理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	B	A	D	D	C	A	C	B	D	A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分.

13．0.6　　14．2　　15．$-\frac{1}{2}$　　16．$[\frac{1}{12},\frac{7}{12}]$

三．解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤． 第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17.【解析】（1）将图象平移至 A 与原点 O 重合，则 $A'(0,0),B'(\frac{T}{4},1),C'(\frac{3T}{4},-1)$，

所以 $A'B'=(\frac{T}{4},1),A'C'=(\frac{3T}{4},-1)$，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'}=\frac{3T^2}{16}-1$，　　…………………… 4 分

所以 $\frac{3T^2}{16}-1=2$，解得 $T=4$，

故 $\frac{2\pi}{\omega}=4$，解得 $\omega=\frac{\pi}{2}$.　　…………………… 6 分

（2）因为 $f(2)-f(\frac{4}{3})=\sin(\pi+\varphi)-\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)=-\frac{1}{2}\sin\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi=-\sin(\varphi+\frac{\pi}{3})$，

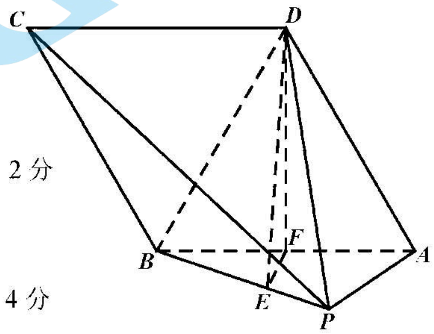
所以 $-\sin(\varphi+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\sin(\varphi+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　　…………………… 9 分

所以 $\varphi+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\varphi+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

即 $\varphi=2k\pi$ 或 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，　　…………………… 11 分

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.　　…………………… 12 分

18.【解析】（1）如图，取 AB 的中点 F，



连接 DB,EF,DF，

因为底面 $ABCD$ 是边长为 4 的菱形，

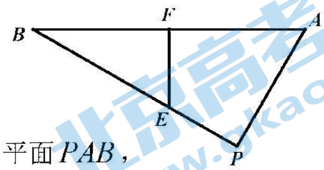
$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，所以 $DF\perp AB$，　　…………………… 2 分

因为 $CD\perp DE$，所以 $AB\perp DE$，

因为 $DF\bigcap DE=D$，所以 $AB\perp$ 平面 DEF，

所以 $AB\perp EF$，　　…………………… 4 分

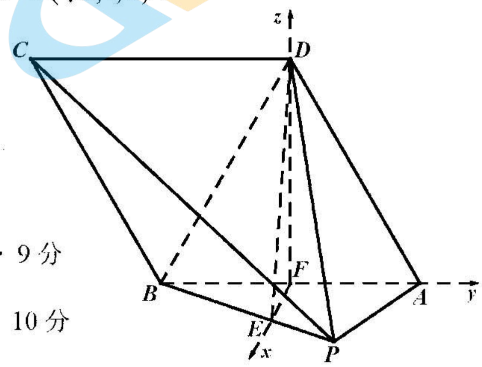
在 ΔPAB 中，如图，因为 $AB=4$，



所以 $PE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$； ························ 6 分

（2）因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$DF\perp AB$，所以 $DF\perp$ 平面 PAB，

如图，以 FE 为 x 轴，以 FA 为 y 轴，以 FD 为 z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $E(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0,0)$，$D(0,0,2\sqrt{3})$，$C(0,-4,2\sqrt{3})$，$P(\sqrt{3},1,0)$，

则 $\overrightarrow{PC}=(-\sqrt{3},-3,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(0,4,0)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}z=0\\ 4y=0\end{cases}$，

令 $x=2$，得 $\vec{n}=(2,0,1)$， ························ 9 分

因为 $\overrightarrow{DE}=(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0,-2\sqrt{3})$， ························ 10 分

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{DE}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\dfrac{-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{30}}{3}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，

所以直线 DE 与平面 CDP 所成角的正弦值 $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$. ························ 12 分

19. 【解析】（1）由已知，$\bar{x}=3$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=10$，

因此，如果选择模型 $y=a+bx$，

则相关系数 $r_1=\dfrac{47}{\sqrt{10}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$， ························ 2 分

如果选择模型 $y=a+b\ln x$，即 $y=a+bu$，

则相关系数 $r_2=\dfrac{19.38}{\sqrt{1.615}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$， ························ 4 分

因为 $(\dfrac{47}{\sqrt{10}})^2=220.9$，$(\dfrac{19.38}{\sqrt{1.615}})^2=232.56$，

所以 $0<r_1<r_2$，故选择 $y=a+b\ln x$ 更适宜作为 y 关于 x 的回归模型. ········ 6 分

（2）因为 $\sum\limits_{i=1}^{5}u_i\approx 4.79$，$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=62$，

所以 $\bar{u}=\dfrac{4.79}{5}=0.958$，$\bar{y}=\dfrac{62}{5}=12.4$， ························ 8 分

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2}=\frac{19.38}{1.615}=12,$$ ………………………… 10 分

所以 $a=\overline{y}-b\overline{u}=12.4-12\times0.958=0.904$，

所以 y 关于 x 的回归方程为 $y=0.904+12\ln x$． ………………………… 12 分

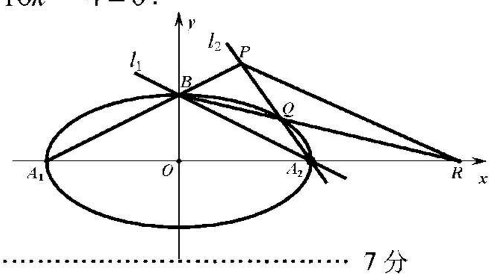
20. 【解析】（1）因为直线 A_2B 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，

焦距 $2c=2\sqrt{3}$，因此 $a^2-b^2=3$， ………………………… 2 分

解得 $a=2,b=1$，所以椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$； ………………………… 4 分

（2）因为 $A_2(2,0)$，所以直线 l_2 的方程为 $y=k(x-2)(k<-\frac{1}{2})$

联立 $\begin{cases}y=k(x-2)\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，整理得 $(4k^2+1)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$．



则 $x_Q+2=\frac{16k^2}{4k^2+1}$，故 $x_Q=\frac{8k^2-2}{4k^2+1}$，

则 $y_Q=k\left(x_Q-2\right)=\frac{-4k}{4k^2+1}$．

所以 $Q(\frac{8k^2-2}{4k^2+1},\frac{-4k}{4k^2+1})$. ……………………………………………… 7 分

又直线 A_1B 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$．

联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+1\\ y=k\left(x-2\right)\end{cases}$，解得 $P(\frac{4k+2}{2k-1},\frac{4k}{2k-1})$. ………………………… 9 分

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|QR|}{|QB|}\cdot\frac{|QP|}{|QA_2|}=\frac{y_Q}{1-y_Q}\cdot\frac{y_P-y_Q}{y_Q}=\frac{y_P-y_Q}{1-y_Q}$$

$$=\frac{-8k\cdot(2k-1)}{(2k+1)\cdot(8k^2-2)}\cdot\frac{-2k\cdot(2k+1)}{2k-1}=\frac{16k^2}{8k^2-2}=\frac{8}{4-\frac{1}{k^2}},$$

因为 $k<-\frac{1}{2}$，所以 $k^2>\frac{1}{4},0<\frac{1}{k^2}<4$，所以 $\frac{S_1}{S_2}\in(2,+\infty)$． ………………………… 12 分

21.【解析】（1）当 $a=1,k=2$ 时，此时 $f(x)=-\frac{1}{x}-2x+\ln x$，

则 $f'(x)=\frac{1}{x^2}-2+\frac{1}{x}=-\frac{(2x+1)(x-1)}{x^2}$， ………………………… 2 分

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增；

当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减；

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=-3$，无极小值. ………………………… 5 分

（2）不妨设 $x_1>x_2$，因为 $f(x_1)=f(x_2)$，

则 $-\dfrac{1}{x_1}-kx_1+a\ln x_1=-\dfrac{1}{x_2}-kx_2+a\ln x_2$

$\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}+a\ln\dfrac{x_1}{x_2}=k(x_1-x_2)$，所以 $\dfrac{1}{x_1x_2}+a\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}=k$， ………………………… 7 分

由 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{a}{x}-k$，则 $f'(x_1)+f'(x_2)=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+a(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2})-2k$，

$f'(x_1)+f'(x_2)=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+a(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2})-2(\dfrac{1}{x_1x_2}+a\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2})$

即 $f'(x_1)+f'(x_2)=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}-\dfrac{2}{x_1x_2}+a(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}-2\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2})$

所以 $f'(x_1)+f'(x_2)=\dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_1^2x_2^2}+a\dfrac{1}{x_1-x_2}(\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}-2\ln\dfrac{x_1}{x_2})$

即 $f'(x_1)+f'(x_2)=\dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_1^2x_2^2}+a\dfrac{1}{x_1-x_2}(\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}-2\ln\dfrac{x_1}{x_2})$， ………………………… 10 分

设 $t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(1,+\infty)$，构造函数 $\varphi(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t(t>1)$，

则 $\varphi'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}=\dfrac{t^2-2t+1}{t^2}>0$，

所以 $\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $\varphi(t)>\varphi(1)=0$，

因为 $\dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_1^2x_2^2}>0,\dfrac{1}{x_1-x_2}>0$，$a>0$，

所以 $f'(x_1)+f'(x_2)>0$. ………………………………………… 12 分

22. 【解析】（1）由题意，点 P 的极坐标为 $(2\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4})$， ………………………… 2 分

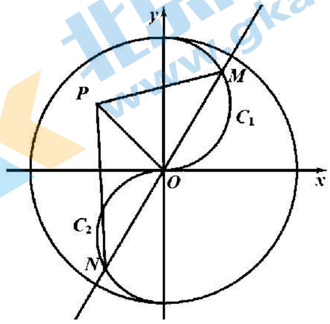
因为分界线 C_1 的圆心在 y 轴上，且直径为 4，

则其直角坐标方程为 $x^2+(y-2)^2=4$，即 $x^2+y^2-4y=0$ $(x\ge 0)$，

可得其极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\sin\theta=0$ $(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$，

即 $\rho=4\sin\theta\,(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$. ……………………… 5 分

（2）由太极图的对称性可知，M，N 两点关于极点对称，



所以 $S_{\Delta PMN}=2S_{\Delta OPM}=2\times\frac{1}{2}|OP||OM|\sin\angle POM$，

设直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$ （$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$），

则 $M(4\sin\alpha,\alpha)$，$\angle POM=\frac{3}{4}\pi-\alpha$，

所以 $S_{\Delta PMN}=2S_{\Delta OPM}=2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times4\sin\alpha\cdot\sin(\frac{3}{4}\pi-\alpha)$

$$=8\sqrt{2}\sin\alpha(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)$$

$$=4\sin2\alpha+4(1-\cos2\alpha)$$

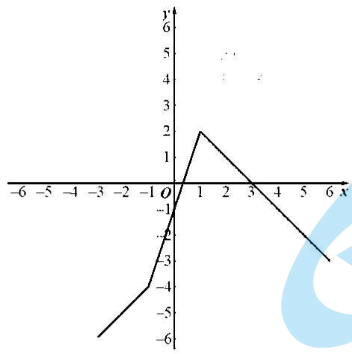
$$=4\sqrt{2}\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})+4，$$ ……………………… 8 分

因为 $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$，则 $-\frac{\pi}{4}\le2\alpha-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，

所以当 $2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{3\pi}{8}$ 时，ΔPMN 面积的最大值为 $4\sqrt{2}+4$. ……………… 10 分

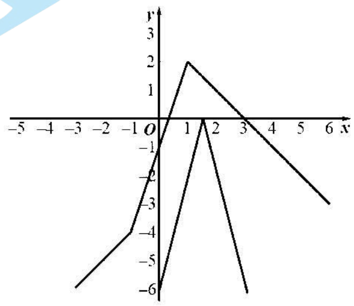
23. 【解析】（1）$f(x)=|x+1|-|2x-2|=\begin{cases}x-3,x\le-1,\\3x-1,-1<x<1,\\-x+3,x\ge1,\end{cases}$ ………………… 3 分

其图象如下图所示：



……………………… 5 分

（2）由（1）知函数 $f(x)$ 与 x 轴的交点为 $(\frac{1}{3},0)$ 和 $(3,0)$，



结合函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象可以知道，

当 $a\le-3$ 时，只需 $\frac{1}{3}\le b\le3$，

则 $f(x)\ge g(x)$ 在 R 上恒成立，

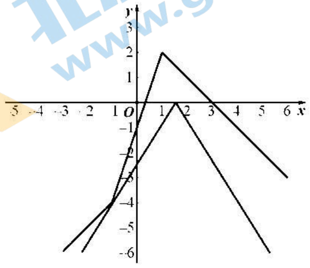
此时 $b-a\geq\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$，　　　　……………………… 7 分

当 $-3<a\leq-1$ 时，过点 $(-1,-4)$ 且斜率为 $-a$ 的直线方程为 $y=-ax-a-4$，

令 $y=0$，则 $x=-\frac{4}{a}-1$，要 $f(x)\geq g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

则 $-\frac{4}{a}-1\leq b\leq3$，

此时 $b-a\geq-\frac{4}{a}-1-a=-\frac{4}{a}-a-1\geq2\sqrt{(-\frac{4}{a})\times(-a)}-1=3$，



当且仅当 $a=-2$ 时等号成立.

综上：$b-a$ 的最小值为 3.　　　　……………………… 10 分