp AB, AA_1\perp AC$，

因为 $AB\perp AC$，所以 AB,AC,AA_1 两两垂直，

所以以 A 为原点，分别以 AB,AC,AA_1 所在的直线为 x,y,z 建立空间直角坐标系，如图所示，…………2 分

则 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(0,1,0),A_1(0,0,1),B_1(1,0,1),C_1(0,1,1)$，

设 $M(0,a,1)$，

所以 $\overrightarrow{BM}=(-1,a,1),\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1)$， ………………4 分

所以 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-1+0+1=0$，

所以 $\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{AB_1}$，所以 $BM\perp AB_1$　…………6 分

（2）因为 M 为线段 A_1C_1 上的中点，所以 $M\left(0,\frac{1}{2},1\right)$，

所以 $\overrightarrow{BM}=\left(-1,\frac{1}{2},1\right)$， $\overrightarrow{BC}=(-1,10)$，

设平面 BCM 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BM}=-x+\frac{1}{2}y+z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-x+y=0\end{cases}$$，令 $x=1$，则 $\vec{m}=\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$， ………………9 分

设直线 AB_1 与平面 BCM 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{m},\overrightarrow{AB_1}\right\rangle\right|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\vec{m}||\overrightarrow{AB_1}|}\right|=\frac{1+0+\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$， …………12 分

因为$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\theta=\frac{\pi}{4}$，

所以直线AB_1与平面BCM所成角的大小为$\frac{\pi}{4}$.　　………………14 分

17、（本小题 14 分）

（Ⅰ）$f(x)=2\sin x\cos x-2\sin^2 x+1=\sin 2x+\cos 2x$　　---------2 分

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$　　---------4 分

$\therefore f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})=1$　　---------6 分

{ 或直接求 $f(\frac{\pi}{4})=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-2\sin^2\frac{\pi}{4}+1=1$　　---------2 分　}

（II）所以 $f(x)$ 的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$　　---------6 分

令 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$ $\therefore$ **对称轴方程为** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k}{2}\pi(k\in Z)$　---------9 分

(III) **令** $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，　　---------10 分

$\therefore$ **单调递增区间为** $[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi](k\in Z)$　　---------12 分

又$x\in(0,\pi)$，所以$g(x)$在$(0,\pi)$上的单调递增区间有$\left(\frac{5\pi}{8},\pi\right)$和$\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$---------14 分

18．（本小题满分 14 分）

(1)解：依题意支持方案二的学生中，男生有25 人、女生35 人，所以抽到的是女生的概率

$P=\frac{35}{25+35}=\frac{7}{12}$.　　……………………3 分

(2)解：记从方案一中抽取到女生为事件A，从方案二中抽取到女生为事件B，

则$P(A)=\frac{16}{24+16}=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{35}{25+35}=\frac{7}{12}$，………………5 分

则 X 的可能取值为0、1、2，

所以$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\left(1-\frac{7}{12}\right)=\frac{1}{4}$，$P(X=1)=\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{7}{12}+\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{7}{12}\right)=\frac{31}{60}$

$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{7}{12}=\frac{14}{60}$，

所以 X 的分布列为:　　…………………… 9 分

X	0	1	2

P	$\frac{1}{4}$	$\frac{31}{60}$	$\frac{14}{60}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{31}{60}+2\times\frac{14}{60}=\frac{59}{60}$. ………………11 分

(3)解：依题意可得 $Y=2-X$，所以 $D(Y)=D(2-X)=(-1)^2D(X)=D(X)$，

即 $D(Y)=D(X)$. ……………………14 分

19.（本小题 15 分）

（I）由题意，得 $y_1=\sin\alpha, y_2=\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha$， ………………3 分

所以 $f(\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$， ………………5 分

因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$，故 $f(\alpha)\in(1,\sqrt{2}]$. ………7 分

（II）因为 $f(C)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+C)=\sqrt{2}$，

$C\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$， ………………9 分

在 ΔABC 中，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

即 $1=a^2+b^2-\sqrt{2}ab\geq(2-\sqrt{2})ab$， ……………13 分

即 $ab\leq\frac{1}{(2-\sqrt{2})}$，当且仅当 $a=b$ 时取等，

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{2}}{4}ab\leq\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{1}{2-\sqrt{2}})=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ …………15 分

20.（本小题满分 14 分）

（1）$a=1$ 时，$f(x)=\ln x-x$，$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

故 $f(1)=-1$，$f'(1)=0$，

故切线方程是：$y+1=0$，即 $y=-1$； …………3 分

（2）

$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，$x>0$，

①当 $a\leqslant0$ 时，由于 $x>0$，故 $1-ax>0$，∴ $f'(x)>0$，

∴ $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调减区间；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，

在区间$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上，$f'(x)>0$；在区间$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上，$f'(x)<0$；

$\therefore$ $f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，单调递减区间为$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$；

综上，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$，无单调减区间；

当$a>0$时，$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，单调递减区间为$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.　　…………8 分

（3）

由题意知 $f(x)>0$ 在$[2,3]$上恒成立，即$a<\dfrac{\ln x}{x}$在$[2,3]$上恒成立，

令$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x\in[2,3]$，

则$h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

令$h'(x)>0$，解得：$0<x<\mathrm{e}$；令$h'(x)<0$，解得：$x>\mathrm{e}$；

故$h(x)$在$[2,\mathrm{e})$递增，在$(\mathrm{e},3]$递减，

而$h(2)=\dfrac{\ln 2}{2}=\ln 2^{\frac{1}{2}}<h(3)=\dfrac{\ln 3}{3}=\ln 3^{\frac{1}{3}}$，

$\therefore$在$[2,3]$上$h(x)_{\min}=h(2)=\dfrac{\ln 2}{2}$，

故$a<\dfrac{\ln 2}{2}$，即 a 的范围为$(-\infty,\dfrac{\ln 2}{2})$　　……………………14 分

（21）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意可知$\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$得$b^2=2$，$a^2=4$.

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.　　……………5 分

（Ⅱ）由题意可知，直线l的斜率存在，设直线l的方程为$y=k(x-4)$.

由$\begin{cases}y=k(x-4),\\ x-1=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\ y=-3k.\end{cases}$所以$Q(1,-3k)$.

由$\begin{cases}y=k(x-4),\\ x^2+2y^2=4\end{cases}$得$x^2+2(kx-4k)^2=4$．整理得$(1+2k^2)x^2-16k^2x+(32k^2-4)=0$.

由$\Delta=(-16k^2)^2-4(1+2k^2)(32k^2-4)>0$，得$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}<k<\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

设直线l与椭圆C的交点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\dfrac{16k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{32k^2-4}{1+2k^2}$.

因为$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{QB}$且$\overrightarrow{AP}=(4-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{PB}=(x_2-4,y_2)$，

$\overrightarrow{AQ}=(1-x_1,-3k-y_1)$，$\overrightarrow{QB}=(x_2-1,y_2+3k)$，

所以$\lambda+\mu=\dfrac{4-x_1}{x_2-4}+\dfrac{1-x_1}{x_2-1}=\dfrac{(4-x_1)(x_2-1)+(1-x_1)(x_2-4)}{(x_2-4)(x_2-1)}$

$=\dfrac{5(x_1+x_2)-2x_1x_2-8}{(x_2-4)(x_2-1)}$.

因为$5(x_1+x_2)-2x_1x_2-8=5\times\dfrac{16k^2}{1+2k^2}-2\times\dfrac{32k^2-4}{1+2k^2}-8$

$=\dfrac{80k^2-64k^2+8-8-16k^2}{1+2k^2}=0$，

所以$\lambda+\mu=0$.　　　　……………14分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。