房山区 2021 年高三一模试题

数 学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回，试卷自行保存。

第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)若集合 $M=\{-2,-1,1\}$，集合 $N=\{0,1\}$，则 $M\cup N$ 等于

(A) $\{-2,-1,0,1\}$　　(B) $\{-2,-1,1\}$　　(C) $\{-2,-1,0\}$　　(D) $\{1\}$

(2)下列函数中，值域为 $[0,+\infty)$ 且为偶函数的是

(A) $y=\cos x$　　(B) $y=|x+1|$　　(C) $y=x^2$　　(D) $y=x-x^3$

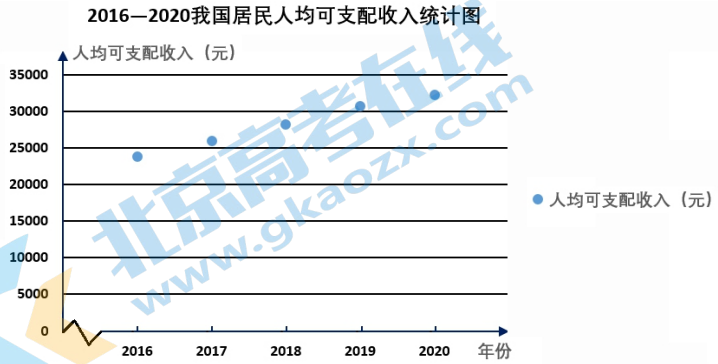
(3)已知 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则下列各式中一定成立的是

(A) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(B) $a^3>b^3$　　（C） $ab>b^2$　　(D) $2^{|a|}>2^{|b|}$

(4)将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 的图象的一条对称轴方程为

(A) $x=-\frac{\pi}{6}$　　(B) $x=-\frac{\pi}{12}$　　(C) $x=\frac{\pi}{12}$　　(D) $x=\frac{\pi}{6}$

(5) “十三五”期间，我国大力实施就业优先政策，促进居民人均收入持续增长. 下面统计图反映了 $2016-2020$ 年我国居民人均可支配收入（单位：元）情况. 根据图中提供的信息，下列判断不正确的是



(A) $2016-2020$ 年，全国居民人均可支配收入每年都超过 20000 元

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

(B) $2017-2020$ 年，全国居民人均可支配收入均逐年增加

(C) 根据图中数据估计，2015 年全国居民人均可支配收入可能高于 20000 元

(D) 根据图中数据预测，2021 年全国居民人均可支配收入一定大于 30000 元

(6)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则点 M $(3,0)$ 到双曲线 C 的渐近线的距离为

(A) 2　　(B) $\sqrt{6}$　　(C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　(D) $2\sqrt{2}$

(7)“$a^2=1$”是“直线 $x+ay=1$ 与 $ax+y=1$ 平行”的

(A)充分而不必要条件　　(B)必要而不充分条件

(C)充要条件　　(D)既不充分也不必要条件

(8)在矩形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O，E 是线段 OD 的中点，若 $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$，则 $m-n$ 的值为

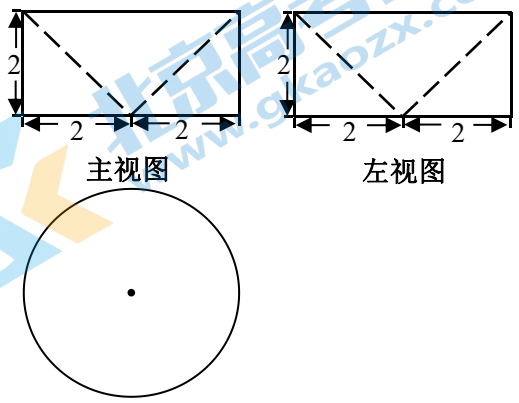
(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) -1　　(C) 1　　(D) $\frac{1}{2}$

(9)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_7>S_8$，$S_8=S_9<S_{10}$，则下面结论错误的是

(A) $a_9=0$　　(B) $S_{15}>S_{14}$

(C) $d<0$　　(D) S_8 与 S_9 均为 S_n 的最小值

(10)祖暅是我国南北朝时代伟大的科学家，他在实践的基础上提出了体积计算的原理：“幂势既同，则积不容异”. 意思是：如果两个等高的几何体在同高处截得的截面面积恒等，那么这两个几何体的体积相等，此即祖暅原理. 利用这个原理求球的体积时，需要构造一个满足条件的几何体，已知该几何体三视图如图所示，用一个与该几何体的下底面平行且相距为 $h(0<h<2)$ 的平面截该几何体，则截面面积为



关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。

(A) 4π　　(B) $4\pi h^2$　　(C) $\pi\left(2-h^2\right)$　　(D) $\pi\left(4-h^2\right)$

第二部分 （非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 若 i 为虚数单位，则 $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$_____.

(12) 二项式 $(x-\dfrac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是_____（用数字作答）.

(13) 抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点为 F，则点 F 的坐标为_____，若抛物线上一点 A 到 y 轴的距离为 2，则 $|AF|=$_____.

(14) 设 $a>0$，$b>0$，则使得命题“若 $\lg(a+b)>0$，则 $\lg(ab)>0$”为假命题的一组 a,b 的值是_____.

(15) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对于任意 $x\in D$，存在 $y\in D$，使 $\dfrac{f(x)-f(y)}{2}=C$（C 为常数）成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上的“半差值”为 C．下列四个函数中，满足所在定义域上“半差值”为 2 的函数是_____（填上所有满足条件的函数序号）.

① $y=\mathrm{e}^x(x+1)$　　② $y=x^3-1$　　③ $y=\log_2 x$　　④ $y=\sin x$

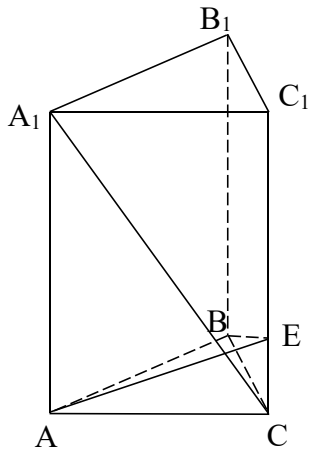
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，已知 $AB=BC=1$，$AC=\sqrt{2}$，$BB_1=2$，E 为 CC_1 上一点，且 $EC=\dfrac{1}{2}$.

（I）求证：平面 $ABE\perp$ 平面 B_1BCC_1；

（II）求直线 A_1C 与平面 ABE 所成角的正弦值.



关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（17）（本小题 14 分）

在△ ABC 中，$B=\dfrac{2\pi}{3}$，$b=\sqrt{7}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，求：

（Ⅰ）$\sin C$ 的值；

（Ⅱ）△ ABC 的面积.

条件①：AB 边上的高为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

条件②：$\cos A=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$；

条件③：$a=1$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

单板滑雪 U 型池比赛是冬奥会比赛中的一个项目，进入决赛阶段的12 名运动员按照预赛成绩由低到高的出场顺序轮流进行三次滑行，裁判员根据运动员的腾空高度、完成的动作难度和效果进行评分，最终取单次最高分作为比赛成绩.

现有运动员甲、乙二人在2021 赛季单板滑雪 U 型池世界杯分站比赛成绩如下表：

分站	运动员甲的三次滑行成绩			运动员乙的三次滑行成绩		
	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 1 次	第 2 次	第 3 次
第 1 站	80.20	86.20	84.03	80.11	88.40	0
第 2 站	92.80	82.13	86.31	79.32	81.22	88.60
第 3 站	79.10	0	87.50	89.10	75.36	87.10
第 4 站	84.02	89.50	86.71	75.13	88.20	81.01
第 5 站	80.02	79.36	86.00	85.40	87.04	87.70

假设甲、乙二人每次比赛成绩相互独立.

（Ⅰ）从上表5 站中随机选取1站，求在该站运动员甲的成绩高于运动员乙的成绩的概率；

（Ⅱ）从上表5 站中任意选取 2 站，用 X 表示这 2 站中甲的成绩高于乙的成绩的站数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）假如从甲、乙 2 人中推荐1 人参加2022 年北京冬奥会单板滑雪 U 型池比赛，根据以上数据信息，你推荐谁参加，并说明理由.

（**注**：方差 $s^2=\dfrac{1}{n}\left[\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\bar{x}\right)^2\right]$，其中 $\bar{x}$ 为 x_1，x_2，…，x_n 的平均数）

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=2x^3-2x^2+3$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $x\in\left(0,+\infty\right)$，求证：$f(x)\geqslant 2x+1$；

（Ⅲ）设 $h(x)=8x^2-34$，是否存在唯一的自然数 m，使得 $h(x)$ 与 $f(x)$ 的图象在区间 $(m,m+1)$ 上有两个不同的公共点？若存在，试求出 m 的值，若不存在，请说明理由.

（20）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 过点 $\left(2,0\right)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设点 M 为椭圆 C 的上顶点，A,B 是椭圆 C 上两个不同的动点（不在 y 轴上），直线 MA,MB 的斜率分别为 k_1,k_2，且 $k_1k_2=3$，求证：直线 AB 过定点 $N(0,-\dfrac{5}{3}\sqrt{3})$.

(21)(本小题 14 分)

对于数列 $\left\{a_n\right\}$，记 $b_n=\max\left\{a_1,a_2,\cdots,a_n\right\}(n=1,2,3,\cdots)$，其中 $\max\left\{a_1,a_2,\cdots,a_k\right\}$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 这 k 个数中最大的数，并称数列 $\left\{b_n\right\}$ 是 $\left\{a_n\right\}$ 的“控制数列”，如数列 $1,2,3,2$ 的“控制数列”是 $1,2,3,3$.

（Ⅰ）若各项均为正整数的数列 $\left\{a_n\right\}$ 的“控制数列”为 $1,3,4,4$，写出所有的 $\left\{a_n\right\}$；

（Ⅱ）设 $a_n=an^2-2n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

（i）当 $a>0$ 时，证明:存在正整数 m，使得 $\dfrac{b_m}{m},\dfrac{b_{m+1}}{m+1},\dfrac{b_{m+2}}{m+2},\cdots$ 是等差数列；

（ii）当 $a\in\left[-2,2\right]$ 时，求 $\dfrac{b_1}{1}+\dfrac{b_2}{2}+\dfrac{b_3}{3}+\dfrac{b_4}{4}$ 的值（结果可含 a）.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

房山区 2021 年高三一模试题参考答案

数学

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	(A)	(C)	(B)	(C)	(D)	(B)	(B)	(A)	(C)	(D)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）$-i$　（12）-160　（13）$(2,0);4$　（14）满足 $a+b>1$ 且 $ab\leqslant 1$ 即可　（15）② ③

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)(Ⅰ)证明：

解：（I）解法 1

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，

所以 $B_1B\perp$ 平面 ABC.

又因为 $AB\subset$ 平面 ABC，

所以 $B_1B\perp AB$.

又因为 $AB=BC=1, AC=\sqrt{2}$，

所以 $AC^2=AB^2+BC^2$.

所以 $AB\perp BC$.

因为 $B_1B\cap BC=B$， $B_1B, BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1.

因为 $AB\subset$ 平面 ABE，

所以平面 $ABE\perp$ 平面 B_1BCC_1.　……7 分

解法 2. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，所以 $B_1B\perp$ 平面 ABC.

因为 $B_1B, BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $B_1B\perp AB, B_1B\perp BC$.

又因为 $AB=BC=1, AC=\sqrt{2}$，所以 $AC^2=AB^2+BC^2$.

所以 $AB\perp BC$.

以点为 B 坐标原点，BA, BC, BB_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴

建立如图所示空间直角坐标系 $B-xyz$，则

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$B(0,0,0), A(1,0,0),\ C(0,1,0), A_1(1,0,2), B_1(0,0,2), C_1(0,1,2)$，

$E(0,1,\frac{1}{2})$,

所以 $\overrightarrow{BE}=(0,1,\frac{1}{2}),\ \overrightarrow{BA}=(1,0,0)$,

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}x=0\\ y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，

令 $z=2$, 则 $y=-1$,， $x=0$.则

$\vec{n}=(0,-1,2)$

由（I）可知，平面 B_1BCC_1 的法向量为 $\overrightarrow{BA}=(1,0,0)$，

因为 $\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}=0$，

所以平面 $ABE\perp$ 平面 B_1BCC_1.

（II）由（I）知，平面 ABE 的法向量为 $\vec{n}=(0,-1,2)$，

$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,-2)$,

设直线 A_1C 与平面 ABE 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{A_1C},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{A_1C}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{\sqrt{30}}{6}$$

所以, 直线 A_1C 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$. ……14 分

（17）选①

解：方法 1：

（I）设 AB 边上高为 CD

在 $Rt\Delta ACD$ 中，$\sin A=\frac{CD}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$\because B=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore 0<A<\frac{\pi}{3}$

$\therefore \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$

$\because A+B+C=\pi$

$\therefore \sin C=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{\sqrt{21}}{14}\times(-\frac{1}{2})+\frac{5\sqrt{7}}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{21}}{7}$ ……10 分

（II）在 $Rt\Delta BDC$ 中，因为 $sinB=\frac{DC}{BC}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{BC}=sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以 $BC=1$

又因为 $b=\sqrt{7}$，$\sin C=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……14 分

方法 2：

（I）在 $Rt\Delta BDC$ 中，$BC=a=1$（答案与选择条件①相同） ……10 分

（II）设 AB 边上高为 CD

在 $Rt\Delta ACD$ 中，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{5}{2}$

因为 $CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$tan\angle CBD=\frac{CD}{BD}$

所以 $BD=\frac{CD}{tan\angle CBD}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}$

在 $Rt\Delta BDC$ 中，$BD=\frac{1}{2}$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$AB = AD - BD = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$

又因为 $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$

所以 $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ……14 分

选②

解：（I）$\because B = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore 0 < A < \frac{\pi}{3}$

又 $\because \cos A = \frac{5\sqrt{7}}{14}$

$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{21}}{14}$

$\because A + B + C = \pi$

$\therefore \sin C = \sin(A + B)$

$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$= \frac{\sqrt{21}}{14} \times (-\frac{1}{2}) + \frac{5\sqrt{7}}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{21}}{7}$ ……10 分

（II）$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\therefore a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$

$\therefore S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ……14 分

选③

解：（I）方法 1：

$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$\therefore \sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

又$\because 0<A<\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \cos A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$

$\because A+B+C=\pi$

$\therefore \sin C=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\dfrac{\sqrt{21}}{14}\times(-\dfrac{1}{2})+\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ ……10 分

方法 2：$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$\therefore 7=1+c^2-2\times1\times c\times(-\dfrac{1}{2})$

即$c^2+c-6=0$

解得：$c=2$或$c=-3$（舍去）

$\because \dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\therefore \sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

（II）$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……14 分

（18）解：（Ⅰ）解：设“该站运动员甲的成绩高于该站运动员乙的成绩”为事件 A；

运动员甲第 1 站、第 2 站、第 3 站、第 4 站、第 5 站的成绩分别为：

86.20、 92.80、 87.50、 89.50、 86.00 ……1 分

运动员乙第 1 站、第 2 站、第 3 站、第 4 站、第 5 站的成绩分别为：

88.40、 88.60、 89.10、 88.20、 87.70 ……2 分

其中第 2 站和第 4 站甲的成绩高于乙的成绩

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$\therefore P(A)=\frac{2}{5}$ ……4 分

（Ⅱ）X 的可能取的值为 $0,1,2$，则 ……5 分

$P(X=0)=\frac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$ ……6 分

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ ……7 分

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^0}{C_5^2}=\frac{1}{10}$ ……8 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

……9 分

$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$ ……10 分

（Ⅲ）**答案一：**推荐乙. ……12 分

理由是：从 2021 赛季前 5 站的成绩可以看出：任意 1 站运动员甲的成绩高于该站运动员乙的成绩的概率为 $\frac{2}{5}$，乙的成绩高于该站运动员甲的成绩的概率为 $\frac{3}{5}$. 因为 $\frac{3}{5}>\frac{2}{5}$，所以乙的成绩好于甲的成绩的可能性大. ……14 分

答案二：推荐乙. ……12 分

用“$\xi=1$”表示任意 1 站运动员甲的成绩高于乙的成绩，用“$\xi=0$”表示任意 1 站运动员甲的成绩低于乙的成绩，则 $P(\xi=1)=\frac{2}{5}$，　$P(\xi=0)=\frac{3}{5}$

$E(\xi)=1\times\frac{2}{5}+0\times\frac{3}{5}=0.4$，$D\xi=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=0.24$

用“$\eta=1$”表示运动员乙的成绩高于甲的成绩，用“$\eta=0$”表示运动员乙的成绩低于甲的成绩，

则 $P(\eta=1)=\frac{3}{5}$　$P(\eta=0)=\frac{2}{5}$

$E(\eta)=1\times\frac{3}{5}+0\times\frac{2}{5}=0.6$，$D(\eta)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=0.24$

因为 $E(\xi)=0.4<E(\eta)=0.6$，所以乙的成绩好于甲的成绩. ……14 分

答案三：推荐乙. ……12 分

甲 5 站的平均成绩为：$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}(86.20+92.80+87.50+89.50+86.00)=88.40$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

乙 5 站的平均成绩为：$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}(88.40+88.60+89.10+88.20+87.70)=88.40$

甲 5 站成绩方差为：

$s_{甲}^2=\frac{1}{5}[(88.40-86.20)^2+(88.40-92.80)^2+(88.40-87.50)^2+(88.40-89.50)^2+(88.40-86.00)^2]=6.396$

乙 5 站成绩方差为：

$s_{乙}^2=\frac{1}{5}[(88.40-88.40)^2+(88.40-88.60)^2+(88.40-89.10)^2+(88.40-88.20)^2+(88.40-87.70)^2]=0.212$

$\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$说明甲乙二人水平相当，$s_{甲}^2>s_{乙}^2$表明乙的发挥比甲的更 稳定

……14 分

所以预测乙的成绩会更好.

答案四：推荐甲. ……12 分

甲 5 站的平均成绩为：$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}(86.20+92.80+87.50+89.50+86.00)=88.40$

乙 5 站的平均成绩为：$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}(88.40+88.60+89.10+88.20+87.70)=88.40$

甲乙 5 站的平均成绩虽然相同，但是甲成绩的极大值为 92.80，乙成绩的极大值为 89.10，

甲成绩的极大值高于乙成绩的极大值，所以甲的成绩会比乙的更好.

……14 分

（19）解：（Ⅰ）因为 $f'(x)=6x^2-4x$，所以 $f'(0)=0$.

因为 $f(0)=3$，

所以切线方程为 $y-3=0(x-0)$，即 $y=3$. ……4 分

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)-(2x+1)=2x^3-2x^2+3-(2x+1)\ (x>0)$，

即 $g(x)=2x^3-2x^2-2x+2$，

$g'(x)=6x^2-4x-2=2(3x^2-2x-1)=2(3x+1)(x-1)$，

令 $g'(x)=0$，则 $x=1$ 或 $x=-\frac{1}{3}$.

$g'(x),g(x)$ 随 x 变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$g(x)$	↘	极小值	↗

所以 $g(x)\ge g(1)=2-2-2+2=0$.

所以 $2x^3-2x^2+3-(2x+1)\ge 0$，$f(x)\ge 2x+1$. ……10 分

（III）由于 $h(x)=8x^2-34, x\in\mathbf{R}$，设 $q(x)=f(x)-h(x)=2x^3-2x^2+3-8x^2+34$，

$q(x)=2x^3-10x^2+37$，$q'(x)=6x^2-20x=2x(3x-10)$.

$q'(x), q(x)$ 随 x 变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{10}{3})$	$\frac{10}{3}$	$(\frac{10}{3},+\infty)$
$q'(x)$	+	0	−	0	+
$q(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由表可知 $q(0)=37$，$q(\frac{10}{3})=-\frac{1}{27}$，因为 $q(3)=1>0$，$q(4)=5>0$，

$q(3)\cdot q(\frac{10}{3})<0$，$q(\frac{10}{3})\cdot q(4)<0$，

所以 $q(x)$ 在 $(3,\frac{10}{3})$，$(\frac{10}{3},4)$ 分别有唯一零点.

所以 $q(x)$ 在 $(3,4)$ 内有两个零点，在 $(0,3)$，$(4,+\infty)$ 内无零点，$(-\infty,0)$ 内有唯一零点.

所以存在唯一的自然数 $m=3$，使得 $h(x)$ 与 $f(x)$ 的图象在 $(m,m+1)$ 上有两个不同公共点.

……15 分

（20）解：（Ⅰ）根据题意得：

$$\begin{cases} a=2 \\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \\ b^2=a^2-c^2 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=2 \\ c=1 \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……5 分

（Ⅱ）证法 1：因为点 M 为椭圆上顶点，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以点 M 的坐标为 $M\left(0,\sqrt{3}\right)$.

设直线 $MA: y=k_1x+\sqrt{3}$,

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=k_1x+\sqrt{3}\end{cases}$ 得 $(3+4k_1^2)x^2+8\sqrt{3}k_1x=0$.

设点 $A\left(x_A,y_A\right),B\left(x_B,y_B\right)$,

解得 $x_A=-\dfrac{8\sqrt{3}k_1}{4k_1^2+3}$, 所以 $y_A=k_1x_A+\sqrt{3}=\dfrac{-4\sqrt{3}k_1^2+3\sqrt{3}}{4k_1^2+3}$.

$$k_{AN}=\frac{y_A+\frac{5}{3}\sqrt{3}}{x_A}=\frac{\frac{-4\sqrt{3}k_1^2+3\sqrt{3}}{4k_1^2+3}+\frac{5}{3}\sqrt{3}}{\frac{-8\sqrt{3}k_1}{4k_1^2+3}}=-\frac{k_1}{3}-\frac{1}{k_1}.$$

设直线 $MB: y=k_2x+\sqrt{3}$

同理可得 $k_{BN}=-\dfrac{k_2}{3}-\dfrac{1}{k_2}$.

又因为 $k_1k_2=3$, 所以 $k_2=\dfrac{3}{k_1}$.

所以 $k_{BN}=-\dfrac{\frac{3}{k_1}}{3}-\dfrac{1}{\frac{3}{k_1}}=-\dfrac{k_1}{3}-\dfrac{1}{k_1}$.

所以 $k_{AN}=k_{BN}$.

所以直线 AB 过定点 $N(0,-\dfrac{5}{3}\sqrt{3})$. ……14 分

证法 2：由题意可知，直线 AB 存在斜率

设直线 AB 的方程为：$y=kx+m$，则

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ 3x^2+4y^2-12=0\end{cases}$ 消去 y 得 $\left(3+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-12=0$.

$\Delta=64k^2m^2-4\times\left(3+4k^2\right)\left(4m^2-12\right)>0$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

即 $4k^2-m^2+3>0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$A(x_2,y_2)$，则

$$x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}，\quad x_1\cdot x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$$

所以 $k_1=\dfrac{y_1-\sqrt{3}}{x_1}=\dfrac{kx_1+\left(m-\sqrt{3}\right)}{x_1}$.

$$k_2=\frac{y_2-\sqrt{3}}{x_2}=\frac{kx_2+\left(m-\sqrt{3}\right)}{x_2}.$$

因为 $k_1k_2=3$，

所以 $\dfrac{kx_1+\left(m-\sqrt{3}\right)}{x_1}\cdot\dfrac{kx_2+\left(m-\sqrt{3}\right)}{x_2}=\dfrac{\left[kx_1+\left(m-\sqrt{3}\right)\right]\left[kx_2+\left(m-\sqrt{3}\right)\right]}{x_1x_2}=3$.

所以 $\left(k^2-3\right)x_1x_2+k\left(m-\sqrt{3}\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(m-\sqrt{3}\right)^2=0$.

所以 $\left(k^2-3\right)\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}+\dfrac{-8k^2m\left(m-\sqrt{3}\right)}{3+4k^2}+\left(m-\sqrt{3}\right)^2=0$.

所以 $3m^2+2\sqrt{3}m-15=0$，即 $\left(\sqrt{3}m+5\right)\left(\sqrt{3}m-3\right)=0$.

所以 $m=-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ 或 $m=\sqrt{3}$（舍）.

所以直线 AB 的方程为：$y=kx-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

所以直线 AB 过定点 $N(0,-\dfrac{5}{3}\sqrt{3})$. ……14 分

（21）解：解析：（I）$1,3,4,1;1,3,4,2;1,3,4,3;1,3,4,4$. ……4 分

（II）i）当 $a>0, f(x)=ax^2-2x$ 的对称轴 $x=\dfrac{1}{a}$，

所以当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时单调递增，由于 $(n=1,2,3,\cdots)$.

所以当 $m=\left[\dfrac{1}{a}\right]+1, n\geq m$ 时，有 $a_n=b_n$，

由于 $\dfrac{b_n}{n}=an-2$ 是等差数列，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以存在正整数 m，使得 $\frac{b_m}{m},\frac{b_{m+1}}{m+1},\frac{b_{m+2}}{m+2}\cdots$ 是等差数列. ……9 分

ii) $f(x)=ax^2-2x$ 的对称轴 $x=\frac{1}{a}$，由于 $n=1,2,3\cdots$；

$a_1=a-2,a_2=4a-4,a_3=9a-6,a_4=16a-8$.

①当 $a\in[-2,\frac{2}{5})$ 时，此时 $a_1=a-2$ 最大；

由于 $b_n=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n=1,2,3\cdots)$，所以 $b_1=b_2=b_3=b_4=a_1=a-2$.

所以 $\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{3}+\frac{b_4}{4}=(a-2)(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=\frac{25(a-2)}{12}$.

②当 $a\in(\frac{2}{5},\frac{1}{2}]$ 时，$b_1=b_2=b_3=a_1=a-2,b_4=a_4$，

所以 $\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{3}+\frac{b_4}{4}=\frac{35a-34}{6}$.

③当 $a\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$ 时，$a_2-a_1=3a-2$，

$a_2-a_1=3a-2<0$，$a_3-a_1=8a-4>0$，

$b_1=b_2=a_1=a-2,a_3=b_3,b_4=a_4$，

所以 $\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{3}+\frac{b_4}{4}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{3}+\frac{a_4}{4}=\frac{17a-14}{2}$.

④当 $a\in(\frac{2}{3},1]$ 时，$a_2-a_1=3a-2>0$，故 $b_n=a_n$，

$\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{3}+\frac{b_4}{4}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\frac{a_4}{4}=10a-8$.

⑤当 $a\in(1,2]$ 时，$f(x)$ 开口向上，对称轴 $x=\frac{1}{a}<1$，

所以 $a_n=an^2-2n$ 单调递增，所以 $b_n=a_n$.

则 $\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{3}+\frac{b_4}{4}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\frac{a_4}{4}=10a-8$;

综上所述，$\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{3}+\frac{b_4}{4}=\begin{cases}\frac{25(a-2)}{12},-2\leqslant a\leqslant\frac{2}{5}\\ \frac{35a-34}{6},\frac{2}{5}<a\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{17a-14}{2},\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{2}{3}\\ 10a-8,\frac{2}{3}<a\leqslant 2\end{cases}$.

……14 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜
北京高考资讯