2024 届高三开学摸底联考

数 学 试 题

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟，满分 150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

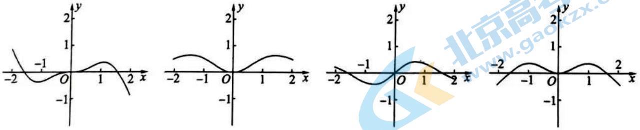
1.已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{2}\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

A.$\{1\}$　　B.$\{3,4\}$　　C.$\{2,3,4\}$　　D.$\{1,2,3,4\}$

2.已知 $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=\frac{8}{5}$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=$

A.$\frac{3}{5}$　　B.$\frac{4}{5}$　　C.$-\frac{3}{5}$　　D.$-\frac{4}{5}$

3.函数 $f(x)=\frac{2x\sin x}{e^x+e^{-x}}$（e 为自然对数的底数）在$[-2,2]$的大致图象是



A　　B　　C　　D

4.已知椭圆 $\frac{x^2}{10-t}+\frac{y^2}{t-4}=1$ 的焦点在 y 轴上，若焦距为 4，则该椭圆的离心率为

A.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均为等差数列，数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若$\frac{a_n}{b_n}$为定值，$S_5=45$，$b_3=6$，$b_7=14$，则 $a_5=$

A.15　　B.56　　C.72　　D.104

6.“三分损益法”是古代中国发明的制定音律时所用的生律法.例如:假设能发出第一个基准音的乐器的长度为36,那么能发出第二个基准音的乐器的长度为 $36\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=24$,能发出第三个基准音的乐器的长度为 $24\times\left(1+\frac{1}{3}\right)=32$,……,也就是依次先减少三分之一,后增加三分之一,以此类推.现有一兴趣小组采用此规律构造了一个共12项的数列 $\{a_n\}$ 用来研究数据的变化,已知 $a_8=192$,则 $a_5=$

A.324　　　　B.297　　　　C.256　　　　D.168

7.某冷饮店有“桃喜芒芒”“草莓啵啵”“蜜桃四季春”“芋圆葡萄”四种饮品可供选择,现有四位同学到店每人购买一杯饮品,则恰有两种饮品没人购买的概率为

A.$\frac{21}{64}$　　　　B.$\frac{9}{64}$　　　　C.$\frac{15}{16}$　　　　D.$\frac{15}{32}$

8.已知函数 $f(x)=x^3+3x^2+x+1$,设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=-2n+9$,则 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_9)=$

A.36　　　　B.24　　　　C.20　　　　D.18

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

9.已知实数 m,n 满足 $0<m<\frac{1}{2}$,$1<n<2$,则下列关系中正确的是

A.$m^n<n^m$　　　　B.$\sin m<\sin\frac{1}{n}$　　　　C.$mn^2>1$　　　　D.$\log_m n<\log_n m$

10.已知随机变量 ξ_i 服从两点分布,且 $P(\xi_i=1)=p_i\,(i=1,2)$,若 $\frac{1}{2}<p_1<p_2<1$,则下列判断不正确的是

A.$E(\xi_2)<D(\xi_2)$　　　　B.$E(\xi_1)<E(\xi_2)$　　　　C.$E(\xi_1)<D(\xi_1)$　　　　D.$D(\xi_1)<D(\xi_2)$

11.若关于 x 的方程 $x^2+x+m=0\,(m\in\mathbf{R})$ 有两个不等复数根 x_1 和 x_2,其中 $x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$(i是虚数单位),则下面四个选项正确的有

A.$m=1$　　　　B.$x_1>x_2$　　　　C.$x_1^3=1$　　　　D.$x_2^2=\overline{x_2}$

12.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x<0,\\ 2^x-2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f^2(x)-(2a+1)f(x)+a^2+a=0$ 有6个不同的实根,则实数 a 可能的取值有

A.$-\frac{1}{2}$　　　　B.$\frac{1}{2}$　　　　C.$\frac{3}{4}$　　　　D.2

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知 t 为实数，$\boldsymbol{a}=(2,t)$，$\boldsymbol{b}=(3,0)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量为________.

14.已知 $\left(\dfrac{2}{x}+x^2\right)^6$ 的展开式中的常数项为________（用数字作答）

15.已知双曲线 E 的一个焦点为 F，点 F 到双曲线 E 的一条渐近线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离为 1，则双曲线 E 的标准方程是________.

16.已知在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA+BC=4$，$AB\perp AC$，$PA\perp$平面 ABC，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积的最小值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）某厂家为增加销售量特举行有奖销售活动，即每位顾客购买该厂生产的产品后均有一次抽奖机会.在一个不透明的盒子中放有四个大小、质地完全相同的小球分别标有 1，2，3，5 四个数字，抽奖规则为：每位顾客从盒中一次性抽取两个小球，记下小球上的数字后放回，记两个小球上的数字分别为 ξ,η，若 $|\xi-\eta|$ 为奇数即为中奖.

（1）求某顾客甲获奖的概率；

（2）求随机变量 $X=|\xi-\eta|$ 的分布列与数学期望 $E(X)$.

18.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，且有 $\dfrac{a_{n+1}+2}{2}=a_n+n$.

（1）证明：数列 $\{a_n+2n\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\left\{\dfrac{n}{a_n+2n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

19.（12 分）如图，$\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，$\triangle ABC$ 外一点 D（D 与 $\triangle ABC$ 在同一平面内）满足 $\angle BAC=\angle DAC$，$AB=CD=2$，$\sin\angle ACB+\cos\angle ACB=\dfrac{\sqrt{2}c+a}{b}$.

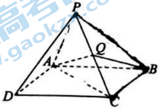
（1）求 B；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 2，求线段 AD 的长.

20.(12分)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面四边形 $ABCD$ 为矩形,平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$,$PA\perp PB$,$AB=\sqrt{5}$,$PB=BC=2$,点 Q 为 PC 的中点.

(1)求证:平面 $ABQ\perp$ 平面 PAC;

(2)求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值.



21.(12分)已知函数 $f(x)=x^2-mx\ln x+1$,$m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq 0$.

(1)当 $m=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\frac{2}{\mathrm{e}}x$ 恒成立,其中 e 是自然对数的底数,求实数 m 的取值范围.

22.(12分)已知点 F 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点,点 $P(2,1)$,$Q(0,1)$,且 $|PF|=|QF|$.

(1)求抛物线 C 的标准方程;

(2)若斜率存在的直线 l 过点 P 且交抛物线 C 于 M,N 两点,若直线 MF,NF 交抛物线于 A,B 两点(M、N 与 A、B 不重合),求证:直线 AB 过定点.

2024 届高三开学摸底联考

数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】因为 $B=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，又 $A=\{1,2,3,4\}$，由交集的运算可知：$A\cap B=\{2,3,4\}$.故选 C.

2.B 【解析】由题 $\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$.故选 B.

3.B 【解析】由题知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{2(-x)\sin(-x)}{e^{-x}+e^{x}}=f(x)$，即 $f(x)$ 为偶函数，所以图象关于 y 轴对称，排除 A、C.又 $f(1)=\frac{2\sin 1}{e+e^{-1}}<1$，$f(2)=\frac{4\sin 2}{e^2+e^{-2}}>0$，故选 B.

4.B 【解析】由题得 $t-4>10-t>0$ 即 $7<t<10$，由焦距为 4 得 $t-4-(10-t)=4$，解得 $t=9$，离心率为 $\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.故选 B.

5.A 【解析】由 $S_5=5a_3=45$ 得 $a_3=9$，因为 $\frac{a_n}{b_n}$ 为定值，所以 $\frac{a_7}{b_7}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$，即 $a_7=21$，所以 $a_5=\frac{a_3+a_7}{2}=15$.故选 A.

6.A 【解析】$a_8=a_5\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$，即 $a_5\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=192$，解得：$a_5=324$.故选 A.

7.A 【解析】解决该问题，可以将四位同学先分为 2，2 或 3，1 两堆，共有 $\frac{C_4^2}{A_2^2}+C_4^3$ 种分堆方法，再从 4 种饮品中选出 2 种，分配给两堆人，故共有 $\left(\frac{C_4^2}{A_2^2}+C_4^3\right)\times A_4^2=84$ 种方法.所以恰有两种饮品没人购买的概率为 $P=\frac{84}{4^4}=\frac{21}{64}$.故选 A.

8.D 【解析】$f(x)=x^3+3x^2+x+1=(x+1)^3-2(x+1)+2$，所以曲线 $f(x)$ 的对称中心为 $(-1,2)$，即 $f(x)+f(-2-x)=4$，因为 $a_n=-2n+9$，易知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_5=-1$，$a_1+a_9=a_2+a_8=a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5=-2$，所以 $f(a_1)+f(a_9)=f(a_2)+f(a_8)=f(a_3)+f(a_7)=f(a_4)+f(a_6)=4$，所以 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_9)=4\times 4+2=18$.故选 D.

9.AB 【解析】由题易知，$m^n<1$，$n^m>1$，所以 $m^n<n^m$，A 正确；$0<m<\frac{1}{2}<\frac{1}{n}<1<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin m<\sin\frac{1}{n}$，B 正确；取 $m=\frac{1}{4}$，$n=\frac{3}{2}$，则 $mn^2=\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{16}<1$，C 错误；$\frac{1}{m}>2$，$\frac{1}{2}<\frac{1}{n}<1$，$\log_m n>\log_m\frac{1}{m}=-1$，$\log_n m<\log_n\frac{1}{n}=-1$，即 $\log_m n>\log_n m$，D 错误.故选 AB.

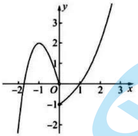
10.ACD 【解析】$\because E(\xi_1)=p_1$，$E(\xi_2)=p_2$，$\therefore E(\xi_1)<E(\xi_2)$，$\because D(\xi_1)=p_1(1-p_1)$，$D(\xi_2)=p_2(1-p_2)$，$\therefore E(\xi_2)>D(\xi_2)$，$E(\xi_1)>D(\xi_1)$，$D(\xi_1)-D(\xi_2)=(p_1-p_2)(1-p_1-p_2)>0$.故选 ACD.

11.ACD 【解析】由题可知，$x_1+x_2=-1$，所以 $x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$m=x_1x_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1$，故 A 正确；$x_1$，$x_2$ 均为虚数，不能比较大小，故 B 错误；$x_1^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=1$，故 C 正确；$x_2^2=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\overline{x_2}$，故 D 正确.故选 ACD.

12.BC 【解析】当 $x<0$ 时，$f(x)=x^3-3x$，则 $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$，

$f(x)$单调递增，当 $x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，作出 $f(x)$的图象，如图所示，

$f^2(x)-(2a+1)f(x)+a^2+a=(f(x)-a)(f(x)-a-1)=0$，



即 $f(x)=a$ 与 $f(x)=a+1$ 共六个不等实根，由图可知 $f(x)=2$ 时，$x=-1$ 或 $x=2$，即 $f(x)=2$ 有两个根，

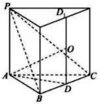
若使 $f(x)=a$ 与$f(x)=a+1$ 共六个不等实根，只需满足$\begin{cases}0<a<2,\\0<a+1<2,\end{cases}$ 即 $0<a<1$.故选 BC.

13.(2,0) 【解析】由题 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量为$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{6}{\sqrt{9+0}}\times(1,0)=(2,0)$.

14.240 【解析】由题 $T_{k+1}=C_6^k\left(\dfrac{2}{x}\right)^{6-k}\cdot(x^2)^k=2^{6-k}C_6^kx^{3k-6}$，$k=0,1\cdots,6$，当 $k=2$ 时，为常数项，此时 $T_3=2^4C_6^2=240$.

15.$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 或$\dfrac{y^2}{\frac{1}{3}}-x^2=1$ 【解析】当焦点在 x 轴上时，设双曲线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则其渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，点 F 到双曲线 E 的一条渐近线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离为 1，即$\begin{cases}\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\b=1,\end{cases}$即 $a=\sqrt{3}$，所以此时双曲线 E 的标准方程为$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$；当焦点在 y 轴上时，设双曲线方程为$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则其渐近线方程为$y=\pm\dfrac{a}{b}x$，点 F 到双曲线 E 的一条渐近线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离为 1，即$\begin{cases}\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\b=1,\end{cases}$即 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以此时双曲线 E 的标准方程为$\dfrac{y^2}{\frac{1}{3}}-x^2=1$.综上，双曲线 E 的标准方程为$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 或$\dfrac{y^2}{\frac{1}{3}}-x^2=1$.

16.8π 【解析】将三棱锥补成直三棱柱，设点 D_1，D 为上下底面的外心，点 O 为直棱柱的外接球的球心，则 O 为 DD_1 的中点，点 D 为 BC 的中点，AD 为底面外接圆的半径，设 $PA=x$，则 $BC=4-x$，所以 $OD=\dfrac{x}{2}$，$AD=\dfrac{4-x}{2}=2-\dfrac{x}{2}$，得外接球半径 $R=AO=\sqrt{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{x^2}{2}-2x+4}=\sqrt{\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2}$，当 $x=2$ 时，R 有最小值为$\sqrt{2}$，此时球 O 的表面积为：$4\pi R^2=8\pi$.



17.解：(1)设事件 A：某顾客甲获奖，即$|\xi-\eta|$为奇数，则 $P(A)=\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\dfrac{1}{2}$，

所以某顾客甲获奖的概率为$\frac{1}{2}$. ………………………………………………………… 3 分

(2)由题意,X 的可能取值为 1,2,3,4. ………………………………………………………… 4 分

所以 $P(X=1)=\frac{2}{C_4^2}=\frac{1}{3}$, ………………………………………………………… 5 分

$P(X=2)=\frac{2}{C_4^2}=\frac{1}{3}$, ………………………………………………………… 6 分

$P(X=3)=\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{6}$, ………………………………………………………… 7 分

$P(X=4)=\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{6}$. ………………………………………………………… 8 分

所以随机变量 X 的分布列为:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

………………………………………………………… 9 分

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}=\frac{13}{6}$. ………………………………………………………… 10 分

18.(1)**证明**:由题$\frac{a_{n+1}+2}{2}=a_n+n$,即 $a_{n+1}=2a_n+2n-2$,

所以$\frac{a_{n+1}+2(n+1)}{a_n+2n}=\frac{2a_n+2n-2+2(n+1)}{a_n+2n}=\frac{2a_n+4n}{a_n+2n}=2$, ………………………………………………………… 3 分

$a_1+2=2$, ………………………………………………………… 4 分

所以$\{a_n+2n\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列. ………………………………………………………… 5 分

(2)**解**:由(1)知,$a_n+2n=2\times2^{n-1}=2^n$,所以$\frac{n}{a_n+2n}=\frac{n}{2^n}$, ………………………………………………………… 6 分

所以 $S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ………………………………………………………… 8 分

$\frac{1}{2}S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, ………………………………………………………… 9 分

两式相减得,

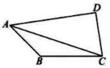
$$\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$=1-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ………………………………………………………… 11 分

即 $S_n=2-(2+n)\left(\frac{1}{2}\right)^n,n\in\mathbf{N}^*$. ………………………………………………………… 12 分

19.**解**:(1)因为 $\cos C+\sin C=\frac{\sqrt{2}c+a}{b}$,

由正弦定理可得 $\cos C+\sin C=\frac{\sqrt{2}\sin C+\sin A}{\sin B}$,



即 $\sin B\cos C+\sin B\sin C=\sqrt{2}\sin C+\sin A=\sqrt{2}\sin C+\sin[\pi-(B+C)]$

$=\sqrt{2}\sin C+\sin(B+C)=\sqrt{2}\sin C+(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$,

即 $\sin B\sin C=\sqrt{2}\sin C+\cos B\sin C$. …………………………………… 3 分

又 $C\in(0,\pi)$，$\sin C>0$，故 $\sin B=\sqrt{2}+\cos B$，即 $\sin B-\cos B=\sqrt{2}$，…………………… 4 分

所以 $\sqrt{2}\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，即 $\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)=1$，…………………………………… 5 分

因为 $B\in(0,\pi)$，$B-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以 $B-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，得 $B=\frac{3\pi}{4}$. …………………… 6 分

(2)因为△ABC 的面积 $S=2$，所以 $S=2=\frac{1}{2}ac\sin\frac{3\pi}{4}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}a=2$，$a=2\sqrt{2}$，…………………… 8 分

由余弦定理得 $AC=\sqrt{c^2+a^2-2ac\cdot\cos B}=2\sqrt{5}$，…………………………………… 9 分

所以 $\cos\angle CAB=\frac{4+20-8}{2\times2\times2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，…………………………………… 10 分

因为 AC 平分 $\angle BAD$，

所以 $\cos\angle CAD=\frac{AD^2+20-4}{2\cdot2\sqrt{5}\cdot AD}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，…………………………………… 11 分

所以 $AD=4$. …………………………………… 12 分

20.(1)**证明**：∵平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\perp AB$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

∴$BC\perp$ 平面 PAB，又∵$AP\subset$ 平面 PAB，

∴$BC\perp AP$. …………………………………… 1 分

又∵$PA\perp PB$，$BC\cap BP=B$，BC，$BP\subset$ 平面 BCP，

∴$AP\perp$ 平面 BCP，$BQ\subset$ 平面 BCP，即 $AP\perp BQ$. …………………………………… 2 分

在△BCP 中，$PB=BC$，Q 为 PC 的中点，

∴$BQ\perp PC$，…………………………………… 3 分

又 $AP\cap PC=P$，AP，$PC\subset$ 平面 PAC，

∴$BQ\perp$ 平面 PAC，…………………………………… 4 分

又 $BQ\subset$ 平面 ABQ，

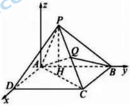
∴平面 $ABQ\perp$ 平面 PAC. …………………………………… 5 分

(2)**解**：作 $PH\perp AB$ 于点 H，易知 $PH\perp$ 平面 $ABCD$，

在 Rt△PAB 中，$PA=\sqrt{AB^2-PB^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=1$，

则 $PH=\frac{PA\cdot PB}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$AH=\sqrt{PA^2-PH^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. …………………… 6 分

如图以 A 点为原点，AD，AB 所在直线为 x 轴，y 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(0,\sqrt{5},0)$，$C(2,\sqrt{5},0)$，$D(2,0,0)$，$P\left(0,\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，$Q\left(1,\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$，$\overrightarrow{PC}=\left(2,\frac{4\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，$\overrightarrow{CD}$

$=(0,-\sqrt{5},0)$. …………………………………… 8 分

由(1)知 $BQ\perp$ 平面 PAC，所以平面 PAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{BQ}=\left(1,-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$， ………………………… 9 分

设平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+\frac{4\sqrt{5}}{5}y-\frac{2\sqrt{5}}{5}z=0,\\ -\sqrt{5}y=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,\sqrt{5})$， ………………………… 10 分

$\cos\langle\overrightarrow{BQ},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{BQ}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BQ}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$， ………………………… 11 分

由题可知二面角为锐角，所以二面角 $A-PC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 12 分

21.**解**：(1)由题，当 $m=1$ 时，$f(x)=x^2-x\ln x+1$，

$f'(x)=2x-\ln x-1$， ………………………… 1 分

$f'(1)=1, f(1)=2$， ………………………… 2 分

所以切线方程为 $y-2=x-1$， ………………………… 3 分

化简得 $x-y+1=0$，

即曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x-y+1=0$. ………………………… 4 分

(2) $f(x)\geqslant\frac{2}{e}x$，即 $x^2-mx\ln x+1\geqslant\frac{2}{e}x$，即 $x+\frac{1}{x}-m\ln x-\frac{2}{e}\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立， ………… 5 分

令 $g(x)=x+\frac{1}{x}-m\ln x-\frac{2}{e}$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x^2}-\frac{m}{x}=\frac{x^2-mx-1}{x^2}$. ………………………… 6 分

对于 $y=x^2-mx-1$，$\Delta=m^2+4>0$，故其必有两个零点，且两个零点的积为 -1，

则两个零点一正一负，设其正零点为 $x_0\in(0,+\infty)$，

则 $x_0^2-mx_0-1=0$，即 $m=x_0-\frac{1}{x_0}$， ………………………… 7 分

且在 $(0,x_0)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

故 $g(x_0)\geqslant0$，即 $x_0+\frac{1}{x_0}-\left(x_0-\frac{1}{x_0}\right)\ln x_0-\frac{2}{e}\geqslant0$. ………………………… 8 分

令 $h(x)=x+\frac{1}{x}-\left(x-\frac{1}{x}\right)\ln x-\frac{2}{e}$，

则 $h'(x)=1-\frac{1}{x^2}-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln x-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln x$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，

则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又 $h\left(\frac{1}{e}\right)=h(e)=0$，故 $x_0\in\left[\frac{1}{e},e\right]$， ………………………… 10 分

显然函数 $m=x_0-\frac{1}{x_0}$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上是关于 x_0 的单调递增函数，

则 $m\in\left[\frac{1}{e}-e,e-\frac{1}{e}\right]$，

所以实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e}-e,0\right)\cup\left(0,e-\frac{1}{e}\right]$. ………………………… 12 分

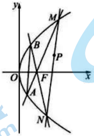
22.**解**：(1)由题设 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，则 $|PF|=\sqrt{\left(2-\frac{p}{2}\right)^2+1}$，$|QF|=\sqrt{\left(0-\frac{p}{2}\right)^2+1}$，

又$|PF|=|QF|$，故$\sqrt{\left(2-\frac{p}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\left(0-\frac{p}{2}\right)^2+1}$，整理得$2p-4=0$，

解得$p=2$.

所以抛物线C的标准方程为$y^2=4x$. ………………………………………………………… 4分

(2)若直线l不过点F，如图，



设$M\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$，$N\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$，$A\left(\frac{y_3^2}{4},y_3\right)$，$B\left(\frac{y_4^2}{4},y_4\right)$.

由题意可知直线MN的斜率存在且不为0，则直线MN的斜率$k_{MN}=\dfrac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$，

所以直线MN的方程为$y-y_1=\dfrac{4}{y_1+y_2}\left(x-\dfrac{y_1^2}{4}\right)$，即$4x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，……………… 5分

由直线MN过定点$(2,1)$，可得$y_1+y_2-y_1y_2=8$

同理直线AM的方程为$4x-(y_1+y_3)y+y_1y_3=0$，

AM过焦点$F(1,0)$，可得$y_1y_3=-4$， ………………………………………………………… 6分

BN的方程$4x-(y_2+y_4)y+y_2y_4=0$，BN过焦点$F(1,0)$，可得$y_2y_4=-4$. …………………… 7分

直线AB的方程为$4x-(y_3+y_4)y+y_3y_4=0$， ………………………………………………… 8分

由$y_1y_3=y_2y_4=-4$，得$4x+\left(\dfrac{4}{y_1}+\dfrac{4}{y_2}\right)y+\dfrac{16}{y_1y_2}=0$，

所以$4y_1y_2x+4(y_1+y_2)y+16=0$，即$y_1y_2x+(y_1+y_2)y+4=0$. …………………………… 9分

又因为$y_1+y_2-y_1y_2=8$，所以$(x+y)y_1y_2+8y+4=0$. …………………………………… 10分

令$\begin{cases}x+y=0,\\8y+4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=-\dfrac{1}{2},\end{cases}$故直线$AB$恒过定点$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$. ………………………………… 11分

若直线l过点F，直线AB即为直线MN，其方程为$y-0=\dfrac{1-0}{2-1}(x-1)$，即$y=x-1$，显然直线过点$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

综上，直线AB过定点$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$. ………………………………………………………… 12分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。